

# 透水層を用いた任意反射境界処理法の高精度化 と遡上計算への適用

## IMPROVEMENT OF POROUS LAYER BOUNDARY ON BOUSSINESQ-TYPE WAVE TRANSFORMATION MODEL

平山克也<sup>1</sup>

Katsuya HIRAYAMA

<sup>1</sup>正会員 博(工) (独法) 港湾空港技術研究所 海洋・水工部 (〒236-0826 横須賀市長瀬3-1-1)

*PLB* (Porous Layer Boundary) method was proposed by Hirayama (2001) for a Boussinesq-type wave transformation model in order to calculate partial reflected waves on both breakwaters and revetments covered with armor blocks. The modeling of horizontal distribution of porosity in porous media is improved in this study.

The porosity of improved *PLB* is estimated by integrating vertical distribution of porosity from sea bottom to water surface, which consists of armor block layer and water layer. This modeling is similar to the definition proposed by Madsen et. al. (1997) or Kennedy et. al. (2000), therefore the newly proposed *PLB* method can also calculate moving shoreline as the porosity of armor block layer is very small. The calculated reflection coefficients at sea wall covered with armor blocks agree with the results of model experiment very much.

**Key Words :** Porous layer, partial reflection, wave runup, armor block, Boussinesq model

### 1. はじめに

波浪変形計算において消波構造物による波の反射率を正しく見積もることは、現況や将来の港内静穏度を適切に評価する上で極めて重要である。模型実験や現地観測等により設定すべき反射率が明らかな場合には、スポンジ層等による部分反射境界を用いて港内静穏度計算を実施することが可能である(例えば、喜岡ら<sup>1)</sup>、有川・磯部<sup>2)</sup>、平山・平石<sup>3)</sup>)。

一方、平山<sup>4)</sup>は、透水層内の波動場に適用可能な平面2次元のブシネスクモデルを用いて、消波工内の波浪減衰過程を再現することにより波の部分反射を客観的に算定できる任意反射境界処理法を提案した。また、平山・上原<sup>5)</sup>はこれを実港湾へ適用し、風波を対象とした模型実験結果をよく再現するとともに、長周期波に対しては異なる反射率を与えることを確認した。

また、西井ら<sup>6)</sup>は、消波工内の空隙率の空間分布をより正確に与えることにより、反射率の再現性を向上させることができることを示した。そこで本研究では、消波工の法面形状、および法面高さ水面高さとの相対関係を消波工内の空隙率の空間分布に反映させた、新たな透水層モデルの設定手法を提案する。

さらに、平山<sup>4)</sup>が導出した透水層内ブシネスク方程式を用いて、Madsenら<sup>7)</sup>やKennedyら<sup>8)</sup>が提案した斜面上

の遡上境界処理を実現可能なことを確認したので、合わせて報告する。

### 2. 透水層モデル(平山<sup>4)</sup>)の改良

#### (1) 透水層内空隙率の与え方

平山<sup>4)</sup>は、現地や実験水槽内でみられる消波材による波浪減衰過程を、空隙率などの工学的パラメータが考慮された透水層内の波浪変形現象として、水深積分型波動方程式を用いて物理的に捉えることにより、様々な波浪諸元を有する入射波に対して、相応の反射率や部分重複波形を客観的に再現する任意反射境界処理法を開発した。ここで、消波工の法面勾配は、式(1)に示すように、透水層の空隙率を水平方向に変化させることで表現している。便宜上、これをType2とする。なお、消波工天端や小段などの水平部や消波工法面と水面の交点より岸側部で、見かけ上、空隙率の変化がなくなる効果はこのモデルに組み込まれていない。一方、西井ら<sup>6)</sup>は、これらを表現したモデルを用いることにより、透水層モデルによる反射率の再現性がさらに向上することを示した。

$$\lambda = \lambda_0 + (1 - \lambda_0) \frac{x}{B} \quad (0 \leq x \leq B) \quad (1)$$

