

離島等の急峻地形における波浪変形計算への 多層波動方程式の適用性について

ON THE APPLICABILITY OF MULTI-LEVEL WAVE MODEL FOR WAVE DEFORMATION ANALYSIS ON STEEP BATHYMETRY

金山 進¹

Susumu KANAYAMA

¹正会員 博(工) 五洋建設(株) 技術研究所 (〒329-2746 栃木県那須塩原市四区町1534-1)

The multi-level model for nonlinear dispersive waves, in which vertical profile of horizontal velocity is assumed to be a chain of quadratic portions, was modified to obtain applicability to wave analysis on step-like bathymetry. A change in vertical dividing method brought about satisfactory result, in which the depth of vertical dividing interfaces was changed to have no horizontal distribution. The applicability of the modified model was examined by reproduction of experimental result for wave deformation on submerged dike.

Key Words : Step-like bathymetry, multi-level wave model, linear dispersion relation, submerged dike

1. はじめに

遠方小規模離島等の利用は、排他的経済水域の問題ともあいまって、今後のわが国の海洋開発において重要な課題となることが予想される。これらは多くの場合、大水深の海域に急峻に立ち上がるとともに珊瑚礁に囲まれたステップ状の地形となっており、その波浪変形は3次元的な散乱問題としてとらえられるべき複雑な現象である。さらには、これらの碎波、地形によるトラップなどの影響を受ける複雑なサーフビートやこれに伴う複雑な流れを把握することは、小規模離島における構造物の設置、様々な調査活動を計画する上で非常に重要な課題である。この問題への取り組みには、大水深からリーフ上までの広い範囲の相対水深を取り扱える非線形の波浪解析モデルが必要とされる。3次元の非静水圧モデルの適用も選択肢の一つであると考えられるが、計算所要時間などの実用的観点からは非線形強分散性の平面波浪モデル（例えば、灘岡・中川¹⁾、喜岡・柏原²⁾、磯部³⁾、後野⁴⁾、金山ら⁵⁾、中島ら⁶⁾など）の適用が望ましいと考える。

本研究は、この問題に対する取り組みの第一段階として、金山ら⁷⁾の多層波動方程式に変更を加え、こういった急峻海底地形における複雑な波浪変形の解析への適用性を検討したものである。この多層波動方程式は、鉛直方向に分解能を有するという性質

上、急峻な海底地形における波浪場への潜在的な適応性は高いことが予想されるが、これまでの報告では、水深を一定の比率で分割するタイプのものではなかった。また、各層の厚さが空間的に変化することを許した場合、海底勾配に由来する煩雑な係数が多大な計算容量を占めるため大領域の計算には不利であった。さらに、導出された非線形項の全てを忠実に取り込んだ場合、計算を安定に行うためには収束計算が必要となるため、この点でも実務レベルでの活用が困難な状態であった。

今回の主な変更点は、全ての層の厚さが空間的に変化する場合の層分割方法形式に対して、水深が浅い場所では層数が少なくなる本来のレベルモデルの形式に変更することにより海底勾配に由来する煩雑な係数を取り除くとともにステップ地形への適用性を向上した点と、元の方程式に含まれる非線形項の一部を無視することにより繰り返しアルゴリズムを遂行することなく安定に計算を行えるようにして実用的な観点からの利便性を向上したことの2点である。ただし、後者については、現段階では論理性を欠く部分が多く、既往の実験結果との比較によってある程度の妥当性は確認してはいるものの、今回の変更によって非線形性に関する精度がどの程度低下したかの理論的解析、適用条件の明確化は今後の課題として残されている。

2. 基礎方程式

今回の変更の内容を明瞭にするため、まず、金山ら⁷⁾の多層波動方程式について詳述する。

図-1は、本研究における多層波動方程式の模式図であり、水位 η 、静水深 h に加えて、これを N 個に分割（静水面直下を第1層、最下層を第 N 層とする）して設定される各層の層厚 $\{d_n\}$ 、層下端までの深さ $\{h_n\}$ 、層毎の鉛直平均水平流速ベクトル $\{\mathbf{u}_n\}$ および海底流速 $\mathbf{u}_b$ を用いて基礎方程式を記述する。

