

ポテンシャル接続法の選点解法を用いた 3次元浮体動揺解析

NUMERICAL METHOD ON INTERACTION BETWEEN WAVES AND 3D FLOATING BODY BY COLLOCATION MATCHING OF EIGENFUNCTION EXPANSIONS

吉田明德¹・新井雄太郎²・山城 賢³・西井康浩⁴

Akinori YOSHIDA, Yutaro ARAI, Masaru YAMASHIRO and Yasuhiro NISHII

¹正会員 工博 九州大学助教授 工学研究院 環境都市部門 (〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

E-mail: yoshida@civil.kyushu-u.ac.jp

²正会員 工修 八千代エンジニアリング(株) (〒 153-8639 東京都目黒区中目黒 1-10-21)

³正会員 工博 九州大学 助手 工学研究院 環境都市部門 (〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

⁴正会員 (株) 三洋コンサルタント 九州支店 (〒 802-8534 北九州市小倉北区京町 3-14-17)

An analytical method to evaluate the interaction between waves and a three-dimensional floating body is presented. The General solution of velocity potential of the fluid motion is expanded into a series of eigenfunctions. The fluid region is divided into two sub-regions: one is the region beneath the floating body and the other relates to the remainder. Then both expansions in each region are matched at collocation points taken on the boundary of the regions. By using this collocation matching, theoretical formulation and computer programming become much simpler than the conventional matching method in which tedious integrations for eigen functions are needed. The theoretical formulation is described in detail for a floating body with a rectangular cross section. The validity of the method is confirmed, and the merit of the method compared to existing ones discussed.

Key Words : Floating Body, velocity potential, eigenfunction expansion, collocation points, boundary element method

1. まえがき

ポテンシャル接続法(領域分割法)¹⁾は波と構造物との干渉解析のための一つの有用な手法であり、種々の問題の解析に用いられてきている。その概略は、流体域を浮体底面下の領域とそれを除いた開領域に分割し、各領域における速度ポテンシャルを水深方向の座標 z に関する固有関数で級数展開して表し、2つの流体域の境界における連続条件と固有関数の直交性を利用して、未定係数間に成り立つ一次関係式を導きそれを数値的に解くというものである。従来、ポテンシャル接続法では固有関数の直交性を利用する際に、固有関数の積についての積分が必要で理論式が煩雑になるのが欠点であったが、吉田ら²⁾は、固有関数に関する積分演算を必要とせず、簡潔に解析できる選点解法を提示し、村上ら³⁾はこれを3次元に拡張して任意断面柱状構造物と波の非線形干渉を解析した。

選点解法によれば、理論式の展開と計算のプログラミングが極めて簡潔となるから、固定構造物に比べ理論式が煩雑となる浮体動揺の解析において、より多様

な条件に対するポテンシャル接続法の適用が容易となる。以上の観点から、本文は選点解法を用いた3次元浮体の動揺解析に関する基本的な理論式の展開を示し、その妥当性を確認したものである。

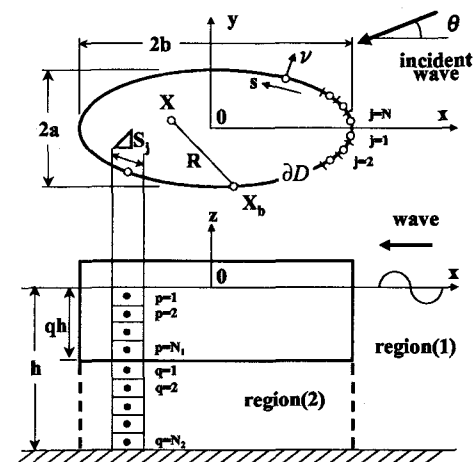


図-1 定義図

2. 基本仮定

図-1 に示すような浮体に対し、角周波数 σ の微小振幅規則波が x 軸と θ の角度で入射する場合を考える。浮体の平面形状は任意の形状を取れるが、側面は鉛直で底面は一定であることが基本の要件である。図-1 に示すように、流体域を浮体底面下の領域 (2) と浮体側面より外の領域 (1) に分割し、各領域における速度ポテンシャルをそれぞれ $\phi_1(x, y, z) \exp(-i\sigma t)$, $\phi_2(x, y, z) \exp(-i\sigma t)$ と表す。 (ξ^*, η^*, ζ^*) を x, y, z 方向の変位の複素振幅、 $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)$ を重心を通り x, y, z 軸に平行な各軸回りの回転角の複素振幅とし、静止時の重心は、 $(0, 0, \bar{z}_0)$ にあるものとする、任意時刻 t における重心の座標 (x_0, y_0, z_0) および回転角 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \xi^* \exp(-i\sigma t) & y_0 &= \eta^* \exp(-i\sigma t) \\ z_0 &= \bar{z}_0 + \zeta^* \exp(-i\sigma t) & \delta_1 &= \omega_1^* \exp(-i\sigma t) \\ \delta_2 &= \omega_2^* \exp(-i\sigma t) & \delta_3 &= \omega_3^* \exp(-i\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