$B$  ; 消波工の設置幅  
 $\lambda_0$  ; 消波工内の空隙率

しかしながら、より複雑な法面形状を有する消波工や、平面2次元波浪場を取り扱う港湾設計の実務に対して、これまでの手法を用いて消波工形状を緻密に表現することは、多くの手間を要することが予想されあまり現実的ではない。また、水面変動に応じて消波工法面と水面との交点が変わることを表現することは、ほとんど不可能である。そこで本研究では、消波工の法面高さと空隙率の鉛直分布から、空隙率の空間分布を客観的に算定する手法を提案する。すなわち、各計算格子上で空隙率の鉛直分布； $\lambda_v(z)$  が与えられたとき、その計算格子の透水層内空隙率は次式で算定される。

$$\lambda = \frac{1}{\eta + h} \int_{-h}^{\eta} \lambda_v(z) \cdot F(k, z) dz \quad (2)$$

$\lambda_v(z)$  ; 空隙率の鉛直分布  
 $F(k, z)$  ; 鉛直依存性関数 ( $k$ は波数)

ここで、空隙率の鉛直分布は斜面を非常に密な透水層とみなして遡上境界処理を実現したMadsenら<sup>7)</sup>の研究を参考に、次式のように定義した。

$$-h \leq z < -h_p \text{ のとき } \lambda_v(z) = \lambda_0 + (1 - \lambda_0) \cdot e^{\frac{b(z - h_p)}{h}}$$

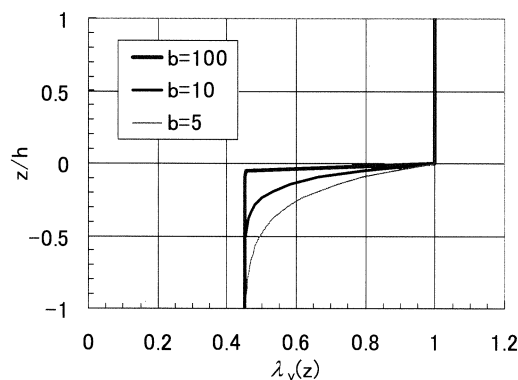


図-1 空隙率の鉛直分布

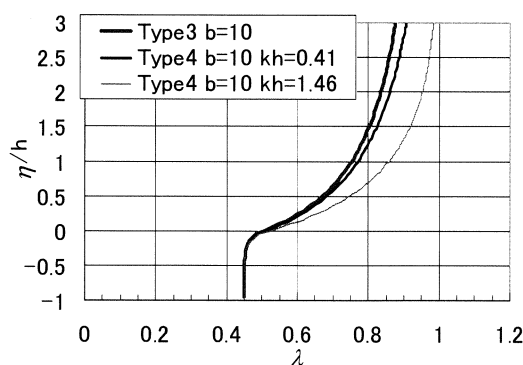


図-2 水面高さによる透水層内空隙率の変化

$$-h_p \leq z \text{ のとき } \lambda_v(z) = 1 \quad (3)$$

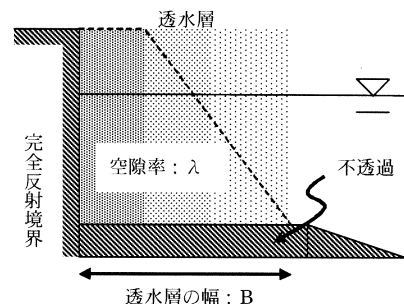
$b$  ; 空隙率の鉛直変化の強さを表す係数  
 $h_p$  ; 消波工法面位置の静水面からの深さ  
 $h$  ; 消波工法先の静水深

また、鉛直依存性関数は、水平流速の鉛直分布に応じて透水層内の空隙率に重み付けを行うために導入するものである。そこで、重み付けを行わない場合をType3 ( $F(k, z)=1$ )、行う場合をType4とし、鉛直依存性関数を次式のように定義した。なお、波浪減衰に関わる消波工の諸元は本来、消波工の構造のみに由来し、入射波諸元によって変化しない。したがってType4は、新たな透水層モデルの特性を評価するために便宜上設定するものとして理解されたい。