(1) 流速鉛直分布の表示

鉛直流速 $w(z)$ は層毎に傾きを変える線形の鉛直分布を有するものと仮定し、連続の条件を用いて式(1)のように表す。

$$w(z) = - \sum_{i=n+1}^N d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i - (h_n + z) \nabla \cdot \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_b \cdot \nabla h \quad (1)$$

ここで、深度 z は第 n 層に属するものとし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平方向の微分演算子である。

水平流速 $\mathbf{u}(z)$ は式(1)を用いて渦無しの条件を鉛直上向きに積分し、層平均流速が $\{\mathbf{u}_n\}$ となるように積分定数を決定して以下のように表示される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z) = & \mathbf{u}_n + \frac{1}{6}(d_n^2 - 3(h_n + z)^2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_n) \\ & + \frac{1}{2}(d_n - 2(h_n + z)) \left[\sum_{i=n+1}^N \nabla(d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) \right. \\ & \left. + \nabla h_n \nabla \cdot \mathbf{u}_n + \nabla(\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

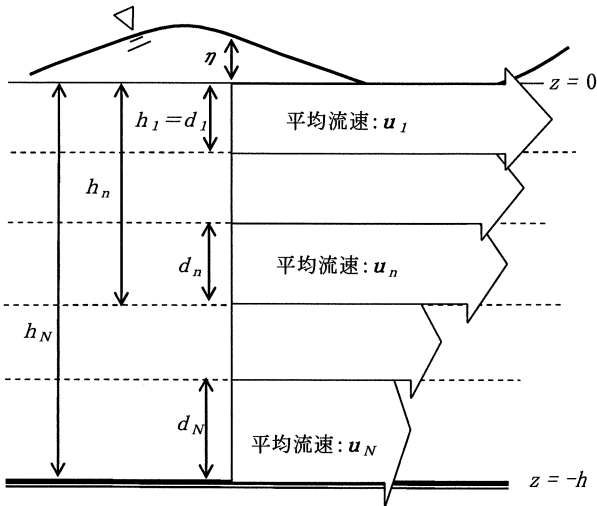


図-1 多層モデルの諸量

また、自由水表面での水平流速 $\mathbf{u}_s$ および鉛直流速 w_s は、式(1)および式(2)において $z = \eta$ とすることにより、それぞれ式(3)および式(4)で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s = & \mathbf{u}_1 + \frac{1}{6} d_1^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) - \frac{1}{2} \eta^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) \\ & - \left(\frac{1}{2} d_1 + \eta \right) \left[\sum_{i=2}^N \nabla(d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla(\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$w_s = - \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i - \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_b \cdot \nabla h \quad (4)$$

海底流速 $\mathbf{u}_b$ は式(1)において、 $n = N$ 、 $z = -h$ として以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b = & \mathbf{u}_N + \frac{1}{6} d_N^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_N) \\ & + \frac{1}{2} d_N \left[\nabla(\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) + \nabla h \nabla \cdot \mathbf{u}_N \right] \quad (5) \end{aligned}$$

(2) 連続式

上記の流速表示で鉛直方向に積分された連続式(6)を書き換え、多層モデルの連続式(7)を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} dz = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla(d_i \mathbf{u}_i) + \nabla(\eta \mathbf{u}_1) \\ & - \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \eta (d_1 + \eta) \left\{ \sum_{i=1}^N \nabla(d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla(\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right\} \right] \\ & + \frac{1}{6} \nabla \cdot [\eta (d_1^2 - \eta^2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1)] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

(3) 運動方程式

渦無しの条件を用いて鉛直方向のオイラーの式を任意水深 z から自由水表面 η まで積分すると圧力 $p(z)$ は式(8)で与えられる。

$$\begin{aligned} & \frac{p(z)}{\rho} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}(z) \cdot \mathbf{u}(z) + w(z)^2) \\ & = \int_z^{\eta} \rho \frac{\partial w}{\partial t} dz' + g(\eta - z) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) \quad (8) \end{aligned}$$