3. 速度ポテンシャル

ϕ_1 および ϕ_2 は、ラプラスの式、浮体側面と浮体底面での運動学的境界条件、水面及び水底での境界条件、無限遠方への波の散乱に関する *radiation* 条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_j &= 0, & \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} &= \vec{V} \cdot \vec{\nu} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{\sigma^2}{g} \phi_1, & \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial R} - ik \phi_1 \right\} = 0$$

上式で ($j = 1, 2$) で、ポテンシャルの法線微分 $\partial \phi_j / \partial \nu$ は、浮体表面における法線ベクトル $\vec{\nu}$ を (ν_1, ν_2, ν_3) とすると次式で表せる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} &= -i\sigma \left\{ \xi^* + (z - \bar{z}_0) \omega_2^* - y \omega_3^* \right\} \nu_1 \\ &\quad + \left\{ \eta^* - (z - \bar{z}_0) \omega_1^* + x \omega_3^* \right\} \nu_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \nu} = -i\sigma \left\{ \zeta^* + y \omega_1^* - x \omega_2^* \right\} \nu_3 \quad (3)$$

(1) 速度ポテンシャルの固有関数展開

自由表面と水底の境界条件を満足する外域 (1) の速度ポテンシャル ϕ_1 は次式で表すことができる¹⁾。

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= \frac{g\zeta_0}{\sigma} [f_0(x, y) Z_1^{(0)}(z) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x, y) Z_1^{(n)}(z)] \end{aligned} \quad (4)$$

上式で g は重力の加速度で、 $Z_1^{(n)}(z)$ は次式で表される z に関する固有関数である。

$$Z_1^{(n)}(z) = \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ただし、 k_n は次式で決まる固有値で、($n = 0$) の場合は $k_0 = ik$ (i は虚数で k は実数) を意味するものとする。したがって $-k_0 h \tan k_0 h = kh \tanh kh$ である。

$$\sigma^2 h / g = -k_n h \tan k_n h \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$f_0(x, y)$ は入射波のポテンシャルで、次式で与えられる。

$$f_0(x, y) = -i \exp\{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)\} \quad (5)$$

浮体表面での境界条件と水底条件を満足する領域 (2) のポテンシャル ϕ_2 は次式で表すことができる¹⁾。

$$\begin{aligned} \phi_2(x, y, z) &= \frac{g\zeta_0}{\sigma} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(s)}(x, y) Z_2^{(s)}(z) \right. \\ &\quad + i\bar{\Gamma} \left\{ \left(-X_3 - \frac{y}{h} \Theta_1 + \frac{x}{h} \Theta_2 \right) \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \left(2X_3 + \frac{y}{h} \Theta_1 - \frac{x}{h} \Theta_2 \right) \left(\frac{x^2 + y^2}{h^2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

上式中 $Z_2^{(s)}(z)$, $\bar{\Gamma}$ は次式で与えられる。

$$Z_2^{(s)}(z) = \cos \frac{s\pi(z+qh)}{\bar{q}h}, \quad \bar{\Gamma} = \frac{1}{2\bar{q}} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g}$$

X_3 , Θ_1 , Θ_2 等は、次の無次元変位を表す。

$$X_1 = \xi^* / \zeta_0, \quad X_2 = \eta^* / \zeta_0, \quad X_3 = \zeta^* / \zeta_0$$

$$\Theta_1 = \omega_1^* h / \zeta_0, \quad \Theta_2 = \omega_2^* h / \zeta_0, \quad \Theta_3 = \omega_3^* h / \zeta_0$$

以降の式の展開においては、 $x, y, z, \nu, k, \dots$ 等の量は、代表長さ (水深 h に取る) を用いて無次元化した量を意味するものとする。

$$\begin{aligned} x/h &\equiv x, & y/h &\equiv y, & z/h &\equiv z, & \nu/h &\equiv \nu, \\ kh &\equiv k, & k_n h &\equiv k_n, & \sigma^2 h / g &\equiv \Gamma, & \bar{s} &\equiv \frac{s\pi}{\bar{q}}, \dots \end{aligned}$$

