

# 係留索の周期的変動張力による水中係留浮体の動的不安定性

DYNAMIC INSTABILITY OF SUBMERGED FLOATING STRUCTURE  
CAUSED BY TIME VARIING FORCE OF TENTION LEGS

佐藤太裕<sup>1</sup>・小室達明<sup>2</sup>・蟹江俊仁<sup>3</sup>・三上隆<sup>4</sup>

Motohiro SATO, Tatuaki KOMURO, Shunji KANIE, Takashi MIKAMI

<sup>1</sup>正会員 博士(工学) 北海道大学大学院助手 工学研究科社会基盤工学専攻  
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

<sup>2</sup>学生会員 北海道大学大学院修士課程 工学研究科社会基盤工学専攻  
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

<sup>3</sup>正会員 博士(工学) 北海道大学大学院助教授 工学研究科社会基盤工学専攻  
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

<sup>4</sup>フェロー 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻  
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

Submerged Floating Structure is a whole new type of strait crossing which is fixed in the water and supported by the balance between buoyancy and drag force of tension legs. This structure is expected to be widely applicable for railway, road, pedestrian walk and transportation system of material and fluid. In order to realize this construction technology, however, there are a lot of problems to be solved.

One of the most important problems is parametric excitation which is the response caused by time-varying tension force of legs. In this paper, the parametric excitation phenomena of Submerged Floating Structure are studied analytically and characteristics of the dynamic instability are investigated

**Key Words :** *Submerged Floating Structure, dynamic instability, parametric excitation, Mathieu equation, time-varying tension force*

## 1. はじめに

水中係留浮体とは重力よりも大きな浮力をもつ浮体を、係留索を用いて水中に引き込み安定させるといふ新しい考え方の構造体である。この構造形式は大水深の地域、大規模な基礎構造建設の難しい地域、厳しい自然条件のために今まで利用できなかった地域の新しい物流、交通手段のための構造物として大変有効な手段であるといえる。

しかしながらこの構造体は橋梁やトンネルとは違い今まで利用されなかった、水中を利用することとなり、同時に浮遊式であることによる動的不安定現象の発生の問題が予想される。動的不安定現象の一つとして係数励振振動があげられる。係数励振振動は構造物の固有振動数と構造物に作用する周期変動力の振動数の関係により発生する現象であり、特に  $\omega \cong 2\omega_0$  (ここに  $\omega_0$  を構造物の固有振動数、 $\omega$  を周期変動力) の関係の時、動的不安定領域の広がり是最

も大きく、この時の動的不安定領域を主不安定領域といい、水中係留浮体の設計上、留意しなければならない。

本研究は、波浪などの外力により係留索に作用する周期変動張力による浮体の動的・主不安定性の問題について検討していく。

## 2. 解析モデル

本研究に用いる水中係留浮体のモデルを図-1に示す。水中浮体の変位は水平変位( $x$ )、鉛直変位( $y$ )、および回転変位( $\theta$ )を考える。変位は微小変位の範囲で考えている。

浮体は質量 $m$ 、体積 $V$ 、円形で半径 $r$ 、内空半径 $r_2$ の中空円とする。この時、 $U$ を浮体にかかる上向きの力とすると、 $U=V-mg>0$ が成り立つ。構造諸元は  $r=10[m]$ (半径)、 $r_2=9[m]$ (内空半径)である。

二本のレグは一つの連結点に傾角 $\alpha$ をなして、二

つの連結点 I, II に繋がれている。各連結点と浮体の中心を結ぶ線のなす角度をここで連結角と呼び  $\beta$  とする。係留索は伸び剛性を  $EA$ 、長さを  $L_s$  とし質量は係留浮体に比べ非常に小さいものとして無視する。またレグには常に正の引張力が作用しているものとする。

係留索に作用する周期変動張力を  $T_s = T_p + T_0 \cos \alpha t$  とする。(初期張力を  $T_p$ 、軸方向周期変動張力を  $T_0 \cos \alpha t$ ) この時、 $4T_p \cos \alpha - U = 0$  が成り立つ。

### 3. 支配方程式の定式化

図-1における四本のレグによる水中係留浮体の復元力は次式で表される。

$$F_{xy\theta} = 4 \begin{bmatrix} K_x & 0 & -rK_x \cos \beta \\ 0 & K_y & 0 \\ -rK_x \cos \beta & 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$K_x = \frac{1}{L_s} (EA \sin^2 \alpha + T_s \cos^2 \alpha)$$

$$K_y = \frac{1}{L_s} (EA \cos^2 \alpha + T_s \sin^2 \alpha)$$

$$K_\theta = r^2 (K_y \sin^2 \beta + K_x \cos^2 \beta)$$

である。(1)式より、水平-回転方向は連成振動を起こすが、鉛直方向はその他の方向と非連成の振動であることが分かる。本研究では水平-回転方向の連成による不安定領域に焦点を当てていく。