これを用いてオイラーの水平方向の運動方程式は以下のように書き換えることができる。

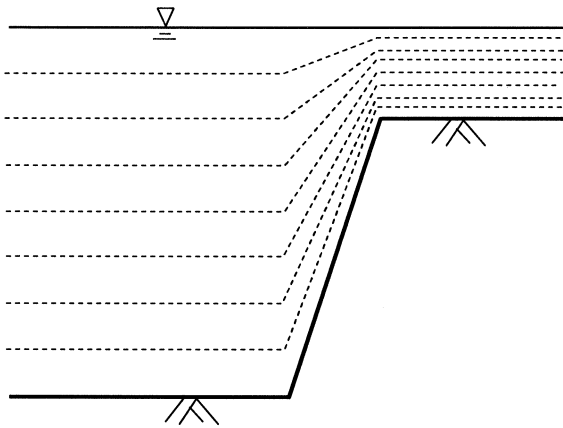
$$\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) + g \nabla \eta = - \int_z^{\eta} \rho \frac{\partial w}{\partial t} dz' \quad (9)$$

式(1)～式(5)を用いて式(9)を表示して層毎に鉛直平均を行うことにより、各層の水平方向の運動方程式(10)を得る。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) + g \nabla \eta \\
&= \nabla \left[\eta \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\eta^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}) \right. \\
&+ \eta \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \left. \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^N \nabla (d_i d_j \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \nabla (d_1^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}) \\
&+ \sum_{i=n+1}^N \frac{1}{2} d_n \nabla (d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}) \\
&- \sum_{i=n+1}^N (\nabla h_{n-1}) d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{2} \nabla (d_n^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}) - \frac{1}{6} d_n \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}) \\
&- \frac{1}{2} d_n \nabla h_n \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \nabla (d_i \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h) \\
&+ \frac{1}{2} d_n \nabla (\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h) - \nabla h_{n-1} (\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h)
\end{aligned} \quad (10)$$

(4) 層分割方法の変更と方程式の簡略化

以上が今回対象とする多層波動方程式であるが、随所に煩雑な分散項と非線形項を含んでいる。特に運動方程式の右辺にみられる各層厚を含む分散項は、各層の厚さが空間的に変化することを許した場合には、数値計算においてこれらを陰的に解く際の代数方程式の形成に煩雑な手順を要求する。また、これらの係数に空間座標を与えて記憶させた場合には多くの記憶容量が必要となる。



(1) これまでの層分割

そこで、今回は図-2に示すように層分割の方法を変更した。すなわち、これまでのモデルでは、各地点の水深を一定の比率で分割した多層モデルの形式を採っていたのに対して、今回は水深が浅い場所では層数が少なくなる本来のレベルモデルの形式に変更した。これによって計算点の層厚のうち空間的な変化が許されるのは最下層の層厚 d_N のみとなる。

したがって、基礎方程式における層厚の空間勾配に由来する項を全て無視することによって失われる精度は、これまでのモデルに比較して小さいものと考えられる。すなわち、海底勾配の効果を層数の変化として捉えるため、海底勾配の項を無視しても大きく精度を損なうことがないと考えられる。

また、ここでは精度の低下をある程度許しながらも計算が安定して行えるモデルの提案を目的の一つとしており、連続式(7)の左辺第3項以降および運動方程式(10)の右辺の全ての移流項を省略するとともに、運動方程式の左辺の移流の表示において自由水表面での水平流速 $\mathbf{u}_s$ に替えて静水面直下の第1層の層平均水平流速 $\mathbf{u}_1$ 、自由水表面での鉛直流速 w_s に替えて静水面における鉛直流速 w_1 を用いるという簡略化を行う。静水面における鉛直流速 w_1 は以下のように与えられる。

