

BEMとVOFを結合した波動場解析法の開発

DEVELOPMENT OF A COMBINED METHOD OF BEM AND VOF FOR ANALYZING WAVE MOTION

鄒 曙光¹・山城 賢²・吉田 明德³・鮎川 慶一朗⁴・入江 功⁵
Shuguang YAN, Masaru YAMASHIRO, Akinori YOSHIDA, Keiichiro AYUKAWA and Isao IRIE

¹正会員 工修 九州共立大学助手 土木工学科 (〒807-8585 北九州市八幡西区自由ヶ丘1-8)

²正会員 工博 九州大学助手 大学院工学研究院 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)

³正会員 工博 九州大学助教授 大学院工学研究院 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)

⁴正会員 工修 (株)松尾設計 第二技術本部水道部 (〒805-0061 北九州市八幡東区西本町2-5-5)

⁵正会員 工博 九州大学教授 大学院工学研究院 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)

A numerical analysis model, based on the coupling of a Boundary Element Method (BEM) which is applied to the region far from the structure where the fluid motion is less non-linear and a Volume Of Fluid (VOF) method which is applied to the region near the structure where the fluid motion is highly non-linear, is developed. Two methods were combined under the principles of continuities of the velocity and the pressure. The validity of the method was checked comparing the numerical results with the theoretical ones for wave profiles. Although the combined method showed the superiority over each single method, in the present state, several problems to be further settled were found on the numerical accuracy and stability.

Key Words : BEM, VOF, numerical method, wave motion, Non-linear interaction

1. まえがき

近年のコンピューターの急速な発達に伴い、CFD(数値流体力学)を海岸工学の分野に取り入れ、数値シミュレーションにより構造物近傍の波動現象を解明しようとする研究が活発に行われている。特に最近では、多大な労力と費用を要する水理模型実験に代わり、数値シミュレーションを構造物の設計に活用しようとする動きもある¹⁾。

当初から用いられてきた数値シミュレーションの主な手法として、ポテンシャル理論に基づく波動の支配方程式を、有限要素法、境界要素法、差分法などを用いて解く方法がある^{2), 3), 4), 5)}。これらの手法は、後述するDirect Simulationに比べて格段に良い精度で解析することができ、しかも、計算時間と計算機の記憶容量が少なく済むという利点があるが、共通していえることは、砕波などの極めて非線形性の強い現象が原理的に再現できないということである。これに対し、非圧縮粘性流体を対象とするNavier-Stokesの運動方程式を差分法し、何等の仮定も導入せずに計算領域内の流速と圧力を直接解く方法、いわゆるDirect Simulationが近年発達し、

現在も多くの研究がなされている^{6), 7)}。しかしながら、Direct Simulationは領域全体を多数の格子で分割し、その格子に設定した流速や圧力などを時間発展的に求めていくため、膨大な計算時間と記憶容量を必要とする。

一方、水理実験等で実際の現象を観察すると、構造物のごく近傍では急激な波浪変形が生じるものの、構造物からある程度離れると、現象はポテンシャル理論に基づく解析法で十分表現できると思われる場合が多い。このような波動場の現象と解析法の現状をふまえ、本研究では、海岸構造物近傍の複雑な波動場を十分再現することができ、且つ、計算時間や記憶容量の面で実用に耐えうる数値解析モデルを開発することを目的に、Direct Simulationに比べ計算精度が良く、記憶容量や計算時間が格段に少なくて済む境界要素法と、Direct Simulationの一手法で、自由表面の解析に実績のあるVOF法⁸⁾を結合し、両手法の利点を十分に活かした数値解析モデルの開発を試みた。