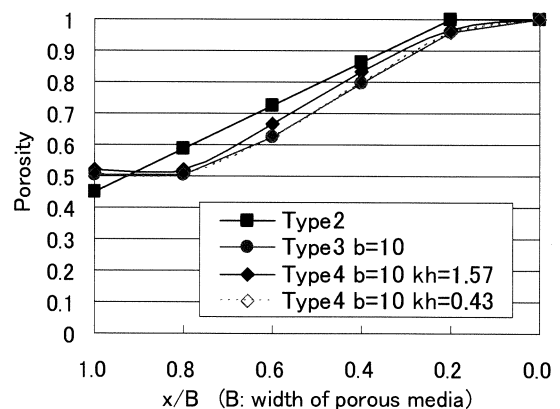
$$F(k, z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (4)$$

図-1は、消波工法面高さが静水面 ( $z=0$ ) のとき (汀線位置)、式(3)で設定される空隙率の鉛直分布を示したものである。 $b$ 値が大きいくほど、消波工法面近傍での空隙率の鉛直分布が急激に変化するよう設定されていることがわかる。ここで消波工内の空隙率は $\lambda_0=0.45$ とした。

図-2は、図-1で表される空隙率の鉛直分布のうち  $b=10$ とした場合に、式(2)で算定される透水層内の空隙



(a) 消波ブロック被覆堤に対する透水層のイメージ



(b) 透水層内空隙率の水平分布

図-3 設定される透水層内空隙率の違い

率が、水面高さによってどのように変化するかを示したものである。水面が消波工法面よりも低い場合には、透水層内の空隙率は $\lambda=0.45$ でほぼ一定である。しかし、水面が消波工よりも高くなると、空隙率は急速に1に近づくものの $\lambda=1$ にはならず、水没した消波工の効果によってある程度の抵抗が作用するような空隙率が設定されることがわかる。さらに、式(4)によって水平流速の鉛直依存性関数を導入したType4では、入射波が長波の条件に近い $kh=0.41$ のとき、重み付けを行わないType3とほぼ同様な空隙率が設定されるのに対し、浅海波の条件である $kh=1.46$ のときには、水没した消波工による波浪抵抗が小さくなるように、透水層内の空隙率が設定されることが確認できる。

## (2) 消波ブロック被覆堤による波反射の再現計算

図-3は、上方に示す消波ブロック被覆堤に対して透水層を設定した場合、Type2、Type3、Type4でそれぞれ設定される透水層内空隙率の水平分布を示したものである。ここで、 $b=10$ とした。対象断面では、消波工天端付近で水面高さに対する見かけ上の空隙率の水平分布が一定になることに対応して、Type3、Type4ではこれをうまく

表現できていることがわかる。逆にType2ではこれが表現されていない。

図-3で設定した透水層モデルを用いて、造波水路内での実験により得られた、消波ブロック被覆堤による波の反射率に関する再現計算の結果を図-4に示す。ここで、空隙率以外の透水層パラメータ（消波材の種類や積み方によって異なる定数： $\alpha_0$ （層流抵抗定数）、 $\beta_0$ （乱流抵抗定数）、消波材の代表粒径： $d$ ）は、実験に使用したテトラポッド乱積みの場合、それぞれ $\alpha_0=2100$ 、 $\beta_0=2.2$ 、 $d=4.56\text{cm}$ と設定された。また、入射波条件は、一様水深 $h=0.32\text{m}$ または $0.35\text{m}$ に対して、波高 $3\text{cm}$ 、 $8\text{cm}$ 、周期 $0.99\text{s}$ 、 $1.41\text{s}$ 、 $1.84\text{s}$ 、 $2.82\text{s}$ の規則波および不規則波とした。なお、これらは平山<sup>4)</sup>による実験条件とまったく同様である。ただし本稿では、一様水深 $h=0.32\text{m}$ のケースに対する検討は省略した。

水深 $h=0.35\text{m}$ のケースに対する反射率の再現計算の結果、いずれの場合もType2の透水層モデルを用いた計算では、実験値に比べ $0.1\sim 0.2$ 程度、反射率が過大に見積もられていたことがわかる。これに対しType3およびType4では、計算値は実験値を非常によく再現していることがわかる。またType4では、周期が短い（ $kh$ が大きい

