

防波堤の滑動破壊モードを対象とした FORMとSORMによる信頼性指標の相互比較

Comparison of Reliability Indices Calculated by FORM and SORM

宮脇 周作¹・長尾 毅²
Shusaku MIYAWAKI, Takashi NAGAO

¹非会員 工修 (株)日本港湾コンサルタント (〒141-0031 品川区西五反田8-3-6)

²正会員 工博 国土技術政策総合研究所(〒239-0826 横須賀市長瀬3-1-1)

FORM is frequently used while SORM is not because FORM is easy to be implemented. Considering the accuracy, however, reliability index calculated by FORM might not be accurate enough in case the performance function is strongly nonlinear. Taking the performance function for the external stability of breakwaters as an example, although that of the sliding failure mode is nonlinear, reliability indices were evaluated by FORM in the previous study. In this study, taking the sliding failure of gravity-type breakwaters (two structural types: caisson-type composite breakwaters, breakwaters covered with wave-dissipating blocks) as the subject of research, we executed the reliability analysis by using FORM and SORM. From comparison of the reliability index obtained by FORM and SORM, it was made clear that the reliability index by FORM is accurate enough in general.

Key Words: FORM, SORM, reliability index, breakwater, sliding failure

1. はじめに

信頼性設計法では、目標破壊確率や目標信頼性指標を、構造物の安全性の評価基準として用いる。FORM(First-Order Reliability Method)とSORM(Second-Order Reliability Method)は、破壊確率を近似的に算出する信頼性解析手法であるが、一般的には、取扱いが容易なFORMが用いられる場合が多い。しかしながら、性能関数の非線形性が強い場合には解析精度が低下する恐れがあるため、FORMの解析精度を向上させたSORM等の方法を用いて解析を行うことが望ましい場合がある。港湾施設においては、FORMを用いて防波堤の信頼性解析が実施されている¹⁾が、外部安定のうち転倒破壊モードを除いては性能関数が非線形であるため、解析精度が低下している可能性がある。そこで本研究では、一般的な防波堤形式であるケーソン式混成堤と消波ブロック被覆堤の滑動破壊モードを対象として、FORM、SORM両手法により信頼性解析を実施して、解析結果の比較、検討を行う。

2. FORMとSORMの概要

(1) FORM(First-Order Reliability Method)

FORMは破壊確率を近似的に求める信頼性解析手法の一つで、比較的簡便に信頼性指標、破壊確率を算出できるため標準的な信頼性解析手法となっている。信頼性指標とは、図-1に示すように破壊領域と

安全領域の境界点から平均値がどの程度離れているかを示す尺度であり、FORMに基づき式(1)によって算出される²⁾。

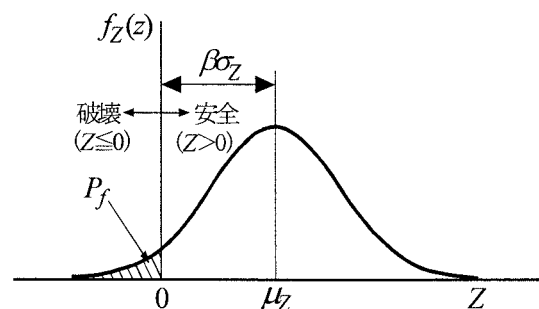


図-1 信頼性指標

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (1)$$

ここに、 Z : 性能関数、 μ : 平均値、 σ : 標準偏差

式(1)より明らかなように、信頼性指標 β を得るためには、性能関数 Z の標準偏差 σ_Z を求める必要があるが、設計因子(確率変数)が正規分布や対数正規分布以外の確率分布に従う場合や、性能関数が非線形である場合には、性能関数 Z としての確率分布が正規分布に従わないため、 σ_Z を得ることはできない。したがって、FORMでは以下に示す近似を行う。
①性能関数 Z を確率変数 X_i に関してテーラー展開し、1次の項で打ち切り、線形化する(線形化近似)。