2. 結合解析法の開発

(1) 境界要素法とVOF法の概要と特徴

a) 境界要素法

まず、境界要素法(以下、BEMと記す)について述べる。図-1に示すように一定水深 h の海域において沖側および岸側の仮想境界面と水表面および海底面で囲まれる閉領域を考える。流体運動を非圧縮、非粘性の完全流体による非回転運動と仮定すると、速度ポテンシャル $\phi(x,z,t)$ が存在し、 $\phi(x,z,t)$ は次のラプラスの方程式を満足する。

$$\nabla^2 \phi(x,z,t) = 0 \quad (1)$$

境界線で囲まれた閉領域に対してグリーンの定理と一定水深の海底面に関する鏡像の原理を適用すると、速度ポテンシャル ϕ に関する次の境界積分方程式(グリーン公式)を得る。

$$\phi(X_p) = \frac{-1}{\alpha} \int_{\Gamma} \left\{ \phi(X_b) \frac{\partial G(r)}{\partial n} - G(r) \frac{\partial \phi(X_b)}{\partial n} \right\} ds \quad (2)$$

ただし、 $G(r) = \log r + \log r^*$ 、 r は領域内の点 X_p と境界線上の点 X_b との距離、 r^* は点 X_p と海底面に対する X_b の鏡像点 X_b^* との距離、積分境界 Γ は海底面を除く境界面である。また、 α は X_p が境界線を除く領域内の点であるときは 2π 、境界線上の点であるときは π を取る定数であり、 s は積分の方向、 n は境界線の内向き法線ベクトルである。数値計算においては、図-1に示すように境界線を N 個の線分要素(境界要素) $\Delta S_j (j=1, 2, \dots, N)$ を用いて分割し、要素上では ϕ と $\phi_n (= \partial \phi / \partial n)$ を一定と仮定している(一定要素)。(2)式を境界要素を用いて離散化すると、次の式になる。

$$\sum_{j=1}^N \left[(\bar{E}_{ij} + \delta_{ij}) \phi(j) - E_{ij} \phi_n(j) \right] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

ただし、

$$E_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta S_j} (\log r_i + \log r_i^*) ds$$

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{\partial (\log r_i + \log r_i^*)}{\partial n} ds$$

(3)式は ϕ と ϕ_n に関する連立一次方程式であり、これに、水面境界条件、沖側境界条件(入射波の ϕ と ϕ_n)、および岸側境界条件を与えて解くことにより境界上の ϕ と ϕ_n が求められる。また、境界上の ϕ と

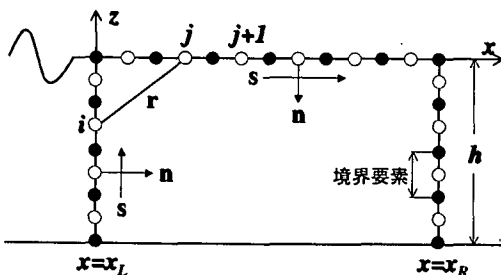


図-1 BEMの計算領域

ϕ_n が求められると、(2)式より領域内の任意点における ϕ が求められ、したがって、 ϕ から水面波形および流速、圧力などを求めることができる。このグリーン公式をもとに、時間発展的に水面形状を求める非定常解析法が開発されており、潜堤上における波の分裂現象などを対象とした問題に適用されている^{2),4)}。

BEMは計算対象領域の境界でのみ線分要素を配置して計算するため記憶容量や計算時間が少なく済む利点があるが、ポテンシャル理論に基づくため構造物近傍で生じる渦や砕波といった極めて非線形性の強い現象は原理的に再現できない。

b) VOF法

VOF法は、図-2に示すように、全計算領域で計算格子(セル)を配置し、各セルでは流速をセル境界上に、圧力およびセルに占める流体の割合を表すVOF関数 F をセルの中央に置くstaggered meshを採用して、以下の連続方程式、運動方程式およびVOF関数 F の移流方程式を離散化する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Fu}{\partial x} + \frac{\partial Fw}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

ここで、 t は時間、 x, z は水平、鉛直座標、 u, w は流速の水平、鉛直成分、 ρ は密度、 p は圧力、 ν は分子動粘性係数である。

VOF法(SOLA-VOF法)では、まず、境界条件を満足するようにNavier-Stokes方程式((5),(6)式)を解くことにより、次の時間ステップの流速を計算する。しかし、運動方程式から得られた流速は必ずしも連続方程式((4)式)を満足しないため、連続方程式を満たすまで、流速と圧力を調整する繰り返し計算を行う必要がある。このようにして得られた流速を用いて、VOF関数 F の移流計算((7)式)を行い、自由表面を追跡する。

