

閉鎖性海域での密度成層の挙動に関する 効率的な計算方法について

AN EFFICIENT NUMERICAL MODELING FOR WATER MOVEMENT IN ENCLOSED WATER WITH DENSITY STRATIFICATION

金山 進¹

Susumu KANAYAMA

¹正会員 博(工) 五洋建設(株) 技術研究所 (〒329-2746 栃木県那須塩原市四区町1534-1)

The possibility of two new versions of multi-level model for stratified flow was examined, which aim to save calculation time by excluding relaxation algorithm for water pressure. In the models, vertical profile of horizontal velocity is assumed to be a chain of quadratic potions. Trials of numerical applicability were made on the propagation of internal wave caused by pulse-type disturbance and the deformation of saline column released in fresh water.

Key Words : enclosed water, density stratification, multi-level mode, efficiency of numerical calculation

1. はじめに

閉鎖性海域における密度成層の発達には底層水の流動停滞を助長し、貧酸素化や栄養塩溶出量の増大といった水質問題の原因となっていることが多く、水質改善方策を検討する際にはこのような密度成層の影響を考慮することが重要である。潮流など長波近似が許される現象を対象とする場合は、静水圧近似の密度流シミュレーションが有効と考えられるが、短周期の風波や航跡波など長波近似が難しい現象を取り扱う場合には非静水圧のモデルが必要となり、圧力緩和のアルゴリズムを遂行するこの手法は多大な計算時間を要することが多い。

これに対して、非線形強分散性の鉛直積分型波動方程式である非線形緩勾配方程式を密度流場に拡張した柿沼^{1), 2), 3)}の一連の研究などは、静水圧近似の許されない場での効率的な3次元密度流解析への一つの方向性を示唆するものであると考えられる。

本研究は、やはり非線形強分散性の波動方程式である金山⁴⁾および金山ら⁵⁾の多層連成波動方程式の密度流場への拡張を検討したものであり、3次元問題における圧力緩和のアルゴリズムをADI法で代替することによって効率的な数値計算の遂行が可能である。また、没水平板や鉛直壁などの境界が容易に取り扱える点が特長として上げられる。

なお、一様な流体密度を仮定した金山⁴⁾および金山ら⁵⁾の多層モデル(以下、元のモデルと称す

る)は層分割数の増加とともに線形分散関係および2次の非線形干渉特性が理論値に漸近することが確認されているが、密度場を対象とする今回のモデルは、現時点では、鉛直方向の運動方程式の非線形性を無視する等の仮定を採っているため、一部精度を損なった状態となっている。

2. 流体密度を考慮した多層モデル

図-1に示すように、流体密度を考慮した多層波動モデルにおいては、静水深 h を N 個に分割(静水面直下を第1層、最下層を第 N 層とする)して設定される各層の層厚 $\{d_n\}$ 、層下端までの深さ $\{h_n\}$ 、層毎の鉛直平均水平流速ベクトル $\{u_n\}$ 、各層上端での圧力 $\{p_n\}$ 、各層の密度 $\{\rho_n\}$ および水位変化量 η を用いて基礎式を記述する。

なお、今回のモデルではブシネスク近似を用いており、連続式の取り扱いに際しては圧縮性を考慮せず、運動方程式における密度場の効果は圧力項にのみ反映される。また、水深変化は緩慢であると仮定し、水深や層厚の空間勾配を含む項は無視する。

(1) 流速鉛直分布の表示

鉛直流速 $w(z)$ は層毎に傾きを変える線形の鉛直分布を有するものと仮定し、連続の条件を用いて式(1)のように表す。

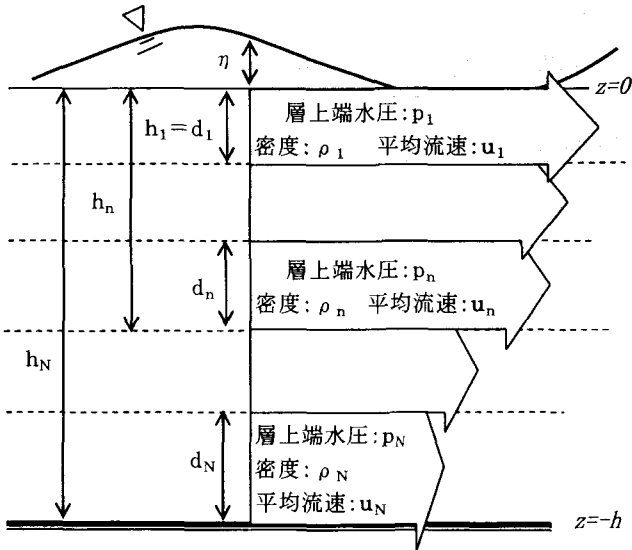


図-1 多層モデルの諸量

$$w(z) = - \sum_{i=n+1}^N d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i - (h_n + z) \nabla \cdot \mathbf{u}_n \quad (1)$$