(2) 未知関数 $f^{(n)}(x, y), \varphi^{(s)}(x, y)$ の積分表示

$f^{(n)}(x, y)$, $\varphi^{(s)}(x, y)$ は (x, y) 平面のポテンシャルの分布を表し、それぞれ次の *Helmholtz* の方程式を満足すべき未知関数である。

$$\begin{aligned} \nabla^2 f^{(n)} - k_n^2 f^{(n)} &= 0 & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \nabla^2 \varphi^{(s)} - \bar{s}^2 \varphi^{(s)} &= 0 & (s = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

(x, y) 平面における浮体の境界線 ∂D の外側の開領域にグリーンの定理と *radiation* 条件を用いると、領域 (1) の $f^{(n)}(X)$ は次のグリーン公式によって表すことができる¹⁾。なお X は (x, y) を意味するものとする。

$$\begin{aligned} f^{(0)}(X) &= \frac{i}{\alpha} \oint_{\partial D} \left\{ f^{(0)}(X_b) \frac{\partial}{\partial \nu} (H_0^{(1)}(kR)) \right. \\ &\quad \left. - H_0^{(1)}(kR) \frac{\partial}{\partial \nu} (f^{(0)}(X_b)) \right\} ds \quad (n = 0) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(X) &= \frac{1}{\beta} \oint_{\partial D} \left\{ f^{(n)}(X_b) \frac{\partial}{\partial \nu} (K_0(k_n R)) \right. \\ &\quad \left. - K_0(k_n R) \frac{\partial}{\partial \nu} (f^{(n)}(X_b)) \right\} ds \quad (n \neq 0) \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 ν は境界線に対する外向き法線、 X_b は境界線上の点を意味し、 R は点 X と X_b 間の距離である。 α

は領域 (1) の任意点 X が境界線 ∂D 上にあるときは 2, そうでないときは 4 をとり, β は点 X が境界線上にあるときは π , そうでないときは 2π を取る定数である。

同様に, 境界線 ∂D で囲まれる閉領域にグリーンの定理を用いると, 領域 (2) の未知関数 $\varphi^{(0)}(X), \varphi^{(s)}(X)$ は次式で表すことが出来る。

$$\varphi^{(0)}(X) = \frac{1}{\beta} \oint_{\partial D} \left\{ \varphi^{(0)}(X_b) \frac{\partial}{\partial \nu} \log kR - \log kR \frac{\partial}{\partial \nu} (\varphi^{(0)}(X_b)) \right\} ds \quad (s=0) \quad (10)$$

$$\varphi^{(s)}(X) = \frac{-1}{\beta} \oint_{\partial D} \left\{ \varphi^{(s)}(X_b) \frac{\partial}{\partial \nu} (K_0(\bar{s}R)) - K_0(\bar{s}R) \frac{\partial}{\partial \nu} (\varphi^{(s)}(X_b)) \right\} ds \quad (s \neq 0) \quad (11)$$

なお, $H_0^{(1)}(kR)$ は 0 次の第一種ハンケル関数, $K_0(k_n R)$ と $K_0(\bar{s}R)$ は変形ベッセル関数である。

(3) 離散化

境界線 ∂D を N 個の要素 ΔS_j に分割し, その中点を $(j) = X_j = (x_j, y_j)$ で表わし, $f^{(n)}, \varphi^{(s)}$ は ΔS_j 上では一定値を取ると仮定すると, このとき, 式 (8), ..., (11) は次式のように表される。

$$f^{(n)}(X) = \sum_{j=1}^N \left\{ \overline{A_{xj}^{(n)}} f^{(n)}(j) - A_{xj}^{(n)} \overline{f^{(n)}(j)} \right\} \quad (12)$$

$$\varphi^{(s)}(X) = \sum_{j=1}^N \left\{ \overline{E_{xj}^{(s)}} \varphi^{(s)}(j) - E_{xj}^{(s)} \overline{\varphi^{(s)}(j)} \right\} \quad (13)$$

なお, 式 (12) は $(n = 0, 1, 2, \dots)$ に対して成り立ち, 式 (13) は $(s = 0, 1, 2, \dots)$ に対して成り立つ。また, $\overline{f^{(n)}(j)}, \overline{\varphi^{(s)}(j)}$ は, $f^{(n)}(j), \varphi^{(s)}(j)$ の法線 ν に関する微分を意味し, 係数 $A_{xj}^{(0)}, A_{xj}^{(1)}, \dots$ etc, は $H_0^{(1)}(kR), K_0(k_1 R), \dots$ etc, の要素 ΔS_j についての積分値を意味する⁴⁾。