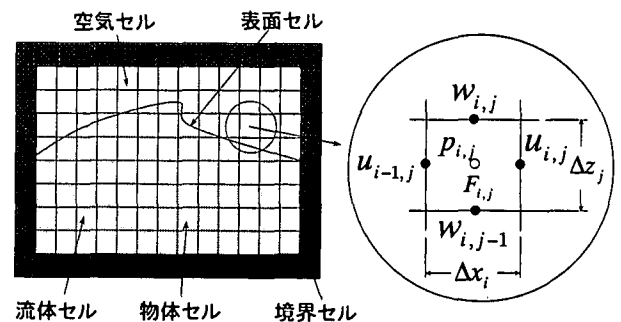


図-2 計算格子の定義

VOF法は砕波等の非線形現象を表現することが可能であるが、全領域にセルを配置し、また、流速の算定に繰り返し計算が必要であるため、膨大な記憶容量と計算時間を必要とする。

(2) 結合解析法

BEMとVOFの結合法については、接続境界における流速と圧力の連続性をもとに考案した。図-3に示すようにBEMの通過境界とVOF領域の水平流速の入力境界が重なるように計算領域を設定する。まず、BEM領域からVOF領域への波の伝播を考えると、BEMによりVOFの入力境界における流速を求め、これをVOFの入力値とすることで実現できる。すなわち、BEMにより求まる通過境界上(図中の境界要素中点)のポテンシャルの法線微分をVOFの水平流速の入力値(図中水平流速入力点)とする。鉛直流速については、VOFの鉛直流速入力点がBEM領域内にあるため、VOFの鉛直流速入力点の中点(図中のポテンシャル算定点)におけるポテンシャルを(2)式より算定し、その差分を取ってVOFの鉛直流速入力値とする。一方、VOFの計算領域で発生する反射波(具体的には構造物からの反射波)をBEMの計算領域へ伝播させるためには、VOFの領域においてBEMとの接続境界に隣接するセル(図中の圧力算定点)で求まる圧力から、接続境界上のポテンシャルを求め、これをBEMの境界条件とする。すなわち、計算手順は以下ようになる。まず、BEMによる計算を行い、VOFへの入力値となる水平流速および鉛直流速を算定する、このとき、VOF領域において1つ前のタイムステップで計算された圧力からポテンシャルを求め、これをVOF領域との接続境界における境界条件として利用する。次いで、与えられた入力条件のもとでVOFによる計算を行い、あるタイムステップにおける全領域の水面形状を決定する。以上の手順を時間発展的に繰り返し行う。なお、所要の精度を得るために必要なBEMの境界要素とVOFのセルのサイズは等しくなく、BEMの境界条件を与える位置(図中の境界要素中点)とVOFの入力値を与える位置(図中の水平流速入力点)は同じ位置ではないため、上述の流速および圧力の受け渡しの際には、離散点における値をもとにスプライン補間法を用いて所要の位置での値を算定した。