ここで、深度 z は第 n 層に属するものとし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平方向の微分演算子である。

水平流速 $\mathbf{u}(z)$ は式 (1) を用いて渦無しの条件を鉛直上向きに積分し、層平均流速が $\{\mathbf{u}_n\}$ となるように積分定数を調整して以下のように表示される。

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}_n + \frac{1}{6} (d_n^2 - 3(h_n + z)^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_n) + \frac{1}{2} (d_n - 2(h_n + z)) \sum_{i=n+1}^N d_i \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) \quad (2)$$

(2) 連続式

鉛直方向に積分された連続式 (3) を層平均流速を用いて表示し、多層モデルの連続式 (4) を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} dz = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla (d_i \mathbf{u}_i) + \nabla (\eta \mathbf{u}_1) = 0 \quad (4)$$

元のモデルでは、強非線形への適用を考え、静水面から自由水表面までの水平流速の鉛直分布を式 (2) の外挿で表示し、連続式には高次の非線形項が含まれていたが、今回のモデルでは、現時点では運動方程式においても非線形性に関しては厳密性を欠いた展開を行っていることもあり、式 (4) の表示を採用する。

(3) 圧力の表示

非線形項を無視したオイラーの鉛直方向の運動方程式を自由水表面 η から深度 z まで積分すると圧力 p は式 (5) で与えられる

$$p = \int_z^{\eta} \rho \frac{\partial w}{\partial t} dz' + g \int_z^{\eta} \rho dz' \quad (5)$$

多層モデルの表示を用いてこの積分を実施すると以下ようになる。

$$p = p_n + g \rho_n (h_{n-1} + z) + \sum_{i=n+1}^N \rho_i d_i \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}) (h_{n-1} + z) - \frac{1}{2} \rho_n d_n^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_n (h_n + z)^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \quad (6)$$

ここで、 $\{p_n\}$ は各層の上端における圧力であり、以下のように表すことができる。

$$p_1 = \rho_1 g \eta - \rho_1 \eta \sum_{i=n}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_1 \eta^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \quad (7)$$

$$p_n = p_{n-1} + g \rho_{n-1} d_{n-1} - \rho_{n-1} d_{n-1} \sum_{i=n}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_{n-1} d_{n-1}^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{n-1}}{\partial t} \quad (8)$$

(4) 運動方程式

第 n 層に対する運動方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n + w \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \nabla p_n + \frac{1}{2 \rho_n} d_n \sum_{i=n+1}^N \rho_i d_i \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}) + \frac{1}{3} d_n^2 \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}) \quad (9)$$

式 (9) の右辺は、式 (6) の空間勾配をとって圧力勾配項を表示した上で第 n 層の鉛直平均を行ったものであり、左辺は局所項と非線形項を層平均流速で表したものである。

一様密度場を対象とする元のモデルでは、渦無しの条件を用いて、圧力変数の中に非線形の効果を集約できているが、今回は、こういった定式化には至っておらず、層平均流速によって非線形項を表している。このことも非線形性に対する精度を一部損なう要因となっている。

(5) 没水平板型の境界条件について

圧力および運動方程式の表示は、各層上端での圧力 $\{p_n\}$ を用いずに行うことも可能であることは容易にわかるが、未知数が多くなるにも関わらず、これらを残した表示を行うのは、没水平板型の境界条件の設定を容易にし、水中構造物の取り扱いを可能とするためである。

いま、第 n 層の上端、すなわち $z = -h_{n-1}$ の深度に水平板があるものとする、ここでの鉛直流速 w が0となる条件(10)が付加される。

$$w(-h_{n-1}) = -\sum_{i=n}^N d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (10)$$

仮に、各層の平均水平流速 $\{\mathbf{u}_n\}$ と水位 η の $N+1$ 個の未知数のみが用意されていた場合、 N 本の運動方程式と1本の連続式に式(10)の条件を加えた $N+2$ 個の条件が課されることとなり、条件過多になってしまう。