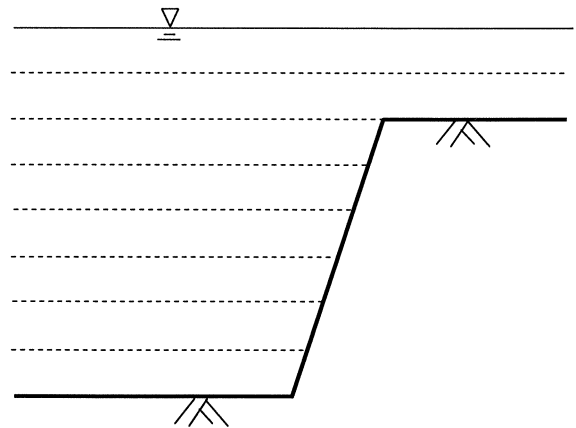
$$w_1 = - \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i \quad (11)$$

以上の簡略化の下で改めて、基礎方程式を表示すると連続式は式(12)となる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla (d_i \mathbf{u}_i) + \nabla (\eta \mathbf{u}_1) = 0 \quad (12)$$

運動方程式は式(13)のように簡潔に表示される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) + g \nabla \eta \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_{n,i} \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t})
\end{aligned} \quad (13)$$



(2) 今回の層分割

図-2 層分割方法の変更

ここで係数 $\alpha_{n,i}$ は第 n 層の水平流速に対する第 i 層の水平流速の寄与を表す係数であり、式(14)のように4つの部分に分けると表示が容易である。

$$\alpha_{n,i} = \alpha 1_{n,i} + \alpha 2_{n,i} + \alpha 3_{n,i} + \alpha 4_{n,i} \quad (14)$$

$$\alpha 1_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ \sum_{m=1}^{n-1} d_m d_i & (n \geq 2, i \geq n) \\ \sum_{m=1}^{i-1} d_m d_i & (n \geq 2, i \leq n-1) \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha 2_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ \frac{1}{2} d_i^2 & (n \geq 2, i \leq n-2) \end{cases} \quad (16)$$

$$\alpha 3_{n,i} = \begin{cases} \frac{1}{2} d_n d_i & (n \leq i-1) \\ 0 & (n \geq i) \end{cases} \quad (17)$$

$$\alpha 4_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \neq i) \\ \frac{1}{3} d_i^2 & (n = i) \end{cases} \quad (18)$$

元の多層波動方程式は水平床における線形分散関係および2次の非線形干渉特性が層分割数の増加とともに理論値に漸近することが確認されているものである。今回の簡略化によって水平床における線形分散関係に関する厳密性は失われることはないが、非線形性の精度低下の理論的解析、適用条件の明確化は今後の課題として残されている。

3. 数値計算

(1) 数値計算方法について

本モデルを3次元問題の数値計算に適用する際には、ADI法を基本とする方法を用いることができる。空間的には水位 η と流速 $\{u_n\}$ を半格子ずらして定義するスタガードメッシュとし、時間ステップについては、図-3に示すように、 x 方向流速 $\{u_n\}$ と y 方向流速 $\{v_n\}$ は $\Delta t/2$ (Δt は時間刻み幅)ずらして Δt 毎に定義し、水位 η は $\Delta t/2$ 毎に定義する。

時間ステップ k の更新においては、まず、第1段階で既知の $\{u_n\}^k$ 、 $\{v_n\}^{k-1/2}$ および $\{v_n\}^{k+1/2}$ を用いて x 方向の運動方程式と連続式から $\eta^{k+1/2}$ および $\{u_n\}^{k+1}$ を陰的に求める。この際、非線形項の中に現れる $\eta^{k+1/2}$ としては $\{u_n\}^k$ 、 $\{v_n\}^{k+1/2}$ および η^k から連続式によって陽的に求めた値を用いる。次に