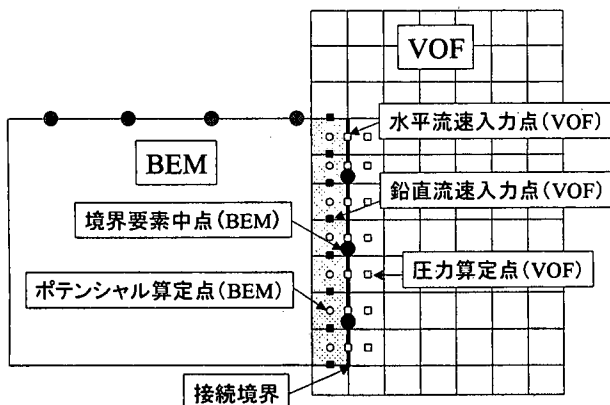


図-3 結合法

(3) 結合解析法による試計算

BEMとVOFを結合した解析モデル(BEM_VOF)を作成し、その妥当性を検証するため試計算を行った。入射波は $kh=0.5$, $T=4.174s$, 振幅 $A/h=0.01$ の微小振幅波でBEM側から入射させた。計算領域は図-4に示すように、水深 h を $1m$, BEM領域の幅を 2.5 波長とし、VOF領域の幅を 1.25 波長とした。VOF領域端の条件は透過条件(放射条件)と完全反射条件の2通りとした。計算時間は10周期とし、時間ステップはBEMを $T/100$, VOFを $T/2000$ (BEMの1ステップにつきVOFを20ステップ)とした。BEMの要素数は入射境界、水面境界、VOFとの接続境界をそれぞれ10, 160, 10 ($\Delta S_j/h=0.2$) とし、VOFの水平方向と鉛直方向のセルの数はそれぞれ242 ($\Delta x/h=0.065$) と52 ($\Delta z/h=0.04$) に設定した。

図-5に透過、完全反射それぞれの境界条件での空間波形 ($t=6T$) および時間波形 ($x/h=42.41$) の計算結果と微小振幅波理論による理論値との比較を示す。透過条件(図-5(a))では接続境界で若干の波形の乱れが生じているが、全体的に計算値と理論値は良く一致している。一方、完全反射の条件(図-5(b))での空間波形を見ると、計算領域端から反射波が到達している接続境界付近までは計算値と重複波の理論値は良く一致している。しかし、時間波形を見ると、およそ $6.5T$ で計算が破綻していることがわかる。計算過程を調べたところ、接続境界における圧力や流速が異常な値となることを確認した。また、VOF領域からの反射波がBEM領域に伝わる際に計算が破綻することから、BEMの境界条件となるVOF領域の圧力の値に問題があるものと推測し接続境界付近におけるVOF領域の圧力について検討した。図-6に接続境界から岸側に1番目および25番目のセルにおける圧力の時間変化を上層(水表面から水深方向に5番目のセル)、中層(同15)、下層(同25)について示している。図より、計算が破綻する直前に接続境界近傍のVOF領域の圧力が瞬間的に異常な値を示していることがわかる。また、圧力の異常値の程度は接続境界から離れると小さくなっている。

以上のことから、計算が破綻する原因について次のように考察した。VOF法では、特に水表面付近の圧力が瞬間的に異常な値となることがあり、これは

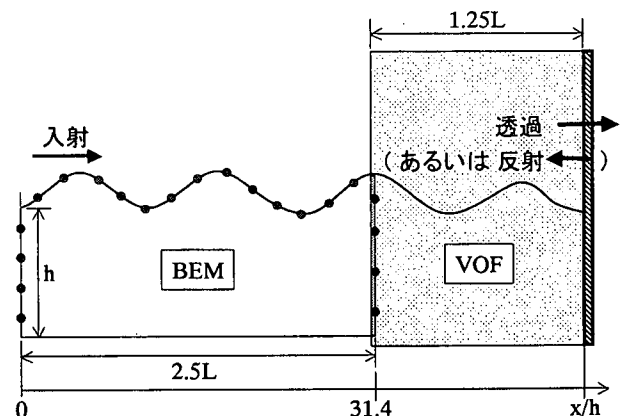


図-4 計算領域

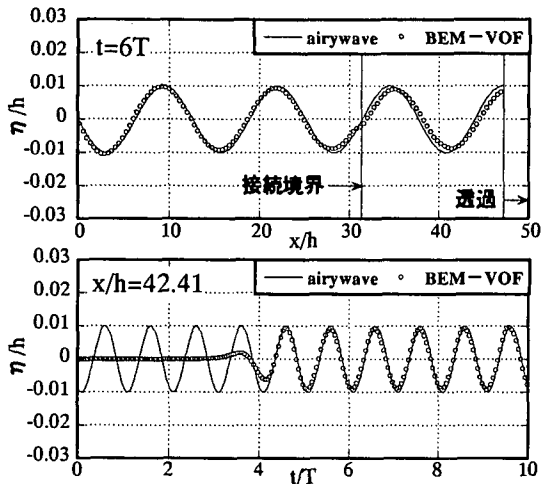


図-5(a) 空間波形および時間波形(通過条件)