水平、回転方向について非時間依存項 ( $\mathbf{K}_1$ ) と周期変動張力による時間依存項 ( $\mathbf{K}_2$ ) に復元力を分け運動方程式をたてると

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_1]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_2]\{\mathbf{u}\} \cos \alpha t = 0 \quad (2)$$

ここに

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_1] = \frac{4}{L_s} \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$k_{11}^{(1)} = T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha$$

$$k_{21}^{(1)} = k_{12}^{(1)} = -(T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha) \cos \beta$$

$$k_{22}^{(1)} = (T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta + (T_p \sin^2 \alpha + EA \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta$$

$$[\mathbf{K}_2] = \frac{4}{L_s} \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$k_{11}^{(2)} = T_0 \cos^2 \alpha$$

$$k_{21}^{(2)} = k_{12}^{(2)} = -T_0 r \cos^2 \alpha \cos \beta$$

$$k_{22}^{(2)} = T_0 r^2 (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)$$

$c_1, c_2$ : 減衰係数

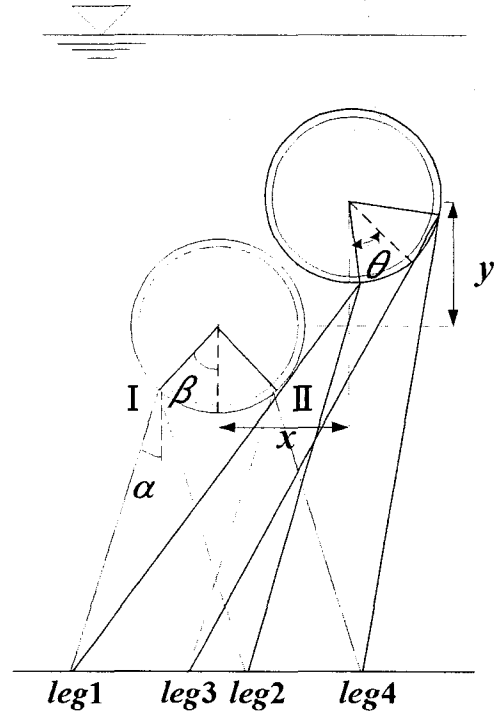


図-1 解析モデル

$I_G$ : 水中浮体の質量の慣性モーメント

とあらわせる。

さてここで(2)式の変位ベクトル  $\{\mathbf{u}\}$  を次式のように  $[\mathbf{K}_2] = 0$  における基準振動系の  $\{X_1\}, \{X_2\}$  に分解する。式で表すと

$$\{\mathbf{u}\} = q_1 \{X_1\} + q_2 \{X_2\} = q_1 \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{Bmatrix} + q_2 \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

となり、(2)式に(3)式を代入して基準振動系の直交性を用いて変換すると

$$\ddot{q}_j + 2 \begin{bmatrix} h_1 \omega_1 & 0 \\ 0 & h_2 \omega_2 \end{bmatrix} \dot{q}_j + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} q_j + \frac{2\mu \cos \alpha}{K(\alpha)} \omega_h^2 \begin{bmatrix} k_{11}^{*2} & k_{12}^{*2} \\ k_{21}^{*2} & k_{22}^{*2} \end{bmatrix} q_j \cos \alpha t = 0 \quad (4)$$

ここで

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k_{11}^{(1)}}{m}}, \quad K(\alpha) = (\cos \alpha + 4B \sin^2 \alpha),$$

$$\mu = \frac{T_0}{2T_p}, \quad m_0 = \sqrt{\frac{I_G}{m}}, \quad B = \frac{EA}{4T_p \cos \alpha}$$

$$k_{11}^{*2} = \frac{\lambda_{11}^2 + 2 \frac{k_{12}^{(2)}}{k_{11}^{(2)}} \lambda_{11} \lambda_{21} + \frac{k_{22}^{(2)}}{k_{11}^{(2)}} \lambda_{21}^2}{\lambda_{11}^2 + m_0 \lambda_{21}^2}$$