- ②正規確率密度関数以外の分布を持つ確率変数を，正規確率変数で近似する（正規化近似）．
 ③確率変数間に相関がある場合は，変数変換によって独立な確率変数とする（変数変換）．

以上の近似により，性能関数 Z の確率分布が正規分布に近似され， σ_z を得ることが可能となる．

このような性能関数の正規化近似により，破壊確率 P_f と信頼性指標 β には式(2)に示す関係式が得られる．

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (2)$$

ここに， Φ ：標準正規確率分布関数

ここで，性能関数を $Z = g(R, S)$ （ R ：耐力， S ：作用効果）と定義し， R と S を互いに独立な正規確率変数とする． R と S を式(3)を用いて平均値0，標準偏差1に標準化すると，標準化空間（以下， X_i' によって表される空間をこのように記述する）における破壊確率 P_f と信頼性指標 β との関係は，図-2のように表される．

$$X_i' = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

ここに， i ：設計因子ナンバー

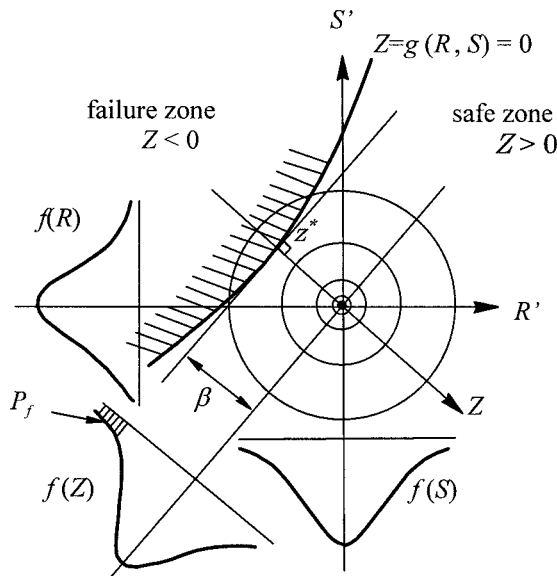


図-2 2変数の場合の標準化空間

標準化空間図中の原点を中心とする同心円は， R と S の等同時確率密度線である．破壊領域（ $Z<0$ ）における同時確率が破壊確率 P_f であり， R と S が独立な場合，標準化空間では次式によって定義される．

$$P_f = \iint_{Z \leq 0} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(R'^2 + S'^2)\right) dR' dS' \quad (4)$$

Z が非線形である場合には，式(4)は必ずしも解析的に解ける問題のみではないため， Z を線形化近似

し，さらに破壊線（ $Z=0$ ）に対して座標軸が直交するように座標変換することによって，式(2)が導かれる．したがって，信頼性指標 β は式(2)に示す標準正規確率分布関数の説明変数であるとともに，標準化空間においては原点すなわち平均値から破壊点 z^* までの距離を表す．

信頼性指標の算出方法は，平均値周りの線形化近似に基づくCornell³⁾タイプと，破壊点周りの線形化近似に基づくHasofer-Lind⁴⁾タイプに大別される．前者はFOSM法（First-Order Second-Moment method）あるいは2次モーメント法とも呼ばれ，後者はAFOSM法（Advanced First-Order Second-Moment method）とも呼ばれる．本研究では破壊点周辺の近似精度を高めたHasofer-Lindタイプの信頼性指標を用いる．このタイプの信頼性指標は，正規確率変数間に相関がない場合には式(5)によって定義される⁵⁾．式(5)における破壊点は一意的には定まらないため，収束計算によって算出される．

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial X_i} \bigg|_{X^*} \right) (\mu_{X_i} - X_i^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial X_i} \bigg|_{X^*} \right)^2 \sigma_{X_i}^2}} \quad (5)$$

(2) SORM(Second-Order Reliability Method)

前述したように，FORMでは性能関数を線形化近似することにより破壊確率を算出するため，性能関数の非線形性が強くなると解析精度が低下する恐れがある．この問題に対処するため，性能関数を二次まで近似してFORMの精度を向上させた手法がSORM(Second-Order Reliability Method)である（図-3参照）．基本的な解析方法はFORMに準じるが，破壊点の探索および破壊確率を求める際に，破壊曲面の曲率を算出する必要があるため，解析はFORMより複雑となる．SORMによる破壊確率，および信頼性指標は式(6)，式(7)より求められる⁶⁾．