没水平板の直下における圧力 p_{n-1} のみを新たな未知数として加えればこの問題は解決するが、この場合、平板の上下で運動方程式を使い分ける必要があり、複数の水平境界の取り扱いを考えると非常に煩雑となる。この問題を回避するため、平板の有無に関わらず、各層上端での圧力 $\{p_n\}$ を未知数として設定したものが、ここで紹介したモデルである。

没水平板型の境界条件を取り扱う必要のない場合には、ここでは示さないが、各層上端での圧力 $\{p_n\}$ を消去したタイプのもののほうが有利であることは明らかである。

なお、鉛直壁型の境界条件は、未知数 $\{p_n\}$ の設定の如何に関わらず、対象位置における対象層平均流速を0とすることで簡単に設定できる。

(6) 密度場の取り扱い

流動による密度場の変化を流動場の計算に逐次反映させる方法として、各層の流体の上端位置の静水状態からの変位量を新たな従属変数として加える方法と密度を規定するスカラー量(今回は塩分のみを取り扱う)を移流させる方法の2通りについて検討した。

a) 層毎の変位量を導入する方法

初期状態において異なる層に属していた流体は互いに混合しないものと仮定し、各層の上側の境界面の静水状態からの変位量 $\{\xi_n\}$ を式(11)によって計算する。

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = w_n - \mathbf{u}_n \cdot \nabla \xi \quad (11)$$

ここで $\{w_n\}$ は各層の上端での鉛直流速である。

本モデルはレベルモデルであり、流体が移動しても層の位置、すなわち変数の定義位置は変化しないが、変位量 $\{\xi_n\}$ から層内の平均密度 $\{\rho_n\}$ を算定することができる。これによって流動による密度場の変化を流動場の更新に逐次反映させることができる。また、この方法では数値粘性による密度場の解像度の低下、すなわち過剰な拡散は生じない。ただし、柿沼³⁾が指摘しているように密度界面が平面座標に対して多価の関数となるような大変形などが生じる場合には適用できない。

なお、柿沼³⁾は非線形緩勾配方程式における密度場にステップ関数による基本モードを与えてこの問題を解決している。

b) 塩分濃度の移流計算を行う方法

層平均の水平流速と層境界の鉛直流速で形成される3次元の流速場で塩分濃度を移流させて密度場を逐次更新しつつ計算を進める方法であり、密度界面が平面座標に対して多価の関数となるような大変形にも適用可能である。

ただし、移流計算に伴う数値粘性による密度場の過剰拡散という問題が生じる。特に、本モデルでは層内の流速は一樣ではなく周囲の流速、圧力と連携した鉛直分布形状を有していることから、オイラーの方程式を直接取り扱う一般の3次元モデルよりは粗い鉛直分割を想定しているため、数値拡散の問題は、条件によっては精度に多大な影響を及ぼす可能性がある。

3. 数値計算

(1) 数値計算方法について

本モデルを3次元問題の数値計算に適用する際には、ADI法を基本とする方法を用いることができる。空間的には水位 η および水圧 $\{p_n\}$ と流速 $\{\mathbf{u}_n\}$ を半格子ずらして定義するスタガードメッシュとし、時間ステップにおいては、 x 方向流速 $\{u_n\}$ と y 方向流速 $\{v_n\}$ は $\Delta t/2$ (Δt は時間刻み幅)ずらして Δt 毎に定義し、水位 η および各層上端圧力 $\{p_n\}$ は $\Delta t/2$ 毎に定義する。

時間ステップの更新は以下のように4段階の手順で行う。ここで、右肩のサフィックスは時間ステップを意味する。まず、第1段階では既知の $\{u_n^k\}$ 、 $\{v_n^{k+1/2}\}$ および $\{\eta^k\}$ を用いて連続式から陽的に $\{\eta^{k+1/2}\}$ を算定する。次に、第2段階では、既知の $\{v_n^{k-1/2}\}$ 、 $\{v_n^{k+1/2}\}$ 、 $\{u_n^k\}$ および $\{\eta^{k+1/2}\}$ を用いて x 方向の運動方程式から $\{u_n^{k+1}\}$ 、 $\{p_n^{k+1}\}$ の都合2N個の未知数を陰形式で算定する。第3段階では既知の $\{u_n^{k+1}\}$ 、 $\{v_n^{k+1/2}\}$ および $\{\eta^{k+1/2}\}$ を用いて連続式から陽的に $\{\eta^{k+1}\}$ を算定する。第4段階では既知の $\{u_n^k\}$ 、 $\{u_n^{k+1}\}$ 、 $\{v_n^{k+1/2}\}$ および $\{\eta^{k+1}\}$ を用いて x 方向の運動方程式から $\{v_n^{k+3/2}\}$ および $\{p_n^{k+3/2}\}$ の都合2N個の未知数を陰形式で算定する。