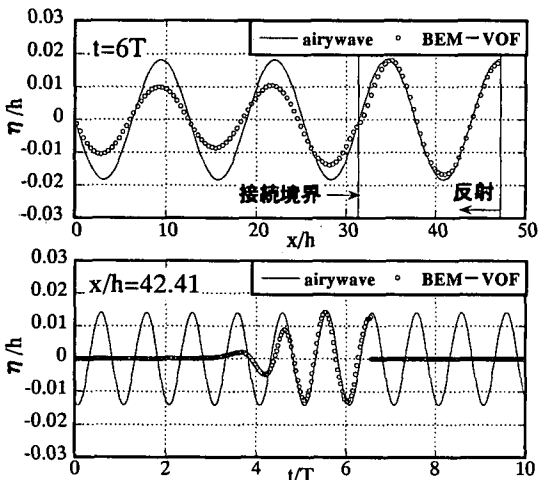


図-5(b) 空間波形および時間波形(反射条件)

表面セルにおいて連続の式を満足するよう圧力と流速を調整しながら繰り返し計算を行うことが原因と思われる。VOF法単独による計算では、あるタイムステップで計算された圧力が次のステップの流速等の算定に与える影響は小さく、上記のような圧力の異常が生じて水面波形等は安定している。しかし、ここで提案しているBEMとの結合法においては、VOF法で算定される圧力はポテンシャルに換算されBEMの境界条件となるため、VOFによる異常な圧力はBEMの計算結果に大きく影響する。そのため、BEMにより計算されるVOFへの入力値(水平流速および鉛直流速)も異常な値となり、これが繰り返されることにより遂には破綻する。

3. 結合法の改良と計算精度の検証

(1) 結合法の改良

VOF法による圧力の異常を考慮し、結合法の改良を行った。図-6に示すように、圧力の異常は接続境界付近で大きく、接続境界から離れると異常の程度が小さくなる。そこで、図-7に示すようにBEMの計算領域とVOFの計算領域をある幅で重複させて結合した。この場合、BEM領域からVOF領域への波の伝播

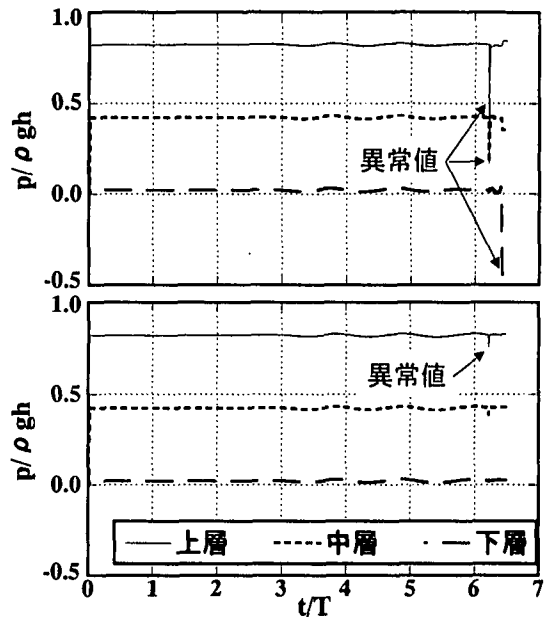


図-6 VOF領域における圧力の計算結果(上図:1番目, 下図:25番目)

は、VOFへの入力値である水平流速と鉛直流速を共にBEM領域内のポテンシャルの差分を取って求める。また、VOF領域からBEM領域への波の伝播については、VOFによる圧力から接続境界上のポテンシャルを算定することに加え、同時にVOFによる水平流速をBEMの境界上の法線微分(ϕ_n)とする。

この結合法を用いて図-4と同条件の計算を行った。ただし、接続領域の幅(B)は25セルとした。図-8に空間波形($t=8T$)と時間波形($x/h=36.39$)の計算結果と微小振幅波理論による理論値との比較を示す。透過条件(図-8(a))では空間波形、時間波形ともに理論値と良い一致を示している。一方、完全反射条件(図-8(b))では、空間波形、時間波形ともに理論値との差異が生じているが、改良した結合法では計算が破綻せず比較的安定していることが分かった。