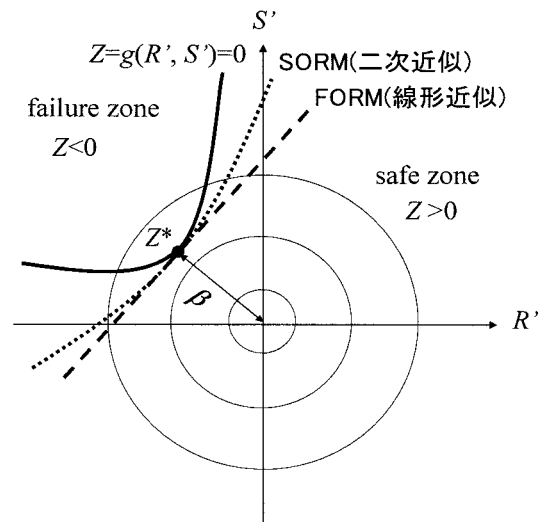


図-3 性能関数の近似

$$P_f = \Phi(-\beta_{\text{FORM}}) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \kappa_i \beta_{\text{FORM}})^{-1/2} \quad (6)$$

$$\beta_{\text{SORM}} = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (7)$$

ここに、 Φ ：標準正規確率分布関数、 β_{FORM} ：FORMによる信頼性指標、 β_{SORM} ：SORMによる信頼性指標、 κ_i ： i 番目の破壊曲面の主曲率

3. 検討方法

(1) 検討対象施設

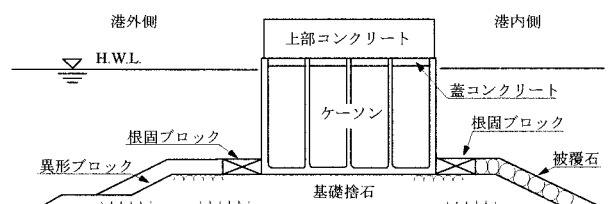
検討対象施設は、一般的な防波堤形式であるケーソン式混成堤、消波ブロック被覆堤とする（図-4）。検討ケースは、長尾⁷⁾によって全国広範囲より設計条件的に偏りがないように収集された76ケース（ケーソン式混成堤38ケース、消波ブロック被覆堤38ケース）とした。

(2) 性能関数

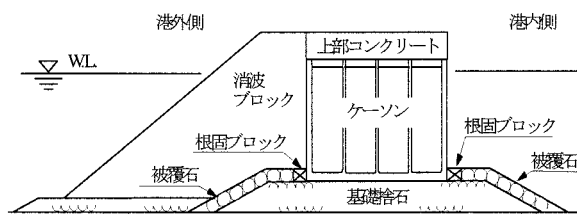
対象とする破壊モードは堤体の滑動（図-5）とし、性能関数は港湾の施設の技術上の基準⁸⁾に従い式(8)のように表される。

$$Z = f \left\{ \sum_i W_i - P_B - P_U \right\} - P_H \quad (8)$$

ここに、 f ：堤体底面と基礎との摩擦係数、 W_i ：堤体を構成する材料（鉄筋コンクリート、無筋コン



(a) ケーソン式混成堤



(b) 消波ブロック被覆堤

図-4 検討対象施設

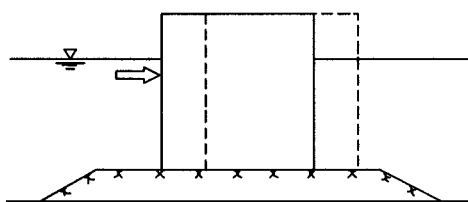


図-5 堤体の滑動

リート、中詰砂）の重量（kN/m）、 P_B ：堤体に作用する浮力（kN/m）、 P_U ：堤体に作用する揚圧力（kN/m）、 P_H ：堤体に作用する水平波力（kN/m）