いま, 式 (12), (13) において点 (X) が境界要素 ΔS_i の中点 (i) にある場合には, 式 (12), (13) より $\overline{f^{(n)}(i)}, \overline{\varphi^{(s)}(i)}$ の値は, それぞれ境界要素 ΔS_j 上の $f^{(n)}(j), \varphi^{(s)}(j)$ によって表すことが出来る。

$$\overline{f^{(n)}(i)} = \sum_{j=1}^N M_{ij}^{(n)} f^{(n)}(j) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

$$\overline{\varphi^{(s)}(i)} = \sum_{j=1}^N N_{ij}^{(s)} \varphi^{(s)}(j) \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{ij}^{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{ij}^{(n)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{A^{(n)}}_{ij} - \delta_{ij} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_{ij}^{(s)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{ij}^{(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{E^{(s)}}_{ij} - \delta_{ij} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 浮体に作用する流体力

本節の流体力の算定と, 次節の浮体の運動方程式は, 便宜上矩形浮体 (y 軸長 $2a, x$ 軸長 $2b$, 吃水 qh) を対象におこなうものとする。

(1) 流体圧力

浮体に作用する流体圧力を $p(X, z) \exp(-i\sigma t)$ と表すと, 浮体の側面に作用する流体圧力 $p_1(X, z)$, および浮体底面に作用する流体力 $p_2(X, -qh)$ はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{p_1(X, z)}{\rho g \zeta_0} &= i f_0(X) Z_1^{(0)}(z) \\ &+ i \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(X) Z_1^{(n)}(z) \\ \frac{p_2(X, -qh)}{\rho g \zeta_0} &= i \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(s)}(X) - \bar{\Gamma} \Im_1(X) X_3 \\ &- \bar{\Gamma} \Im_2(X) \Theta_1 + \bar{\Gamma} \Im_3(X) \Theta_2 \end{aligned} \quad (16) \quad (17)$$

式 (17) において

$$\Im_k(X) = \left\{ \frac{x^2 + y^2}{a_k} - \bar{q}^2 \right\} b_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

a_k と b_k は $(k = 1, 2, 3)$ に応じて $(a_1, b_1) = (2, 1)$, $(a_2, b_2) = (4, y)$, $(a_3, b_3) = (4, x)$ を取る。

底面に作用する流体力 $p_2(X, -qh)$ の算定には, 底面上の任意点 X における $\varphi^{(s)}(X)$ の値を必要とするが, 式 (13) と (15) 式を用いると, それは境界要素 ΔS_j 上の $\varphi^{(s)}(j)$ によって表すことが出来る。

$$\varphi^{(s)}(X) = \sum_{j=1}^N Q_{Xj}^{(s)} \varphi^{(s)}(j)$$

$$\text{ただし } Q_{Xj}^{(s)} = \overline{E_{Xj}^{(s)}} - \sum_{p=1}^N E_{Xp}^{(s)} N_{pj}^{(s)}$$

(2) 流体力

浮体に作用する水平方向の合力 P_X, P_Y は流体圧力 $p_1(X, z)$ を浮体側面について積分して得られ

$$\frac{P_X}{\rho g \zeta_0 h^2} = -i \sum_{j=1}^N \left[f_0(j) A^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(j) A^{(n)} \right] \Delta y_j \quad (18)$$

$$\frac{P_Y}{\rho g \zeta_0 h^2} = i \sum_{j=1}^N \left[f_0(j) A^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(j) A^{(n)} \right] \Delta x_j \quad (19)$$

上式中の $A^{(n)}$ は次式で与えられる。

$$A^{(n)} = \frac{\sin k_n - \sin \bar{k}_n}{k_n \cos k_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ただし, $\bar{k}_n = \bar{q} k_n$ を意味する。

浮体に作用する鉛直方向流体力 P_Z は流体力 $p_2(X, -qh)$ を底面について積分して得られる。

このために、浮体底面を x, y 軸に関して対称に、 M 個の面要素 $\Delta\alpha_p$ (要素の図心を X_p とする) に分割し、第一項の面積分を次の様に近似的に算定する。

$$i\rho g\zeta_0 \sum_{p=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} Q_{X_{pj}}^{(s)} \varphi^{(s)}(j) \Delta\alpha_p$$

よって P_Z は次式で与えられる。

$$\frac{P_Z}{\rho g \zeta_0 h^2} = i \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(s)} \varphi^{(s)}(j) - P_3 X_3 \quad (20)$$

ただし、

$$\Psi_j^{(s)} = \sum_{p=1}^M Q_{X_{pj}}^{(s)} \Delta\alpha_p, \quad P_3 = \bar{\Gamma} 4ab \left\{ \frac{a^2 + b^2}{6} - \bar{q}^2 \right\}$$