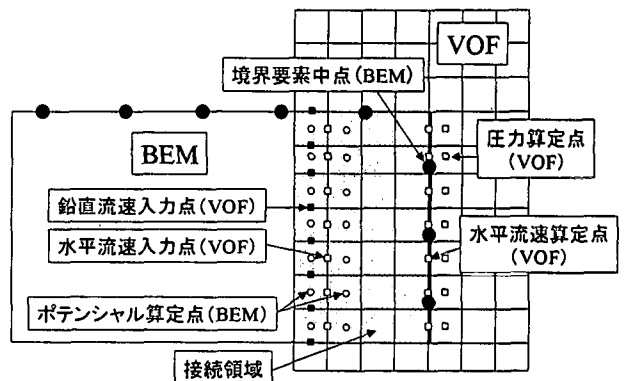


図-7 改良した結合法

(2) 計算精度の検証

本研究で考案した解析法について、計算精度の検証を行った。本来、数値解析法の精度を検証する際には、計算結果に影響する入力条件、計算領域、境界要素やセルの大きさおよび時間ステップの間隔などの条件が異なる計算を多数行い、計算精度と適用

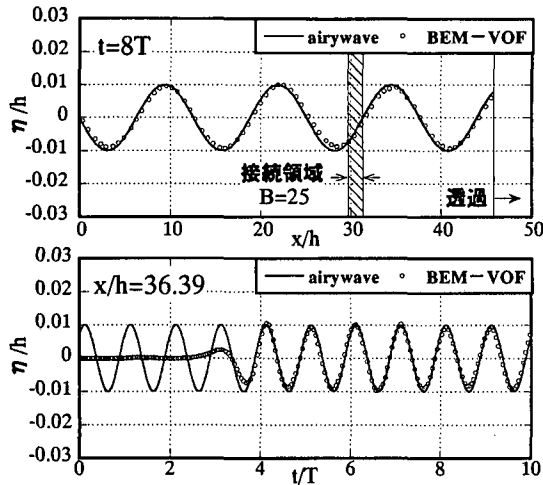


図-8(a) 空間波形と時間波形(透過条件, B=25)

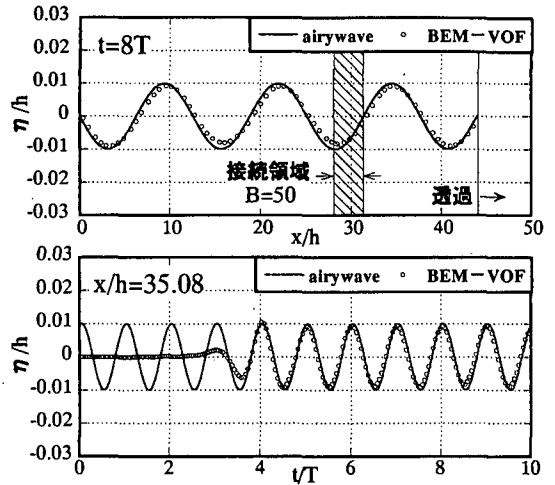


図-9(a) 空間波形と時間波形(透過条件, B=50)

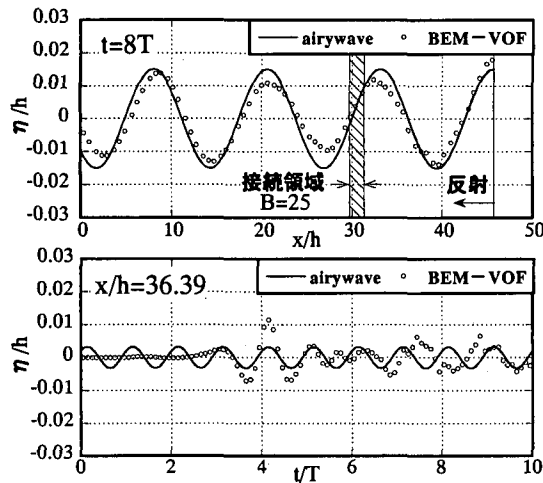


図-8(b) 空間波形と時間波形(反射条件, B=25)