$$k_{22}^{*2} = \frac{\lambda_{12}^2 + 2 \frac{k_{12}^{(2)}}{k_{11}^{(2)}} \lambda_{12} \lambda_{22} + \frac{k_{22}^{(2)}}{k_{11}^{(2)}} \lambda_{22}^2}{\lambda_{12}^2 + m_0 \lambda_{22}^2}$$

$$k_{12}^{*2} = \frac{k'}{\lambda_{11}^2 + m_0 \lambda_{21}^2}$$

$$k_{21}^{*2} = \frac{k'}{\lambda_{12}^2 + m_0 \lambda_{22}^2}$$

$$k' = X_{11}X_{12} + \frac{k_{21}^{(2)}}{k_{11}^{(2)}}X_{12}X_{21} + \frac{k_{12}^{(2)}}{k_{11}^{(2)}}X_{11}X_{22} + \frac{k_{22}^{(2)}}{k_{11}^{(2)}}X_{21}X_{22}$$

$h_1, h_2$ : 浮体の一次, 二次モードの減衰定数

$\omega_1, \omega_2$ : 浮体の一次, 二次モードの固有振動数

また(4)式は以下のように書き換えられる。

$$[\mathbf{N}]\ddot{q}_j + 2[\mathbf{N}]h_j\omega_j\dot{q}_j + [\mathbf{E}]q_j + 2a[\mathbf{A}]q_j\phi(t) = 0 \quad (5)$$

ここに

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1/\omega_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\omega_2^2 \end{bmatrix}, [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{*2} & k_{12}^{*2} \\ k_{21}^{*2} & k_{22}^{*2} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a = \frac{2\mu \cos \alpha}{K(\alpha)} \omega_h^2, \phi(t): \text{周期関数}$$

$$h_j = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix}, \omega_j = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix}$$

(5)式は本研究において動的不安定領域の誘導に用いるMathieu型の方程式である。(5)式より $\omega \approx 2\omega_1$ (一次モード),  $\omega \approx 2\omega_2$ (二次モード)に相当する主不安定領域の境界の関数が求められる。<sup>1)</sup>

#### 4. 結果および考察

(5)式より得られた主不安定領域の広がりの様子を図-2に示す。各グラフの下方のグラフは $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域, 上方のグラフは $\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域を示している。横軸 $\mu$ は初期張力の二倍と周期変動張力成分の振幅の比を, 縦軸は周期変動張力の振動数と, 各係留索配置の一次, 二次モードの振動数( $\omega_1, \omega_2$ )の二倍の比である。今, 係留索には常に正の引張力が作用しているので, 周期変動張力成分は初期張力より小さな値で,  $T_p > T_0$ である。よって横軸 $\mu$ については $0 < \mu < 0.5$ である。

水中係留浮体の $\mu$ と $\omega 2\omega_i (i=1, 2)$ の関係が広がり内側(不安定領域内)にあるとき, 浮体の振動における振幅は時間とともに発散し動的不安定といえる。広がり外側(不安定領域外)にあるとき, 浮体は周期的な振動を繰り返す。

本解析モデルにおいてレグ傾角を $\alpha=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ と増加させた場合についてを(a), (b), (c)に, また連結角を $\beta=90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ と変化させた場合の不安定領域の変化についてを(b), (d), (e)に示す。また, (b), (f)はBの変化による不安定領域の変化である。Bは伸び剛性と浮体の上向きの力( $4T_p \cos \alpha$ )の比で表される無次元量である。

$h_1, h_2$ は各モードの減衰定数を表している。本研究では減衰定数が変化した時の不安定領域に与える影響を検討するため,  $h_1, h_2=0, 0.01, 0.05$ について比較を行う。45° $< \beta < 90^\circ$ のとき,  $\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域は $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域に比べ有意な広がりではなく,  $h_2=0.01$ で(a)から(f)いずれのケースにおいても広がり完全消失している。また $h_1$ は $\omega \approx 2\omega_i (i=1, 2)$ に相当する不安定領域に支配的な影響を与え,  $h_1$ は $\omega \approx 2\omega_j (i \neq j, j=1, 2)$ に相当する不安定領

域にほとんど影響を与えないことが確認される。

まず $\alpha$ を増加させた時,  $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域は大きく減少しているのが分かる。 $\omega \approx 2\omega_2$ 相当する不安定領域も割合は小さいものの若干ながら減少していることから, 傾角の増加は動的・主不安定領域の減少に効果的であるといえる。