(3) 流体力の回転モーメント

重心を通り x, y, z 軸に平行な軸回りの回転モーメント T_X, T_Y, T_Z は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h^3} [T_X] &= - \oint_{\partial D} \int_{-gh}^0 (z - \bar{z}_0) p_1 dz dx \\ &\quad + \int_{-b}^b \int_{-a}^a y p_2 dx dy \\ \frac{1}{h^3} [T_Y] &= - \oint_{\partial D} \int_{-gh}^0 (z - \bar{z}_0) p_1 dz dy \\ &\quad - \int_{-b}^b \int_{-a}^a x p_2 dx dy \\ \frac{1}{h^3} [T_Z] &= \oint_{\partial D} \int_{-gh}^0 (y dy + x dx) p_1 dz \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式 (21) に先述の p_1 と p_2 を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{T_X}{\rho g \zeta_0 h^3} &= -i \sum_{j=1}^N \left\{ f_0(j) B^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(j) B^{(n)} \right\} \Delta x_j \\ &\quad + i \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_{1j}^{(s)} \varphi^{(s)}(j) - T_1 \cdot \Theta_1 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_Y}{\rho g \zeta_0 h^3} &= -i \sum_{j=1}^N \left\{ f_0(j) B^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(j) B^{(n)} \right\} \Delta y_j \\ &\quad - i \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_{2j}^{(s)} \varphi^{(s)}(j) - T_2 \cdot \Theta_2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_Z}{\rho g \zeta_0 h^3} &= i \sum_{j=1}^N \left\{ f_0(j) A^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(j) A^{(n)} \right\} (x_j \Delta x_j + y_j \Delta y_j) \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、

$$B^{(n)} = \{ q k_n \sin \bar{k}_n - \cos \bar{k}_n + \cos k_n - k_n \bar{z}_0 (\sin k_n - \sin \bar{k}_n) \} / \{ k_n^2 \cos k_n \}$$

$$\Psi_{1j}^{(s)} = \sum_{p=1}^M Q_{X_{pj}}^{(s)} y_p \Delta\alpha_p, \quad \Psi_{2j}^{(s)} = \sum_{p=1}^M Q_{X_{pj}}^{(s)} x_p \Delta\alpha_p$$

$$T_1 = \bar{\Gamma} ab^3 \left\{ \frac{5a^2 + 9b^2}{45} - \frac{4}{3} \bar{q}^2 \right\}$$

$$T_2 = \bar{\Gamma} a^3 b \left\{ \frac{9a^2 + 5b^2}{45} - \frac{4}{3} \bar{q}^2 \right\}$$

5. 浮体の運動方程式

(1) 運動方程式

浮体の質量を M で、重心を通り、 x, y, z 軸に平行な軸まわりの慣性モーメントを I_X, I_Y, I_Z で表すことにすると、浮体の運動方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= \{ P_X + F_X \} \exp(-i\sigma t) \\ M \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= \{ P_Y + F_Y \} \exp(-i\sigma t) \\ M \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \{ P_Z + F_Z + W_Z \} \exp(-i\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} I_X \frac{d^2 \delta_1}{dt^2} &= \{ T_X + M_X + W_X \} \exp(-i\sigma t) \\ I_Y \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} &= \{ T_Y + M_Y + W_Y \} \exp(-i\sigma t) \\ I_Z \frac{d^2 \delta_3}{dt^2} &= \{ T_Z + M_Z \} \exp(-i\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

上式において、 F_X, F_Y, F_Z は係留力、 W_X, W_Y, W_Z は係留力が浮体に生じる重心周りの回転モーメントを意味する。詳細は参考文献を参照されたい¹⁾。

浮体の質量を M と慣性モーメント I_X, I_Y, I_Z は、浮体が流体と同じ密度の様な質量物でなるとしたときの質量と慣性モーメントに、補正の係数 ν_x, ν_y, ν_z を乗じて表すことにすると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h^3} [M] &= 4\rho abq \\ \frac{1}{h^5} [I_X] &= \frac{4}{3} \rho \nu_x ab^3 q \left\{ 1 + \left(\frac{q}{2b} \right)^2 \right\} \\ \frac{1}{h^5} [I_Y] &= \frac{4}{3} \rho \nu_y a^3 b q \left\{ 1 + \left(\frac{q}{2a} \right)^2 \right\} \\ \frac{1}{h^5} [I_Z] &= \frac{4}{3} \rho \nu_z ab(a^2 + b^2) q \end{aligned} \right\}$$