上記手順における陰形式のアルゴリズムにはトーマス法を用いることになるが、対象とする未知数が2N系列存在するのでファーストスウィープおよびセカンドスウィープの係数はスカラーではなく $2N \times 2N$ の行列となり、セカンドスウィープの表示を

得るためには $2N \times 2N$ の線形連立方程式を解くことになる。

一般には、鉛直方向の分割数を N 、水平方向の分割数を $M \times K$ とする 3 次元問題を扱う場合、圧力緩和の繰り返し計算は形式上、 $(N \times M \times K) \times (N \times M \times K)$ の線形連立方程式を取り扱うことになるので、取り扱う行列のサイズが $2N \times 2N$ に過ぎない本モデルは数値計算に対する負荷がかなり軽減されることがわかる。

(2) 試計算

a) 密度界面波の伝播

層毎の変位量を導入したモデルの試計算は、密度界面波の伝播を対象に行った。

水深 9m のうち上層 4.5m の密度 ρ_U が 1.0、下層 4.5m の密度 ρ_L が 1.03 という成層状態を有する 180m $\times$ 180m の閉領域の中央部において密度境界面に円錐状の初期波形を与えて伝播変形計算を行った。

水平方向の格子分割は Δx 、 Δy とともに 2m、時間ステップ Δt は 0.2s とした。層分割は 10 層の等分割とし、第 1 層から第 5 層までの密度を ρ_U 、第

6 層から第 10 層までを ρ_L とした。

初期波形 η_0 は中央点からの距離 r に対して以下のように与えた。

$$\eta_0 = 0.5 \times \exp\left(-\frac{r^2}{40}\right) \quad (12)$$

ここで、 η_0 および r の単位は m である。この初期波形は $r = 12$ m、すなわち中心点から 6 格子離れると波頂の 1% に低減する急峻な形状である。

自由水面および密度界面（第 6 層の変位量）の代表時刻における空間波形を図-2 に示す。密度界面に与えた擾乱は自由水表面にも微小な擾乱を引き起こし、両者とも分散波列を形成しつつ周囲に広がる。ただし、両者の伝播速度は大きく異なり、自由水面波は密度界面波の 10 倍程度の速さで伝播していることがわかる。

今回の条件に対して、長波条件を仮定して両者の伝播速度を求めると、外部重力波で 9.4 m/s、内部重力波で 0.8 m/s であることから前者は後者の 10 倍程度であり、この点は今回の計算結果と整合するものといえる。