なお、本研究では、既往の研究¹⁾により得られている、安全率を用いた設計法（許容滑動安全率1.2、許容転倒安全率1.2、許容支持力安全率1.0）による設計断面（検討76ケース）に対してFORM、SORM両手法を用いて信頼性指標を算出する。また、波力算定式の推定精度、およびその他の設計因子の従う確率分布は、既往の研究による表-1、表-2に示す値を用いる。

表-1 波力算定式推定精度⁹⁾

構造形式	B	V
ケーソン式混成堤	0.91	0.19
消波ブロック被覆堤	0.84	0.12

B ：平均値の偏り（平均値／特性値）

V ：変動係数（標準偏差／平均値）

表-2 他の設計因子の従う確率分布⁷⁾

	B	V
波力(P_H , P_U)		
沖波波高推定精度	1.00	0.10
波浪変形計算精度		
水深変化緩	0.97	0.04
水深変化急	1.06	0.08
砕波変形推定精度	0.87	0.10
潮位 (w_l)		
$r_{wl}=1.5$	1.00	0.20
$r_{wl}=2.0, 2.5$	1.00	0.40
摩擦係数 (f)	1.06	0.15
単位体積重量 (W_p , w')		
鉄筋コンクリート (W_{RC})	0.98	0.02
無筋コンクリート (W_{NC})	1.02	0.02
中詰砂 (W_{SAND})	1.02	0.04

※) 水深変化緩／急：海底勾配 1/30 未満／以上

※) r_{wl} ：既往最高潮位（H.H.W.L.）とさく望平均満潮位（H.W.L.）の比

4. 検討結果

FORM、SORM両手法による信頼性指標、破壊確率の全76ケースの平均値は、FORMによる信頼性指標 β_{FORM} が2.425、破壊確率 $P_{f\text{FORM}}$ が0.0107、SORMによる信頼性指標 β_{SORM} が2.409、破壊確率 $P_{f\text{SORM}}$ が0.0111となり、その差は信頼性指標で0.016、破壊確率で 0.4×10^{-3} と僅かであった。また、 β_{FORM} と β_{SORM} を目標値として得られた滑動破壊モードの部分係数の比較を表-3に示すが、消波ブロック被覆堤の水平波

力の部分係数で僅かに0.01差が生じた程度で、その他の設計因子に関しては同じ値となった。なお、表-3に示す部分係数は、既往の研究¹⁾による各設計因子の感度係数、変動係数、平均値の偏りを用いて式(9)により算出した。

表-3 部分係数の比較

構造形式		ケーソン式混成堤		消波ブロック被覆堤	
解析手法		FORM	SORM	FORM	SORM
γ 計算に用いる目標信頼性指標		2.425	2.409	2.425	2.409
		γ		γ	
滑動	摩擦係数	0.79	0.79	0.77	0.77
	水平波力 水深変化緩	1.04	1.04	0.91	0.91
	揚圧力 水深変化急	1.18	1.18	1.02	1.01
	潮位 $r_{wl}=1.5$	1.03	1.03	1.04	1.04
	$r_{wl}=2.0, 2.5$	1.06	1.06	1.08	1.08
	H.H.W.L	1.00	1.00	1.00	1.00
	自重 鉄筋コンクリート	0.98	0.98	0.98	0.98
	無筋コンクリート	1.02	1.02	1.02	1.02
	中詰砂	1.01	1.01	1.01	1.01

$$\gamma_X = (1 - \alpha_X \beta_T V_X) \mu / X_k \quad (9)$$

ここに、 α_X 、 V_X 、 μ_X ：それぞれ設計因子 X の感度係数、変動係数および平均値、 X_k ：設計因子 X の特性値、 β_T ：目標信頼性指標

ここで、 β_{FORM} と β_{SORM} との差を $\delta\beta$ ($\delta\beta = \beta_{\text{FORM}} - \beta_{\text{SORM}}$) と定義して、各ケースの $\delta\beta$ を図-6に示す。