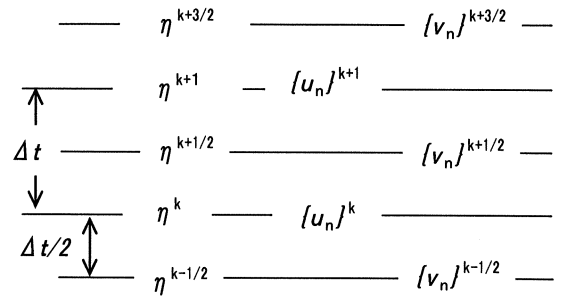


図-3 計算時間ステップにおける各変数の設定

第2段階では既知となっている $\{u_n\}^k$ 、 $\{u_n\}^{k+1}$ および $\{v_n\}^{k+1/2}$ を用いて y 方向の運動方程式および連続式から $\{v_n\}^{k+3/2}$ および η^{k+1} を陰的に求める。

ただし、非線形項の中に現れる η^{k+1} としては $\{u_n\}^{k+1}$ 、 $\{v_n\}^{k+1/2}$ および $\eta^{k+1/2}$ から連続式によって陽的に求めた値を用いる。この操作を繰り返すことによって時間ステップの更新を逐次進行させる。

上記手順における陰形式のアルゴリズムにはトーマス法を用いることになるが、対象とする未知数の系列が複数となるのでセカンドスウィープの係数はスカラーではなく行列となる。格子毎に層数が増加するため、 i 番目の格子点の層数を N_i とするとセカンドスウィープの係数は $(N_i+1) \times (N_{i+1}+1)$ の非正方行列と N_i+1 次元のベクトルとなるが、これらの算定に際しては N_i+1 の未知数に対して N_i+1 本の線形連立方程式が立式されるのでこのアルゴリズムは成立する。

(3) 試計算

ステップ地形における散乱波動場の様子を明瞭に表現するため、線形化したモデルを用い、各層上端の初期位置からの変位量を示したものが図-4である。水深40mに対して波高2m、周期10sの規則波を入射させた結果であり、ステップ地形は200m×200mの広さで、高さは水深の6割の28mである。静水深を8mの等間隔で5層に分割しての計算であり、第3層の上端がステップ地形の天端に一致する条件である。

変更前のモデルでは、このようなステップ地形に対しては、鉛直壁と水平板の閉境界の組み合わせで地形を表現する必要があったが、今回の変更によって、こういった操作を行うことなく、海底地形として一般的に取り扱うことが可能となった。これによって本モデルの実務的観点からの利便性は向上した。

(4) 検証計算

急峻地形に対する検証計算として、土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会⁸⁾が鉛直2次元の強非線形ポテンシャルモデルに対するテストケースとして採用した大山⁹⁾の潜堤による規則波の変形の問題(図-5)のうちケース4(波高5cm、周期2.01s)を対象とした。