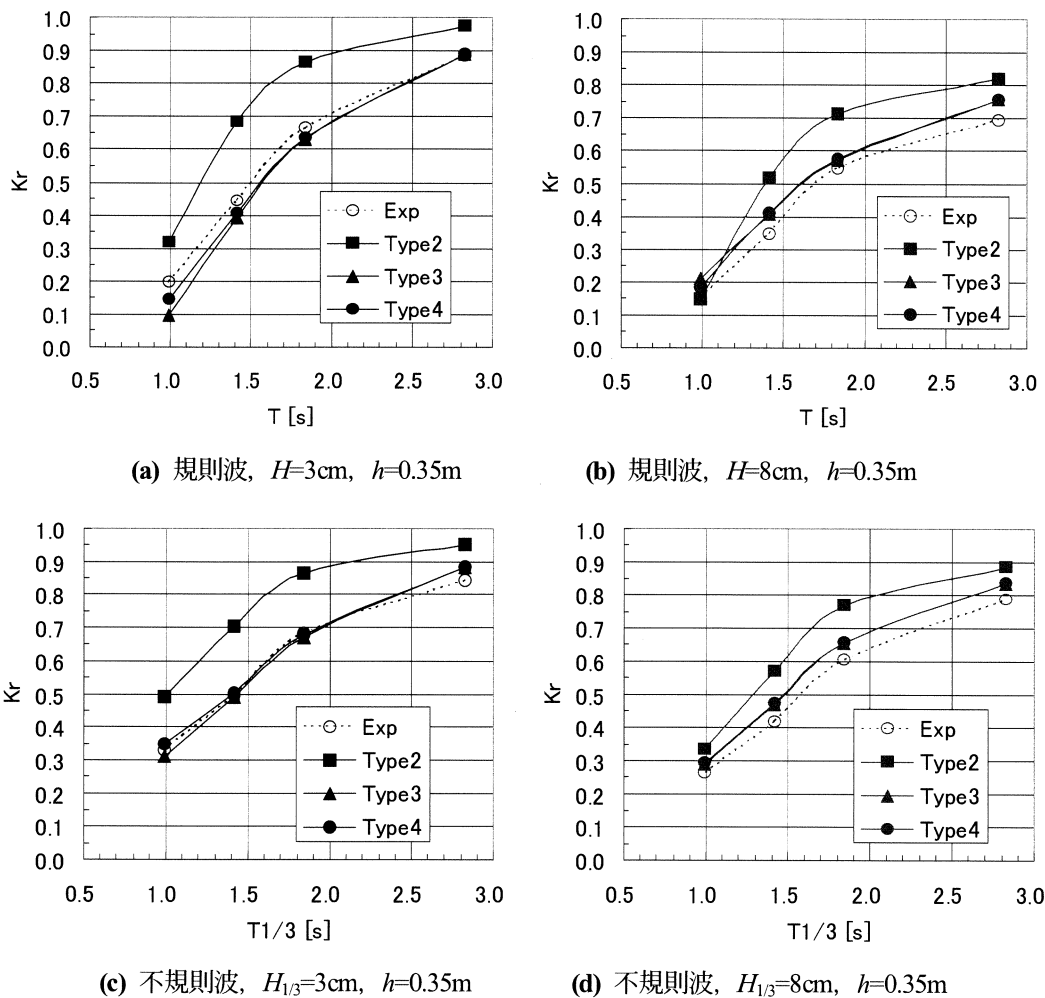


図-4 透水層モデルによる反射率の再現精度

い) 場合のみ, Type3に比べ実験値により近い反射率が算定された. これらのことから, 本研究で提案する新たな透水層内空隙率の設定法は, これまでの手法による反射率の再現精度をさらに向上できることが確認された. なお, 平山<sup>4)</sup>が導出した透水層内のブシネスク方程式のうち, 透水層による層流抵抗項は, 緩勾配近似を導入してさらに式(5)のように展開できる. 本研究では, 層流抵抗項としてこれを1次元化したものを用いた. ここで,  $\alpha$ は透水層による層流抵抗係数,  $P$ ,  $Q$ はそれぞれ $x$ ,  $y$ 方向の流量flux,  $B$ は分散特性の補正係数である. また,  $\mu$ と後述する $\epsilon$ はともにブシネスク方程式の誘導時に使用した摂動パラメータであり, 差分計算時には省略される.