(2) 運動方程式の離散化表示

式 (25), (26) に、流体力、復元力、慣性モーメント等を代入して整理すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \left\{ A^{(n)} \Delta y_j \right\} \cdot f^{(n)}(j) + i\alpha_1 \cdot X_1 \\ + i\beta_{\theta_{2x}} \cdot \Theta_2 = -A^{(0)} \sum_{j=1}^N f_0(j) \Delta y_j \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \left\{ A^{(n)} \Delta x_j \right\} \cdot f^{(n)}(j) - i\alpha_2 \cdot X_2 \\ - i\beta_{\theta_{1y}} \cdot \Theta_1 = -A^{(0)} \sum_{j=1}^N f_0(j) \Delta x_j \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(s)} \varphi^{(s)}(j) - i\alpha_3 \cdot X_3 = 0 \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \left\{ B^{(n)} \Delta x_j \right\} \cdot f^{(n)}(j) - \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \Psi_{1j}^{(s)} \varphi^{(s)}(j) \\ & + i\beta_{\theta_1 y} \cdot X_2 + i\beta_1 \cdot \Theta_1 = -B^{(0)} \sum_{j=1}^N f_0(j) \Delta x_j \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N B^{(n)} \Delta y_j \cdot f^{(n)}(j) + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \Psi_{2j}^{(s)} \varphi^{(s)}(j) \\ & + i\beta_{\theta_2 x} \cdot X_1 + i\beta_2 \cdot \Theta_2 = -B^{(0)} \sum_{j=1}^N f_0(j) \Delta y_j \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \left\{ A^{(n)} (x_j \Delta x_j + y_j \Delta y_j) \right\} \cdot f^{(n)}(j) \\ & = -i\beta_3 \cdot \Theta_3 - A^{(0)} \sum_{j=1}^N f_0(j) (x_j \Delta x_j + y_j \Delta y_j) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

上式において

$$\alpha_1 = 4abq\Gamma + \beta_{XX}, \quad \alpha_2 = 4abq\Gamma + \beta_{YY}$$

$$\alpha_3 = 4abq\Gamma - P_3 - 4ab + \beta_{ZZ}$$

$$\beta_1 = I_1 + \beta_{\theta_1 \theta_1} - T_1 - T'_1$$

$$\beta_2 = I_2 + \beta_{\theta_2 \theta_2} - T_2 - T'_2$$

$$\beta_3 = I_3 + \beta_{\theta_3 \theta_3}$$

$$I_1 = \frac{I_X}{\rho h^5} \cdot \frac{\omega^2 h}{g} = \frac{4}{3} \nu_x ab^3 q \left\{ 1 + \left(\frac{q}{2b} \right)^2 \right\} \cdot \Gamma$$

$$I_2 = \frac{I_Y}{\rho h^5} \cdot \frac{\omega^2 h}{g} = \frac{4}{3} \nu_y a^3 bq \left\{ 1 + \left(\frac{q}{2a} \right)^2 \right\} \cdot \Gamma$$

$$I_3 = \frac{I_Z}{\rho h^5} \cdot \frac{\omega^2 h}{g} = \frac{4}{3} \nu_z abq(a^2 + b^2) \cdot \Gamma$$

$$T'_1 = 2q^2 ab \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{b}{q} \right)^2 - 1 - \frac{2\bar{z}_0}{q} \right\}$$

$$T'_2 = 2q^2 ab \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{a}{q} \right)^2 - 1 - \frac{2\bar{z}_0}{q} \right\}$$

なお, $\beta_{XX}, \dots, \beta_{\theta_1 \theta_1}, \dots$ etc. は浮体の動揺によって生じる係留力と係留力のモーメントを与える係数で詳細は省略する¹⁾.

6. 境界面における連続条件と選点解法

(1) 連続条件

領域 (1) と (2) の境界面 ($-h \leq z \leq -qh$) と浮体側面 ($-qh \leq z \leq 0$) において, 次の連続条件を満足せねばならない.

ポテンシャルの連続条件より

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (-h \leq z \leq -qh) \quad (33)$$

法線微分値の連続条件より

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} = \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nu} & (-qh \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu} & (-h \leq z \leq -qh) \end{cases} \quad (34)$$

これらの条件式に式 (2), (4), (6) を代入して整理すると次の関係式が得られる.

式 (33) より

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(X) Z_1^{(n)}(z) - \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(s)}(X) Z_2^{(s)}(z) \\ & + \Pi_1(X, z) X_3 + \Pi_2(X, z) \cdot \Theta_1 + \Pi_3(X, z) \cdot \Theta_2 \\ & = -f_0(X) Z_1^{(0)}(z) \quad (-h \leq z \leq -qh) \end{aligned} \quad (35)$$