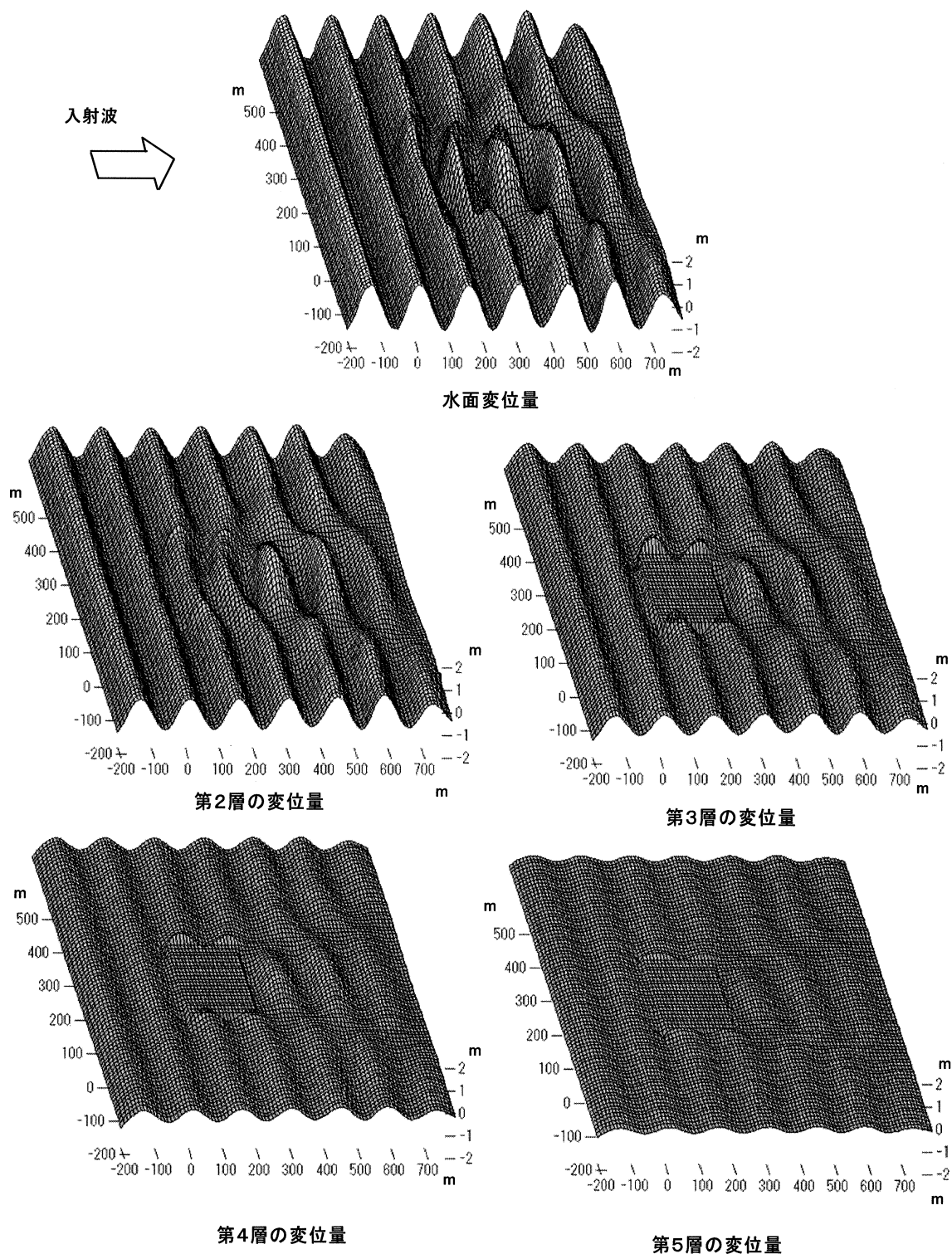


図-4 線形化されたモデルによるステップ地形周りの波浪計算結果

図-6に層分割数10での計算結果を金山ら⁷⁾に掲載された変更前のモデルによる結果とともに示す。両者とも完全な一致を示しているわけではないが、測点P3での結果などをみると変更前のモデルのほうが再現性は良好であるといえ、今回の簡略化によって損なわれた精度を詳細に把握する必要がある。

しかしながら、ここに示された変更前のモデルによる計算結果は1次元での問題に限定して繰り返し操作を行いつつ計算を進めたものであり、実務レベルでの広領域の平面波浪計算に適したものとはいえない。これに対して、今回のモデルは、繰り返し計算操作を行わず、しかも水路幅を50cmとした平面波浪