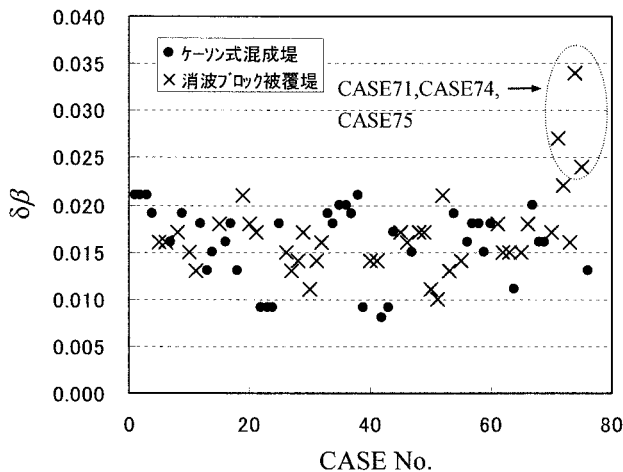


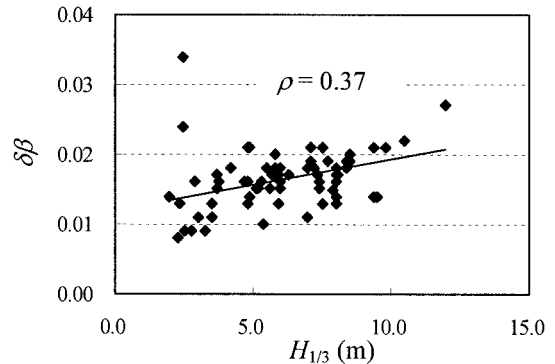
図-6 各ケースの $\delta\beta$

構造形式別に $\delta\beta$ の平均値、標準偏差を比較すると、ケーソン式混成堤の $\delta\beta$ の平均値は0.016、標準偏差は0.004、消波ブロック被覆堤の $\delta\beta$ の平均値は0.017、標準偏差は0.004であり、構造形式の違いによる差は僅かであった。

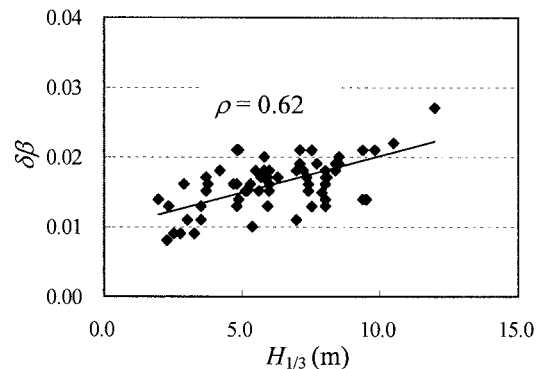
図中のCASE71、CASE74、CASE75は、 $\delta\beta$ が他のケースと比較して大きいケースであるが、これらのケースの特徴として、CASE71は最も設計波高 $H_{1/3}$ が大きいケースであること（76ケースの $H_{1/3}$ の平均値6.0mに対して、CASE71の $H_{1/3}$ は12.0m）、CASE74、CASE75は設計潮位 wl （H.W.L.）が高く（76ケースの wl の平均値1.48mに対して、CASE74、CASE75の

wl はともに4.05m）かつ設計にはH.H.W.L.ではなくH.W.L.を用いていることが挙げられる（設計にH.H.W.L.を用いる場合は潮位のばらつきは考慮しない¹⁾）。このことから、以下では $\delta\beta$ と、 $H_{1/3}$ 、 wl などの設計因子との相関性について議論する。

図-7(a)に、全76ケースについての $\delta\beta$ と $H_{1/3}$ との相関を示すが、あまり高い相関はみられない。しかし、 $H_{1/3}$ が小さく $\delta\beta$ が大きい2ケースは、前述の設計潮位が高い特異なケース（CASE74、CASE75）であるため、この2ケースを除いて再度相関をとると相関係数は0.62とやや高い正の相関がみられる（図-7(b)）。