式 (34) より

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f^{(n)}}(X) Z_1^{(n)}(z) + i\Gamma \nu_1 X_1 + i\Gamma \nu_2 X_2 \\ & - i\Gamma(z - \bar{z}_0) \nu_2 \cdot \Theta_1 + i\Gamma(z - \bar{z}_0) \nu_1 \cdot \Theta_2 \\ & + i\Gamma(x\nu_2 - y\nu_1) \cdot \Theta_3 \\ & = -\bar{f}_0(X) Z_1^{(0)}(z) \quad (-qh \leq z \leq 0) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f^{(n)}}(X) Z_1^{(n)}(z) - \sum_{s=0}^{\infty} \overline{\varphi^{(s)}}(X) Z_2^{(s)}(z) \\ & - \overline{\Pi}_1(X) X_3 - \overline{\Pi}_2(X, z) \cdot \Theta_1 + \overline{\Pi}_3(X, z) \cdot \Theta_2 \\ & = -\bar{f}_0(X) Z_1^{(0)}(z) \quad (-h \leq z \leq -qh) \end{aligned} \quad (37)$$

上式で

$$\Pi_k(X, z) = i\bar{\Gamma} \left\{ (1+z)^2 - \frac{x^2 + y^2}{a_k} \right\} b_k \quad (k=1, 2, 3)$$

ただし, $(a_1 \ b_1) = (2, 1)$, $(a_2 \ b_2) = (4, y)$, $(a_3, \ b_3) = (4, x)$ で, また

$$\overline{\Pi}_1(X) = i\bar{\Gamma}(x\nu_1 + y\nu_2)$$

$$\overline{\Pi}_2(X, z) = i\bar{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} xy\nu_1 + \left(\frac{x^2 + 3y^2}{4} - (1+z)^2 \right) \nu_2 \right\}$$

$$\overline{\Pi}_3(X, z) = i\bar{\Gamma} \left\{ \left(\frac{3x^2 + y^2}{4} - (1+z)^2 \right) \nu_1 + \frac{1}{2} xy\nu_2 \right\}$$

式 (35), (36), (37) の X が ΔS_j の中点 X_j にあるとして離散化して表すと, これらは $f^{(n)}(j)$, $\overline{f^{(n)}}(j)$, $\varphi^{(s)}(j)$, $\overline{\varphi^{(s)}}(j)$ に関する 1 次関係式を与える. しかし, 式に変数 z の項が含まれるため, これを解いて未知関数を定めるためには変数 z を消去する必要がある. 後述する選点解法によらない場合には固有関数系 $Z_1^{(n)}(z)$ および $Z_2^{(s)}(z)$ がそれぞれ互いに直交性を有することを利用して, 固有関数に関する積分演算を行って z を消去していた. この固有関数の積分に関する式の展開とプログラミングは煩雑で, 特に浮体を対象とする場合には, 式 (35), (36), (37) に見られるように, 動揺変位の項に関しての積分演算が現れるため, 理論式の展開は固定構造物の場合よりも一層煩雑となる.

(2) 選点解法の適用

いま、図-1 に示すように、境界 ∂D の要素 ΔS_i の幅の帯状の面を取り、その浮体側面上の部分を N_1 個 ($p = 1, 2, \dots, N_1$)、領域 (1) と (2) の境界面上の部分を N_2 個 ($q = 1, 2, \dots, N_2$) に分割し、面要素の中点を要素 ΔS_i の位置と、鉛直方向の位置 p および q との組 (i, p) 、 (i, q) で表すものとする。境界面上の連続条件は、境界上の任意点において成り立つから、これらを面要素の各中点 (i, p) 、 (i, q) に適用し、かつ、グリーンの定理より得られる $f^{(n)}$ と $\overline{f^{(n)}}$ の関係式 (14)、および $\varphi^{(s)}$ と $\overline{\varphi^{(s)}}$ の関係式 (15) を用いると、 $f^{(n)}(j)$ 、 $\varphi^{(s)}(j)$ に関する次の一次関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n^*} f^{(n)}(i) Z_1^{(n)}(q) - \sum_{s=0}^{s^*} \varphi^{(s)}(i) Z_2^{(s)}(q) \\ + \Pi_1(i, q) \cdot X_3 + \Pi_2(i, q) \cdot \Theta_1 + \Pi_3(i, q) \cdot \Theta_2 \\ = -f_0(i) Z_1^{(0)}(q) \quad (q = 1, 2, \dots, N_2) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n^*} \sum_{j=1}^N \left\{ Z_1^{(n)}(p) M_{ij}^{(n)} \right\} f^{(n)}(j) + i\Gamma \nu_1 \cdot X_1 \\ + i\Gamma \nu_2 \cdot X_2 - i\Gamma(z_p - \bar{z}_0) \nu_2 \cdot \Theta_1 + i\Gamma(z_p - \bar{z}_0) \nu_1 \cdot \Theta_2 \\ + i\Gamma(x_i \nu_2 - y_i \nu_1) \cdot \Theta_3 = -\bar{f}_0(i) Z_1^{(0)}(p) \\ (p = 1, 2, \dots, N_1) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n^*} \sum_{j=1}^N \left\{ Z_1^{(n)}(q) M_{ij}^{(n)} \right\} f^{(n)}(j) \\ - \sum_{s=0}^{s^*} \sum_{j=1}^N \left\{ Z_2^{(s)}(q) N_{ij}^{(s)} \right\} \varphi^{(s)}(j) \\ - \bar{\Pi}_1(i) \cdot X_3 - \bar{\Pi}_2(i, q) \cdot \Theta_1 + \bar{\Pi}_3(i, q) \cdot \Theta_2 \\ = -\bar{f}_0(i) Z_1^{(0)}(q) \quad (q = 1, 2, \dots, N_2) \end{aligned} \quad (40)$$