$$\begin{aligned} x\text{方向} & \alpha \left[ P - \mu^2 \left\{ \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right) + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} \right] \\ y\text{方向} & \alpha \left[ Q - \mu^2 \left\{ \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. 斜面上の遡上境界処理への適用

Madsenら<sup>7)</sup>は, ブシネスク方程式を用いて斜面上の波の遡上を安定に計算するために, 次のような手法を提案した. すなわち, 基準面より上方の斜面を非常に密な透水層とみなし, 斜面より上の空隙率を1, 斜面より下の空隙率を非常に小さく設定することにより, 汀線付近の計算格子でも有意な水深を確保できるよう工夫した. これに改良を加えたKennedyら<sup>8)</sup>の研究では, 有意な水深を確保するために斜面下に設ける仮想水深部分を"Porous"ではなく"Slot"と表記したうえで, 斜面の高さ(言い換えるとSlot開口部の高さ)を固定せず, 設定したSlot幅やSlot開口部の曲率に応じて最大遡上高を再現するための最適な高さを算定するように工夫されている. なお, 赤川ら<sup>9)</sup>は, ブシネスクモデルによる航走波の波浪変形計算に対してこのモデルを適用し, 波の遡上変形が概ね再現できることを確認している.

これらの研究では, 遡上境界を設定するために仮想的に設けた透水層やSlot上で, 鉛直方向に空隙率や水路幅が変化することを表現するために, それぞれ新たな基礎方程式を提案している. このうち, Kennedyら<sup>8)</sup>は代表流速表示のブシネスク方程式をもとにしているのに対し, Madsenら<sup>7)</sup>は, 本研究で用いている基礎方程式と同じく水深積分型のブシネスク方程式をもとにしている.

ところで, 平山<sup>4)</sup>は透水層内で成り立つブシネスク方程式を新たに誘導し, さらに本研究では, ある空隙率を

有する消波工の法面位置をパラメータとして, 空隙率の鉛直分布から透水層内空隙率を設定する手法を提案した. ここで, 消波工の空隙率として非常に小さい値を設定すると, Madsenら<sup>7)</sup>による研究と同様な方法により, 波の遡上境界が簡単に設定できるものと考えられる. そこで, ここではまず平山<sup>4)</sup>が導出した透水層内のブシネスク方程式が, Madsenら<sup>7)</sup>が提案した遡上境界処理を行うための基礎方程式を含むことを示す. そして, Madsenら<sup>7)</sup>の研究を改良したKennedyら<sup>8)</sup>の研究にならって, 斜面位置を固定せずに空隙率の鉛直分布を設定し, これから得られる透水層内空隙率を用いて波の遡上計算を行い, その再現精度を検証する.

#### (1) Madsenら<sup>7)</sup>による基礎式の誘導

波の遡上計算に透水層モデルを適用する際には, 消波工による波の部分反射問題と異なり, 透水層内の波浪変形は問題にしないので, 平山<sup>4)</sup>が導出した運動方程式中の透水層による抵抗係数 $\alpha$ ,  $\beta$ (乱流抵抗係数)はそれぞれゼロとしてよい. この両辺に $\lambda$ を掛けて整理し, 移流項をまとめるとともに, 連続式中の $\lambda$ を空隙率の鉛直分布を表す $\lambda_v$ に置き換えると, それぞれ次式が得られる.

$$\text{連続式} \quad \lambda_v \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

運動方程式

$$\begin{aligned} x\text{方向} & \frac{\partial P}{\partial t} + g \lambda D \frac{\partial \eta}{\partial x} + \epsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P^2}{\lambda D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{PQ}{\lambda D} \right) \right\} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} y\text{方向} & \frac{\partial Q}{\partial t} + g \lambda D \frac{\partial \eta}{\partial y} + \epsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{PQ}{\lambda D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Q^2}{\lambda D} \right) \right\} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

最後に,  $\lambda D = A$ (有効水深)とおき,  $\epsilon$ を省略すると, これらはMadsenら<sup>7)</sup>による式に一致する.