(a) 全76ケース



(b) 特異ケースを除いた場合

図-7 $\delta\beta$ と設計有義波高 $H_{1/3}$ の相関

同様に、特異ケース（CASE74、CASE75）を除いた場合の、 $\delta\beta$ と揚圧力 P_U 、および $\delta\beta$ とフーチングを除いた堤体幅 BC との間にも、やや高い正の相関がみられる（図-8、図-9）。

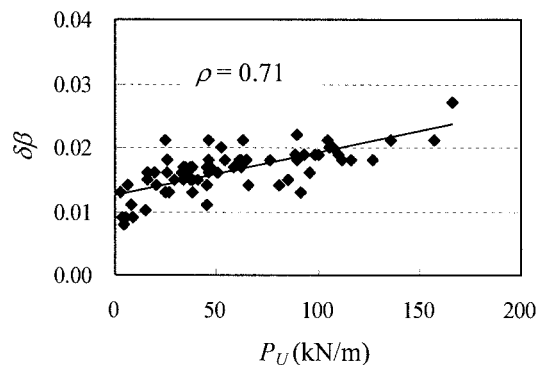


図-8 $\delta\beta$ と揚圧力 P_U の相関（特異ケース除く）

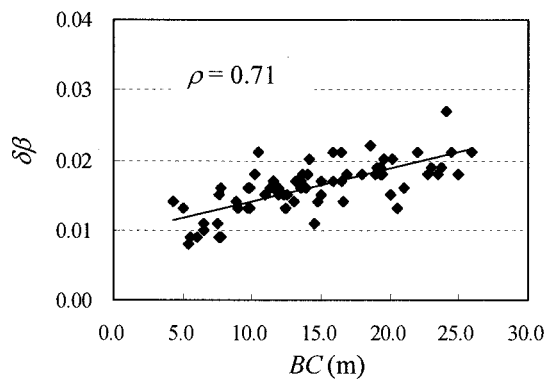


図-9 $\delta\beta$ とケーソン幅 BC の相関（特異ケース除く）

また、表-2に示すように設計潮位 wl の変動係数 V_{wl} は r_{wl} の値により異なるため、 wl に V_{wl} を乗じた $V_{wl} \cdot wl$ と $\delta\beta$ との相関を見たものが図-10である（設計にH.H.W.L.を用いるケースは除く）。 $\delta\beta$ と $V_{wl} \cdot wl$ には正の相関が見られるが、ばらつきが大きいことがわかる。

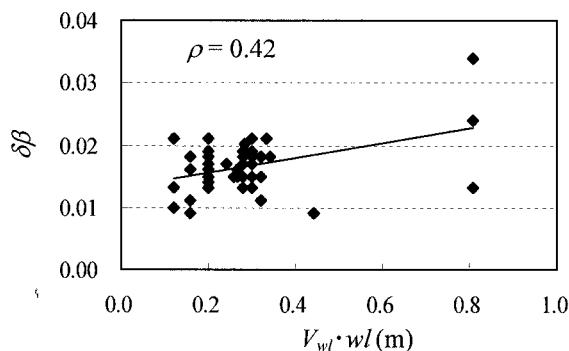


図-10 $\delta\beta$ と $V_{wl} \cdot wl$ の相関

次に、 $\delta\beta$ と性能関数（式(8)）の耐力項（ $\sum W_i - P_B - P_U$ ）の変動係数 V_R の相関（全76ケース）を図-11に示す。変動係数 V_R は式(10)により求められる。

$$V_R = \frac{\sqrt{\sum \sigma_{W_i}^2 + \sigma_{P_B}^2 + \sigma_{P_U}^2}}{\mu_{W_i} - \mu_{P_B} - \mu_{P_U}} \quad (10)$$