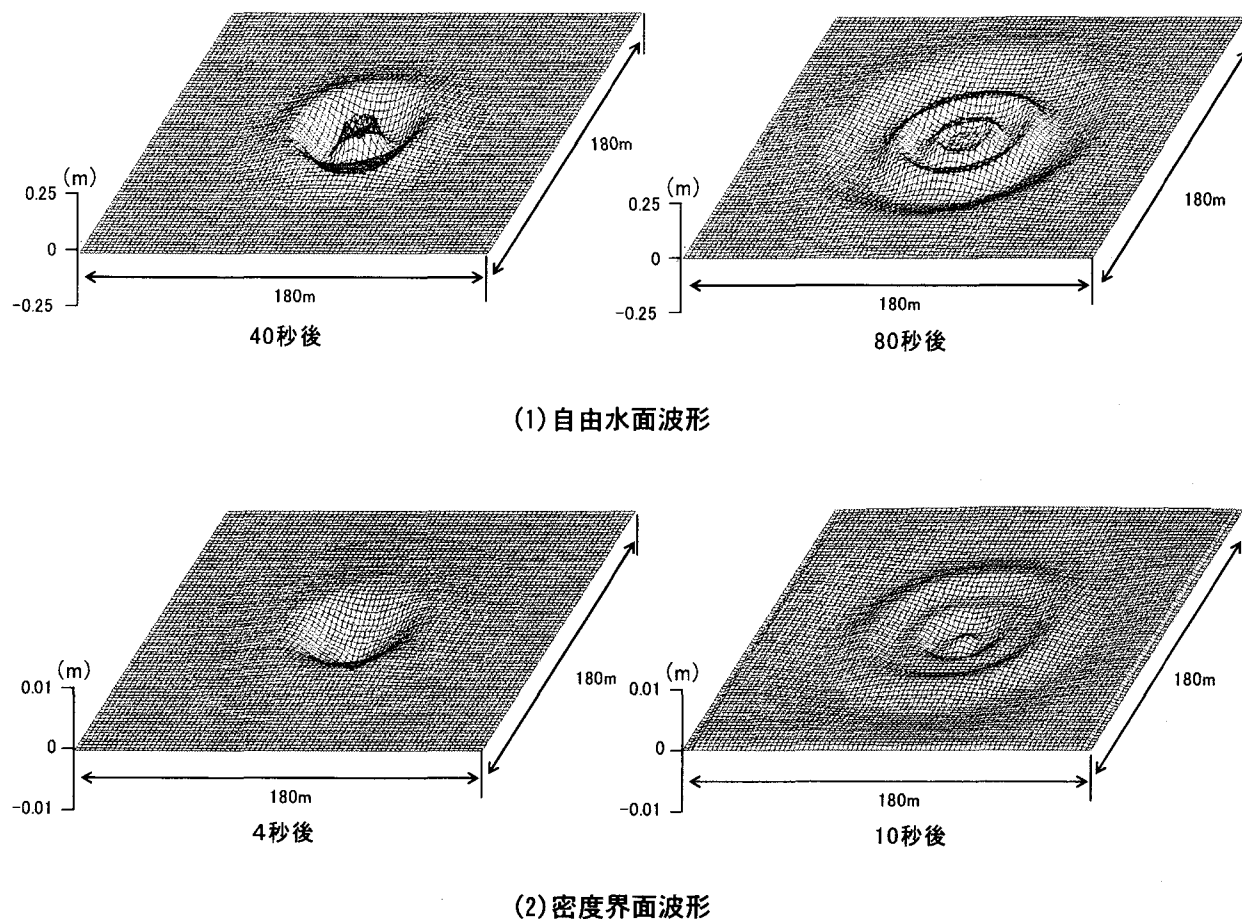


図-2 密度界面上での円錐状初期波形の伝播変形に関する計算結果

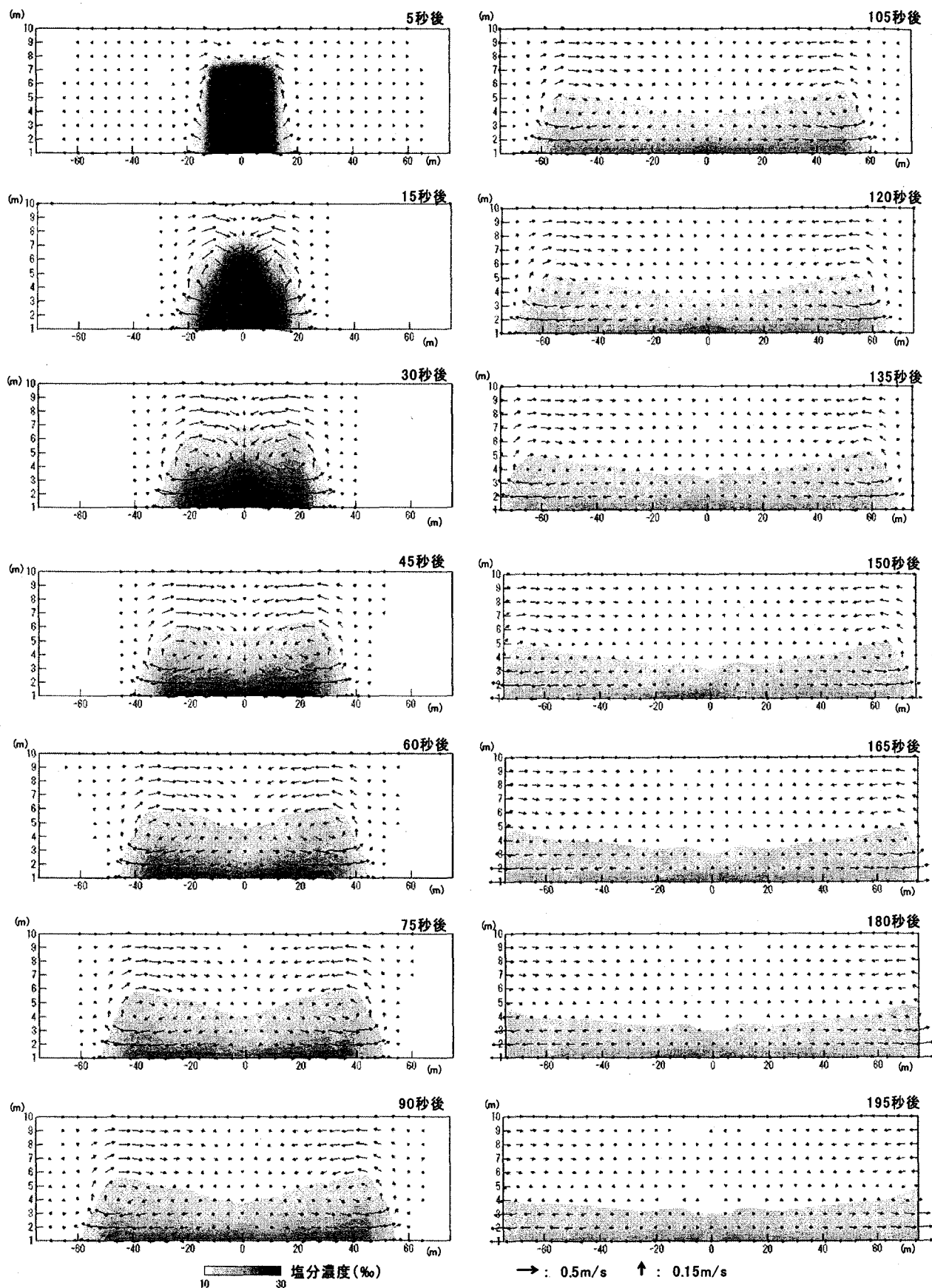


図-3 汽水中で開放された塩水柱の変形に関する計算結果

b) 塩水柱の崩壊

塩分濃度の移流計算を行うモデルは、汽水中に設定された塩水柱の自由変形の問題を試計算の対象とした。

塩分濃度10%の汽水で満たされた水深12m、幅55m、長さ500mの水路において中央の25mの区間のみ3.6m以深の塩分濃度が30%となった状態を初期条件とし、励起される流れと塩分濃度の移流状況を計算した。水平方向の格子分割は Δx 、 Δy ともに5m、時間ステップ Δt は0.5sとした。層分割は10層の等分割とし、塩水柱を設定した25m、すなわち5格子分の区間では、第1層から第3層までの初期塩分濃度を10%、第4層から第10層までを30%とした。

図-3は計算結果を水路中心線上での縦断面図で示したものである。表層では塩水柱に向かい、底層では両端に向かう左右2つの鉛直循環流が励起され、これらが底層に沿って左右に広がる塩水塊の先端部とともに移動して行く様子が表現されている。

元のモデルは主に波動場での適用を想定して提案されたものであるが、こういった枠を超えた適用に対する展望を示す結果となっている。

4. おわりに

圧力緩和の繰返し計算を伴わない効率的な3次元密度流解析手法としての強分散性の多層波動モデルの適用に関する試みを行った。密度場の変化を流