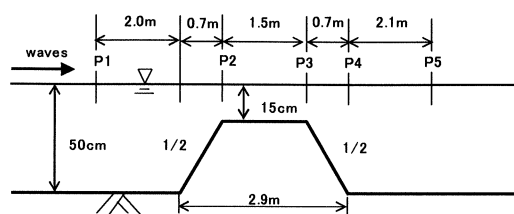


図-5 潜堤の諸元および測点

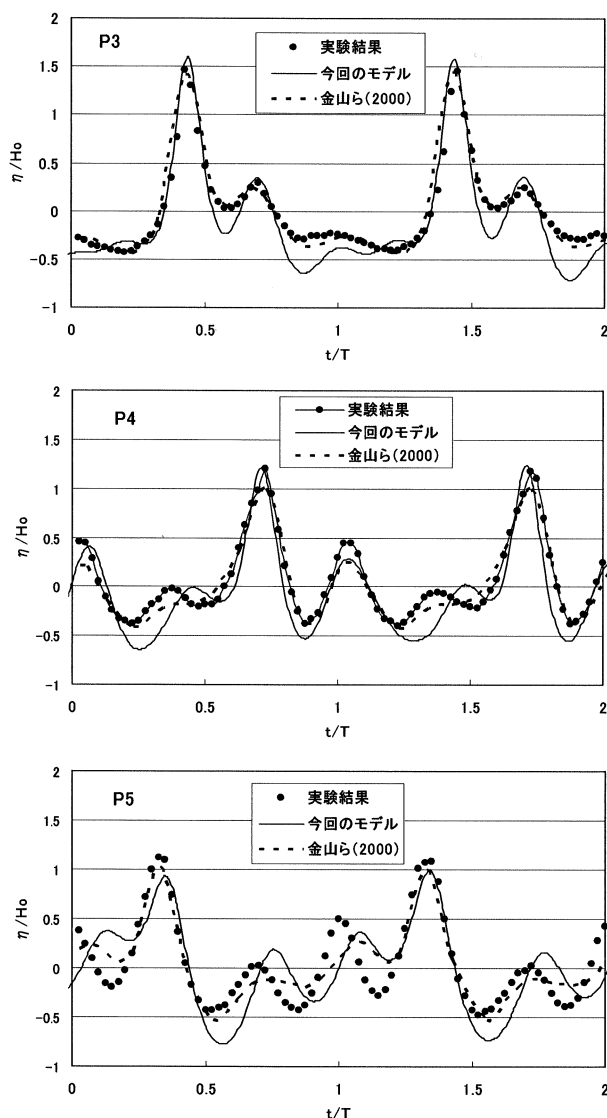


図-6 水位変動の再現結果

場として計算を行ったものでありながら、簡略化前のモデルに比べて大きく精度を損なっておらず、実務レベルへの適用に対する展望を示すものといえる。

なお、今回のモデルと同じ計算手法を簡略化前のモデルに適用したが斜面上端部などを中心に不安定な擾乱が発生し、解を得ることができなかった。

4. おわりに

非線形分散多層波動方程式に対して、急峻地形への適用に主眼を置いた改訂と簡略化を試みた。急峻地形への適用性と数値計算における利便性は向上したが、簡略化に伴う精度の低下状況の把握、適用条件の明確化は課題として残された。

また、現時点では、実地形への適用は行っておらず、複雑な海底形状による予期しない問題への懸念も残されている。さらに、小規模離島周辺でのサーフビートや水位上昇を含む波浪解析への適用に際しては碎波モデルの検討などが必要であり、実務レベルへの適用へ向けて残された課題は多い。

参考文献

- 1) 灘岡和夫・中川康之：新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み，海岸工学論文集，第40巻，pp.6-10, 1993.
- 2) 喜岡 渉・柏原謙爾：高次Boussinesq方程式とそのステップ地形への適用性，海岸工学論文集，第42巻，pp.166-170, 1993.
- 3) 磯部雅彦：非線形緩勾配方程式の提案，海岸工学論文集，第41巻，pp.1-5, 1994.
- 4) 後野正雄：強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式とその基礎的特性，海岸工学論文集，第41巻，pp.16-20, 1994.
- 5) 金山 進・田中 仁・首藤伸夫：分散性を任意次数まで考慮した高次Boussinesq方程式の一般形について，海岸工学論文集，第45巻，pp.6-10, 1999.
- 6) 中嶋光浩・由比政年・石田 啓：高次ブジネスク方程式の一般型の導出と最適係数を用いた高精度数値モデルの開発，海岸工学論文集，第44巻，pp.6-10, 1997.
- 7) 金山 進・田中 仁・首藤伸夫：非線形分散多層波動モデルの改良と準3次元波動場への適用，土木学会論文集，No.642/II-50，pp.77-86, 2000.
- 8) 土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会：海岸波動，pp.146-200, 1994.
- 9) 大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀：非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について，海岸工学論文集，第40巻，pp.11-15, 1993.