なお, ここでの記述は省略したが, 分散項のうち水面変動 $\eta$ の空間微分項に乘じられた静水深 $h$ の二乗は,  $h^2$ から $hA$ へ置き換わることに注意されたい.

#### (2) 透水層モデルによる波の遡上計算

透水層を用いた遡上境界処理法の基本的な性能を検証するために, 本研究ではMadsenら<sup>7)</sup>にならい, 1/25勾配の一樣斜面上で計算された非碎波の波の水面波形を, 非線形長波理論に基づくCarrier・Greenspan<sup>10)</sup>による理論値と比較する.

斜面部分を透水層とみなすと, その計算格子上での空

隙率の鉛直分布は、前述の式(3)で表されることにほかならない。すると、そこで設定される有効水深 $A$ は、式(2)を用いて次式で表される。

$$A = \lambda D = \int_{-h}^{\eta} \lambda_v(z) dz \quad (9)$$

ただし、 $D=\eta+h$ である。また、 $F(k,z)=1$ とした。

さらに今回は、透水層内の空隙率が極めて小さく、また、斜面付近で空隙率の鉛直分布が急激に変化するという特徴を有している。これらを考慮すると、最大遡上高を再現するための最適な斜面高さ $h_p^*$ および有効水深 $A$ が、Kennedyら<sup>8)</sup>にならい、それぞれ次式で与えられる。

$$h_p^* = \frac{-h_p}{1-\lambda_0} + h \left( \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} + \frac{1}{\beta} \right) \quad (10)$$

$-h \leq z < -h_p^*$  のとき

$$A = (\eta + h) + \frac{(1-\lambda_0)h}{\beta} e^{\beta(\eta-h_p^*/h)} \left( 1 - e^{-\beta(1+h_p^*/h)} \right)$$

$-h_p^* \leq z$  のとき

$$A = (\eta - h_p^*) + \lambda_0(h_p^* + h) + \frac{(1-\lambda_0)h}{\beta} \left( 1 - e^{-\beta(1+h_p^*/h)} \right) \quad (11)$$

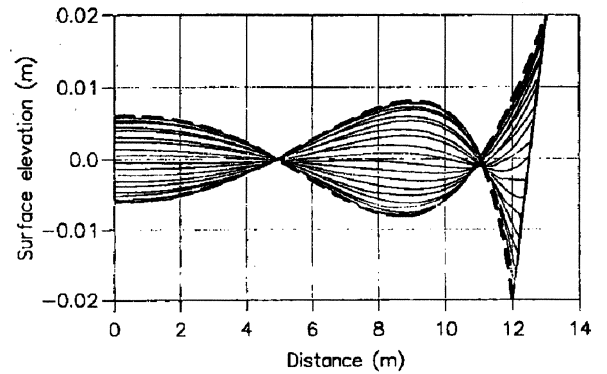
入射波高0.006m、周期10sとし、式(6)~(8)および式(11)で表される基礎方程式の分散項をすべて取り除いた、非線形長波モデルによる波の遡上計算を実施した結果を図-5に示す。ここで、計算格子幅は $\Delta x=0.05\text{m}$ 、差分時間は $\Delta t=0.05\text{s}$ とし、透水層パラメータは $\lambda_0=0.005$ 、 $b=80$ とした。また図には合わせて、(a)Madsenら<sup>7)</sup>が行った $\lambda=0.001$ 、 $b=100$ とした透水層モデルによる計算結果をCarrier・Greenspan<sup>10)</sup>による理論値と比較した結果を転載して示すとともに、(b)越流フラックスを導入して提案された平山・平石<sup>11)</sup>による遡上境界処理法による計算結果を示す。

本研究による計算の結果得られた最大遡上高は、理論値に比べ10%程度小さいものの、水面波形や斜面沖側での重複波の出現状況などは、Madsenら<sup>7)</sup>による計算結果に非常によく似ている。このことから、平山<sup>4)</sup>が導出した透水層内ブシネスク方程式に対し、式(9)あるいは式(11)で表される有効水深の考え方を導入して、斜面地形を表す非常に密な透水層内の空隙率を算定することにより、本来は任意反射境界処理を目的とした先述の改良透水層モデルをほぼそのまま用いて、斜面上の遡上境界処理を実現できることが確認された。