ここに、 σ ：標準偏差、 μ ：平均値

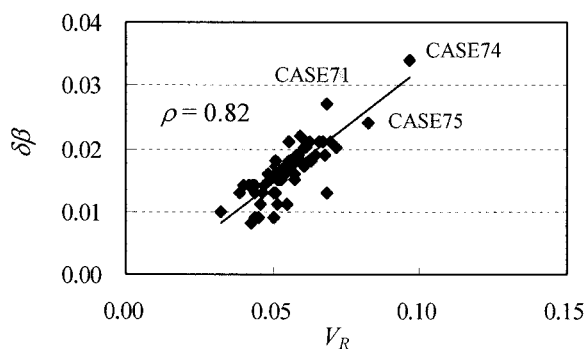


図-11 $\delta\beta$ と耐力の変動係数 V_R の相関

図-11より、 $\delta\beta$ と V_R には高い正の相関があり、図-6に示す $\delta\beta$ が大きい3ケース（CASE71, CASA74, CASE75）の V_R も大きな値となっていることがわかる。式(9)に示す様に、耐力項は摩擦係数 f との積で非線形項を形成するため、耐力項の変動係数 V_R が増加するに伴い、性能関数の非線形性が強くなる。性能関数の非線形性が強いほど、性能関数を破壊点で一次近似（直線近似）するFORMによる信頼性指標 β_{FORM} の精度は低下する。このことが要因となり $\delta\beta$ が増加しているものと考えられる。

図-12には V_R と $H_{1/3}$ 、図-13には V_R と P_U 、図-14には V_R と BC との相関を示す。なお、図-12～14のいずれも特異ケース（CASE74, CASE75）を除いている。また、図-15には V_R と $V_{wl} \cdot wl$ との相関を示す。図-12～15より、 V_R と $H_{1/3}$ との相関はあまり高くないが、 V_R と P_U 、 V_R と BC 、および V_R と $V_{wl} \cdot wl$ にはやや高い正