次に $\beta$ を小さくしたときを見ると,  $\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域は若干ではあるが広がり, 振動数域が低くなっているのが確認できる。 $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域の広がり, ほとんど変化が見られないことから, 連結角の変化は, 傾角に比べ不安定領域の広がり, ほとんど影響を及ぼさないとはいえる。

また, (a)から(f)いずれのケースにおいても, 減衰定数を大きくすると不安定領域の減少が確認できる。減衰定数による不安定領域の減少の割合は $\alpha$ の値の増加により大きくなっているのが分かる。特に $\alpha=10^\circ, h_1=0.05$ では減衰に伴う不安定領域の減少の割合が大きく $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域も消失している。このことから, 傾角 $\alpha$ の増加は減衰を考慮した場合, 不安定領域の減少により大きな影響をあたえることが分かる。

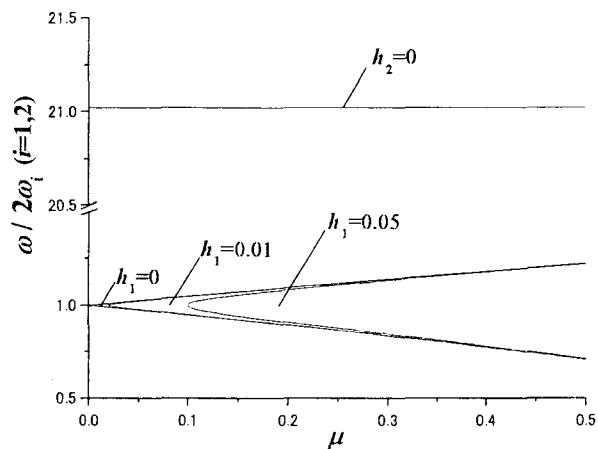
最後に $B=100, 200$ と変化させたときを比較すると,  $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域の減少が確認でき,  $B=200$ では $h_1=0.05$ で $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域は消失する。よってBの増加, つまり係留索の伸び剛性EAを大きな値にすることによって動的・不安定領域を減少することができるといえる。

以上の考察により,  $\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域は減衰を考慮すると, 無視できる大きさの広がりである。連結角 $\beta$ による影響は少なく, ある程度の係留索の傾角 $\alpha$ により, 本解析モデルにおける構造物の動的・主不安定領域の広がり大きく減らせることが分かる。

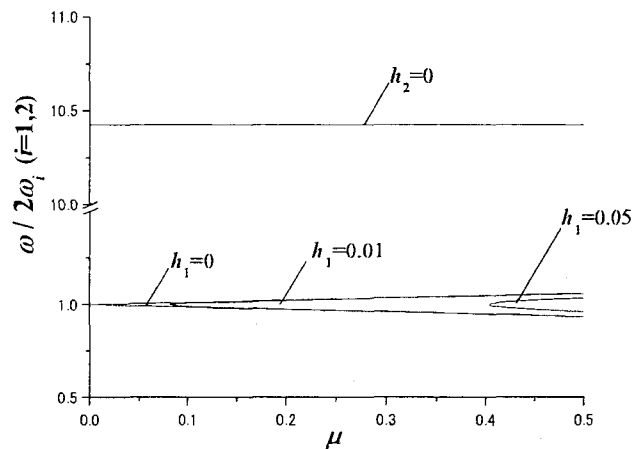
#### 5. あとがき

本研究においては係留索に周期的変動張力が作用する時の水中係留浮体の動的・主不安定領域を検討した。各係留索配置の動的・不安定領域に与える影響として得られた知見を以下にまとめる。

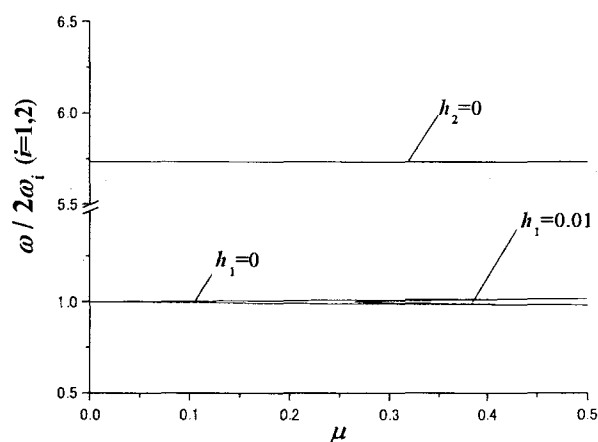
- (1)  $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域は, 傾角 $\alpha$ の増加により, 大きく減らすことができる。
- (2)  $\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域は,  $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域に比べ非常に狭い。
- (3) 連結角 $\beta$ の影響は傾角に比べ小さなものといえ,  $\beta$ の減少により広がり大きくなるものの, 減衰を考慮すると無視できるものといえる。
- (4) 減衰の効果はいずれの不安定領域の広がりをも小さなものとした。
- (5) 減衰による不安定領域の減少効果は, 傾角 $\alpha$ の増加に伴い大きなものになる。
- (6) B(伸び剛性と浮体の上向きの力( $4T_p \cos \alpha$ )の比)の増加によって, 不安定領域は大きく減少させることができる。