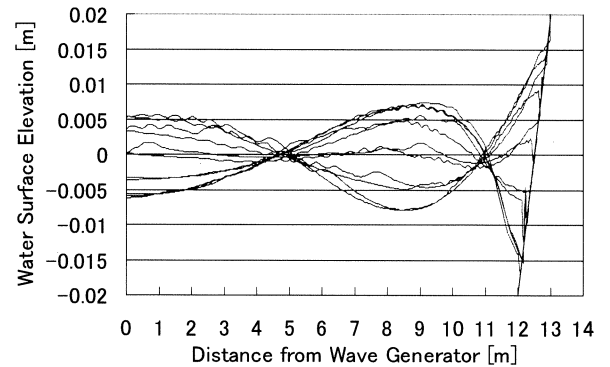
一方、平山・平石<sup>11)</sup>による計算では水面波形にやや乱れが生じているものの、理論値やMadsenら<sup>7)</sup>による

計算結果、および本研究による計算結果とよく似た重複波形が得られていることが確認できる。したがって、透水層モデルを遡上境界に適用することと、平山・平石<sup>11)</sup>による遡上境界処理法は、ほぼ同等な性能を有していると考えられる。特に、遡上境界からの反射波を計算対象とする場合や、水域の干上がりによる演算の発散を防ぐ目的で遡上境界処理を行う場合などは、いずれか扱い易いほうを用いれば十分だと思われる。

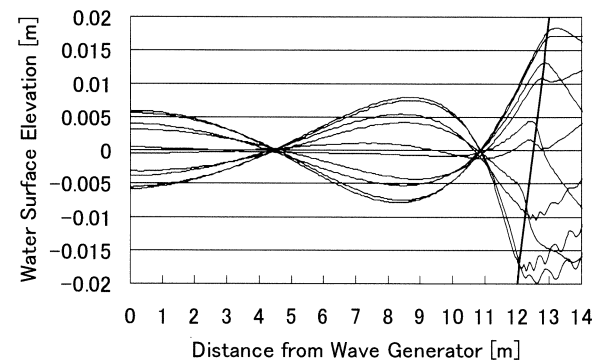
ただし、図-6で確認されるように、理論上得られる汀線の水平移動の履歴に対し、両計算手法で得られる結果



(a) Madsenら<sup>7)</sup> Fig.6を転載 (点線; Carrier and Greenspan<sup>10)</sup>, 実線;  $\lambda=0.001$ ,  $b=100$ )



(b) 平山・平石<sup>11)</sup>による計算結果



(c) 本研究による計算結果 ( $\lambda=0.005$ ,  $b=80$ )

図-5 斜面を遡上する波の水面波形

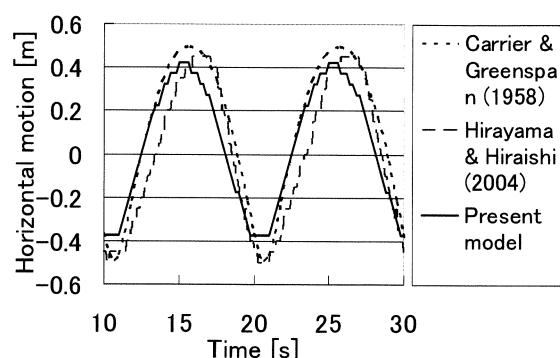


図-6 斜面上汀線の水平移動

にはそれぞれ違いが認められる。すなわち、透水層モデルを遡上境界に適用した場合には、その変動の振幅が小さく、遡上してもすぐに波が引くのに対し、越流フラックスを用いる平山・平石<sup>11)</sup>の方法では、遡上し始める時刻が遅れるものの、汀線の水平遡上距離はほぼ理論値を再現できている。これらの違いは、それぞれの遡上モデルにおける構造上の違いによって説明することができる。つまり、前者では、水域と遡上域を隔てることなく滑らかに波の遡上計算できる代わりに、遡上水塊の一部は、実際には不透過の斜面下へ漏れてしまい、最大遡上高や最大遡上距離を小さく見積もってしまうと考えられる。一方、後者では、越流フラックスの流入によって陸域にある微小な水深が生じ、陸域が水域へと変化するまでの間に若干のタイムラグがあるために、その分、遡上を開始する時刻が遅れが生じてしまう。しかし、逆に水塊が流下して水域から陸域へ変化する場合は非常に滑らかに行われるので、汀線の沖への移動はスムーズである。したがって、遡上水塊の挙動や汀線変化の履歴を計算対象とする場合には、これらのモデル特性の違いをよく考慮しておく必要がある。