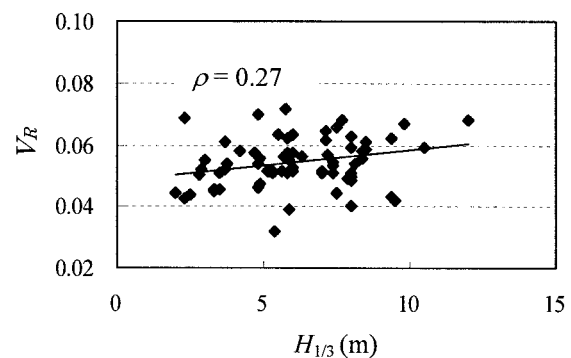


図-12 V_R と設計有義波高 $H_{1/3}$ の相関（特異ケース除く）

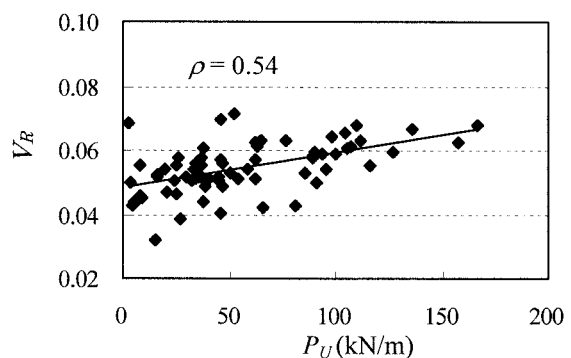


図-13 V_R と揚圧力 P_U の相関（特異ケース除く）

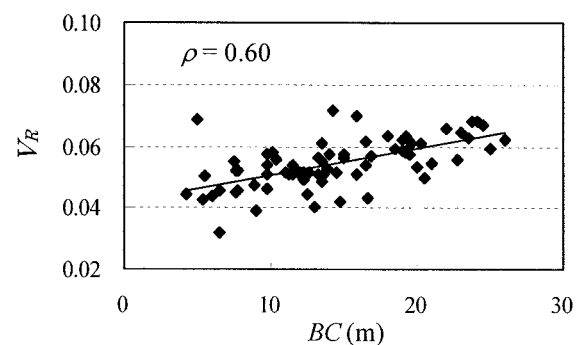


図-14 V_R とケーソン幅 BC の相関（特異ケース除く）

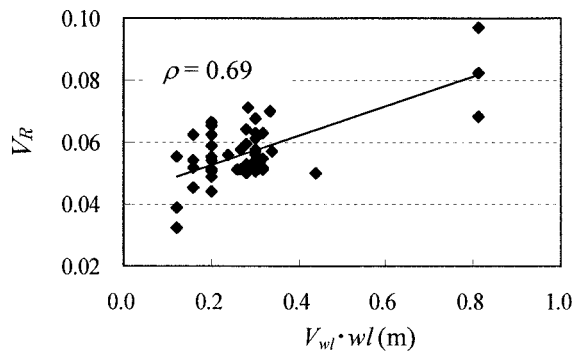


図-15 V_R と $V_{wl} \cdot wl$ の相関

の相関が見られる。ここで、 $H_{1/3}$ と P_U 、および $H_{1/3}$ と BC との相関をみると、相関係数はそれぞれ0.82, 0.79であり高い正の相関を示す。このことから、 $H_{1/3}$ が大きくなるケースは P_U , BC が増加し、これに伴い V_R も増加する傾向にあると考えられる。

以上の結果から、設計波高 $H_{1/3}$ が大きく、揚圧力 P_U 、堤体幅 BC が大きくなるケース、および設計潮位 wl が高く、かつ設計にH.H.W.L.ではなくH.W.L.を用いるケースは、耐力項の変動係数 V_R が増加する傾向にあるため、性能関数の非線形性が強くなり、結果として $\delta\beta$ が増加しているものと考えられる。

5. まとめ

ケーソン式混成堤と消波ブロック被覆堤の滑動破壊モードを対象とした場合、FORMによる信頼性指標 β_{FORM} と、SORMによる信頼性指標 β_{SORM} の差 $\delta\beta$ ($\delta\beta = \beta_{FORM} - \beta_{SORM}$) は、全ケース平均で0.016と僅かであった。これは、性能関数の耐力項 ($\sum Wi - P_B - P_U$) の変動係数 V_R が小さく、性能関数の非線形性があまり強くないためと考えられる。また、FORMとSORMにより得られた滑動破壊モードの部分係数の差も僅かであった。以上のことから、ケーソン式混成堤と消波ブロック被覆堤の滑動破壊モードを対

象とした場合、一般的な設計条件におけるFORMによる解析結果は十分な精度を有していることが確認された。

しかしながら、変動係数 V_R が大きくなるようなケース、すなわち設計潮位 (H.W.L.) が高く、かつ設計にH.H.W.L.ではなくH.W.L.を用いるケース、および大水深域のような設計波高が大きく、揚圧力、堤体幅が増加するケースにおいてはFORMの精度が低下する ($\delta\beta$ が増加する) 傾向が見られるため注意を要する。

参考文献

- 1) 吉岡健, 長尾 毅: 重力式防波堤の外的安定に関するレベル1信頼性設計法の提案, 国土技術政策総合研究所研究報告, No.20, 2005.
- 2) Rackwitz, R., and Fiessler, B.: Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences, Computers and Structures, Vol.9, pp.489-494, 1978.
- 3) Cornell, C. A.: A Probability-Based Structural code, Journal of the American Concrete Institute, Vol.66, No.12, pp.974-985, 1969.
- 4) Hasofer, A. M. and Lind, N. C.: Exact and Invariant Second moment Code Format, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.100, No.EM1, pp.111-121, 1974.
- 5) 星谷 勝, 石井 清: 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, pp.64-66, 1986.
- 6) Breitung, K.: Asymptotic Approximation for Multinormal Integrals, J. Engineering Mechanics, ASCE, 110(3), pp.357-366, 1984.
- 7) 長尾 毅: ケーソン式防波堤の外的安定に関する信頼性設計法の適用, 土木学会論文集, No.689, I -57, pp.173-182, 2001.
- 8) 運輸省港湾局監修: 港湾の施設の技術上の基準・同解説, (社)日本港湾協会, 1999.
- 9) Takayama, T. and N. Ikeda: Estimation of sliding failure probability of present breakwaters for probabilistic design, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol.31, No.5, pp.3-32, 1993.