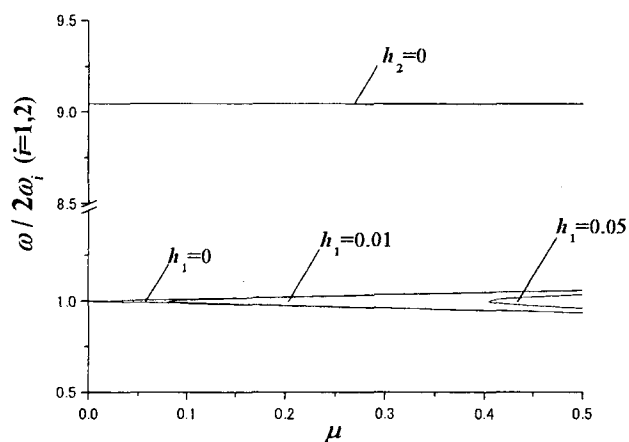
(a)  $\alpha=0^\circ, \beta=90^\circ, B=100$



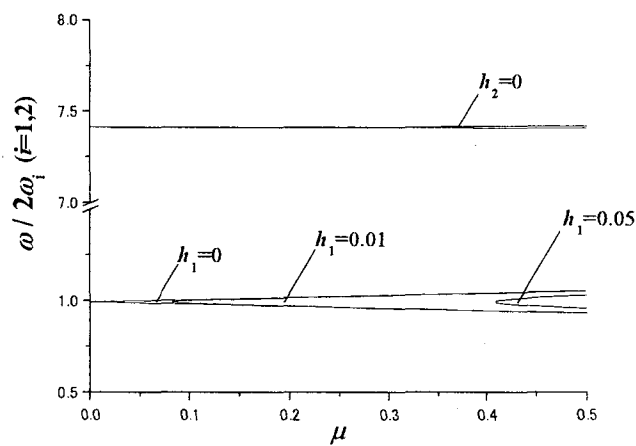
(b)  $\alpha=5^\circ, \beta=90^\circ, B=100$



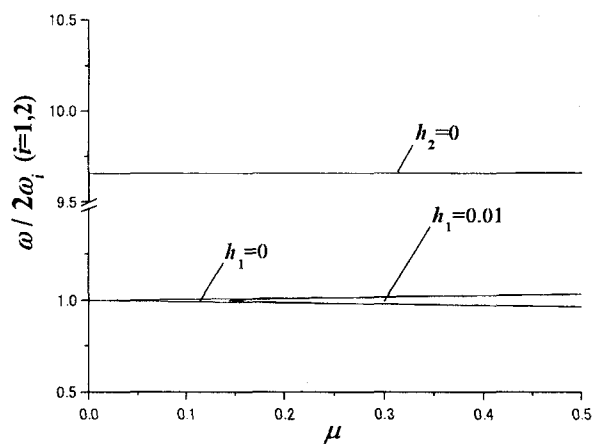
(c)  $\alpha=10^\circ, \beta=90^\circ, B=100$



(d)  $\alpha=5^\circ, \beta=60^\circ, B=100$



(e)  $\alpha=5^\circ, \beta=45^\circ, B=100$



(f)  $\alpha=5^\circ, \beta=90^\circ, B=200$

図-2 各係留索配置における動的不安定領域

参考文献

1) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc, 1964  
 2) T.C. Lee : A study of coupled Mathieu equations by using of infinite determinants, Journal of Applied Mechanics, Vol.43, pp.349-352, 1976

3) M.Sato, S.Kanie, T.Mikami, H.Gunawan and K.Sato : Dynamic Instability Characteristics of Submerged Floating Tunnel, Proceeding of the Ninth East-Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, paper No.379, 2003  
 4) 小室達明, 佐藤太裕, 蟹江俊仁, 三上隆: 水中係留浮体の係数励振振動による主不安定領域の解析, 土木学会北海道支部論文報告集第60号, pp.88-91, 2003