動計算にフィードバックさせる方法について2種類のモデルを検討したが、今回は数値計算の成立を確認するに留まっており、精度の検証にまでは至っていない。

また、一様な流体密度の場合において精度が検証されている多層波動モデルを密度流場に拡張する際に、現段階では、いくつかの仮定を用いざるを得なかった。特に、鉛直方向の運動方程式の非線形項を無視していることについては、これが計算精度に及ぼす影響を定量的に明らかにして本手法の適用範囲を明確にするか、あるいは、こういった仮定を用いない定式化を行うことが急務であると考えられる。

今後は、上記の問題点に加えて、吹送流の影響やコリオリ力の効果などの取り扱いにも取り組む予定である。

参考文献

- 1) 柿沼太郎：非線形緩勾配方程式の内部波への拡張，海岸工学論文集，第47巻，pp.1-5，2000.
- 2) 柿沼太郎：透水性海浜における内部波の挙動の数値計算，海岸工学論文集，第48巻，pp.146-150，2001.
- 3) 柿沼太郎：流体の密度を考慮した非線形波動方程式，海岸工学論文集，第49巻，pp.1-5，2001.
- 4) 金山 進：強分散性非線形波浪場に対する多層モデルの提案，海岸工学論文集，第44巻，pp.6-10，1997.
- 5) 金山 進・田中 仁・首藤伸夫：非線形分散多層波動モデルの改良と準3次元波動場への適用，土木学会論文集，No.642/II-50，pp.77-86，2000.