#### 4. おわりに

本研究では、平山<sup>4)</sup>による透水層を用いた任意反射境界処理法に注目して、計算精度をさらに向上させる手法を提案するとともに、その応用として、透水層を用いた遡上境界処理への適用性を検証した。

模型実験に対して実施した再現計算では、反射率を0.1~0.2程度大きめに算定した従来の透水層モデルに比べ、新たな透水層モデルは、波高や周期が異なる入射波に対する反射率の変化を非常によく再現できることが明らかとなった。なお、従来モデルでは透水層による層流抵抗項の展開の程度が不十分であったので、新たなモデルでは緩勾配近似を用い、分散項と同程度まで展開を進めたものを使用した。

さらに、本研究で提案した新たな透水層モデルは、消

波工内の空隙率を極端に小さく設定することにより、消波工法面を斜面とみなした波の遡上計算にも適用できることを示した。また本手法は、越流フラックスを用いた平山・平石<sup>11)</sup>による遡上計算法とほぼ同等な計算結果を与えることを確認した。

**謝辞：**本研究の発端は「平成16年度ビジネスモデルによる波浪変形計算に関する勉強会」（平成17年2月、主催：（独）港湾空港技術研究所海洋・水工部波浪研究室）での話題提供、ならびに活発な議論によるところが大きい。この場をお借りして関係諸氏に謝意を表します。

#### 参考文献

- 1)喜岡渉・柏原謙爾・相川久紀・田中正博：多方向不規則波による港内副振動の予測モデルとその適用性，海岸工学論文集，第43巻，pp.196-200，1996。
- 2)有川太郎・磯部雅彦：非線形緩勾配方程式を用いた任意反射率を持つ構造物周辺の入・反射波浪共存場の解析，海岸工学論文集，第46巻，pp.56-60，1999。
- 3)平山克也・平石哲也：ビジネスモデルにおける目標反射率の設定法とその港内波高分布計算に対する適用性，海岸工学論文集，第49巻，pp.676-680，2002。
- 4)平山克也：ビジネスモデルにおける透水層内の波浪減衰を考慮した任意反射境界処理法の開発，海岸工学論文集，第48巻，pp.26-30，2001。
- 5)平山克也・上原 功：消波構造物に作用する波浪の消波機構を考慮した港内波浪変形計算，海岸工学論文集，第49巻，pp.671-675，2002。
- 6)西井康浩・山崎耕嗣・吉田明德・山城賢・青木聡・吉田秀樹：任意反射境界処理法を用いたビジネスモデルの反射波卓越海域への適用，海洋開発論文集，第21巻，pp.265-270，2005。
- 7)Madsen, P.A., O.R. Sørensen and H.A. Schäffer : Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part II. Surf beat and swash oscillations for wave groups and irregular waves, *Coastal Eng.*, 32, pp.289-319, 1997.
- 8)Kennedy, A.B., Q., Chen, J.T., Kirby and R.A., Dalrymple: Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. I: 1D, *J. Waterway, Port, Coast., and Oc. Engrg.*, Vol.126, No.1, ASCE, pp.48-56, 2000.
- 9)赤川嘉幸・Dam Khanh Toan・Nguyen Ba Thuy・Vu Hai Dang・谷本勝利：航走波の碎波を考慮した数値計算と最大波高算定法，海講論文集，第52巻，pp.036-040，2005。
- 10)Carrier, G.F. and H.P., Greenspan(1958): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech.* 4, pp.97-109.
- 11)平山克也・平石哲也：ビジネスモデルによる碎波・遡上計算法とその適用性，海講論文集，第51巻，pp.11-15，2004。