級数項の n^* , s^* は、それぞれ n, s に関する打ち切り項数を意味する。なお、式 (39) で Γ にかかる i は純虚数を意味する i である。

これらの一次関係式はそれぞれ ($i = 1, 2, \dots, N$) について成り立ち、 $N(n^*+1)$ 個の $f^{(n)}(j)$ と、 $N(s^*+1)$ 個の $\varphi^{(s)}(j)$ および 6 モードの動揺変位 $X_1, X_2, \dots, \Theta_3$ に関する $N(2N_2 + N_1)$ 個の一次関係式を与える。よって、これと運動方程式より得られる 6 個の一次関係式を連立し、未知量の数 $N(n^* + s^* + 2) + 6$ と一次関係式の数 $N(2N_2 + N_1) + 6$ が一致するように級数項 n^*, s^* を取ることによって解くことができる。

7. 計算例

展開した理論式の妥当なことを固有関数の積分を行う方法で得られた解と比較して確認した。図-2 は計算

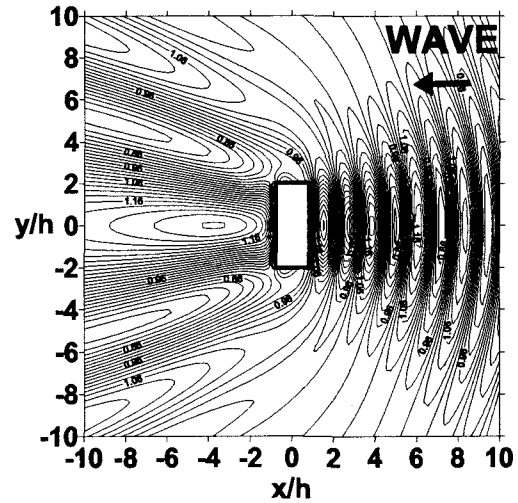


図-2 矩形浮体周辺の波高分布 ($2a/h = 4.0$, $2b/h = 2.0$, $qh = 0.25$)

例として矩形浮体周辺の波高分布を示したものである。選点解法自体の妥当性に関しては、既に吉田ら²⁾、村上ら³⁾によって詳細になされ、従来の解法による解よりも、精度良く連続条件が満足されることが示されている。なお、級数項の打ち切り項数 n^*, s^* と、境界面を取る選点の個数は独立に取ることはできず、開領域 (1) の全項数 $n^* + 1$ は鉛直方向の選点分割個数 $N_2 + N_1$ 、閉領域 (2) の全項数 $s^* + 1$ は領域 (1) と領域 (2) の境界面部分の選点分割個数 N_2 と同じに取る必要がある。

8. あとがき

ポテンシャル接続法は既に数多く用いられてきており、本文に示した手法は計算精度や計算時間などに関し、実用的に有意な改善を与えるものではない。しかし、選点解法では、従来の固有関数に関する積分を行う方法に比べ、理論式の展開と計算プログラミングの煩雑さが格段と低減される。このことは固有関数に関する積分演算を用いる理論式¹⁾と本文に示した理論式を比較すれば直ちに了解される。本手法の利点は、解析する浮体条件がより複雑な場合に発揮されるもので、例えば、他の構造物と浮体が併存する場合など、領域の分割数が多くなる場合の解析においてより有用である。

参考文献

- 1) 井島武士, 吉田明德, 湯村やす: 有限水深域の波による楕円および矩形浮体の運動と波の変形, 土木学会論文集, 第 244 号, pp.91-105, 1975.
- 2) 吉田明德, 小島治幸, 鶴本良博: 波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法, 土木学会論文集, 第 417 号, II-13, pp.265-274, 1990.
- 3) 村上啓介, 吉田明德: ストークス波と 3 次元構造物の非線形干渉解析法, 土木学会論文集, 第 527 号, pp.1-11, 1998.
- 4) 土木学会海岸工学委員会編: 海岸波動, 1994.