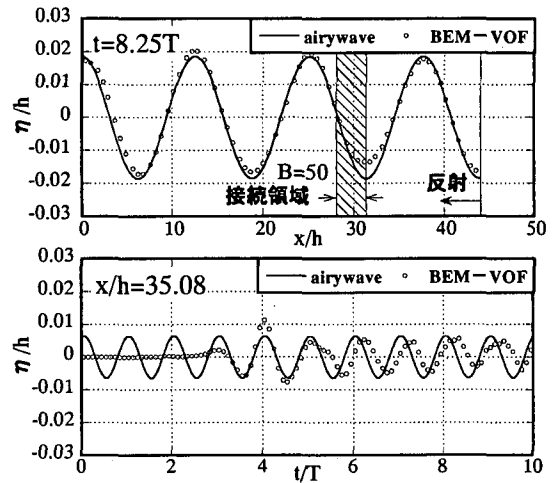


図-9(b) 空間波形と時間波形(反射条件, B=50)

範囲を調べる必要がある。しかし、同時に複数の条件を変化させて計算精度を検査することは困難なため、ここでは、考案した結合法において最も計算結果に影響すると思われる接続領域(重複している計算領域)の幅について検討した。計算条件は、接続領域の幅(B)を25セル, 50セル, 100セルの3通りとし、計算領域など他の条件については図-4に示す条件と同じである。

図-9および図-10に透過条件および完全反射条件における重複幅50セルおよび100セルのそれぞれについて空間波形および時間波形の計算結果と微小振幅波理論による理論値との比較を示す。なお、重複幅25セルについては前掲の図-8に示している。重複幅50セルについてみると、透過条件(図-9(a))では空間波形($t=8T$)、時間波形($x/h=35.08$)共に計算値と理論値は良く一致している。また、完全反射条件(図-9(b))では、VOF領域において空間波形($t=8.25T$)の計算値は理論値と比べ波の谷の部分で差が生じ、時間波形($x/h=35.08$)も若干乱れているものの、図-8(b)に示す重複幅25セルの場合に比べ全体的に計算値と理論値の一致の程度が向上している。重複幅100セルについては、透過条件(図-10(a))では、計算値の平均水位が若干上昇しており、完全反射条件

(図-10(b))では、計算値の波高が増大していることがわかる。さらに、時間波形を見ると計算値は大きく乱れている。また、反射条件の全てのケースにおいて、計算値の周期にずれが生じていることがわかる。

以上の結果から、ここで行った計算条件(入射波、計算領域など)においては、接続領域の幅は50セル程度が最も適切な設定となる。しかしながら、反射条件においては、波の周期にずれが生じる等、现阶段では不十分な点があり、計算精度をより向上するための工夫が必要といえる。

透過条件では本解析法による計算値と理論値との一致の程度が良いことから、具体的に透過条件における計算精度を評価するため、本解析法による計算結果とBEMおよびVOFそれぞれ単独での計算結果との比較を行った。図-11に重複幅を25セルとした本解析法による空間波形とBEMおよびVOFによる空間波形の比較を示す、図より、単純な微小振幅波の伝播を対象とした計算であるが、3手法の計算結果には若干の差が生じていることがわかる。図-12は図-11に示す空間波形について計算値と理論値との2乗誤差を比較したものである。図より、BEMによる計算精度が格段に良いことが分る。また、この計算条件では、

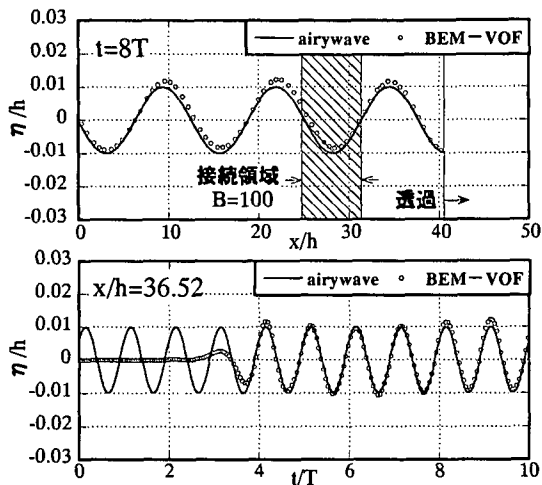


図-10(a) 空間波形と時間波形(透過条件, B=100)

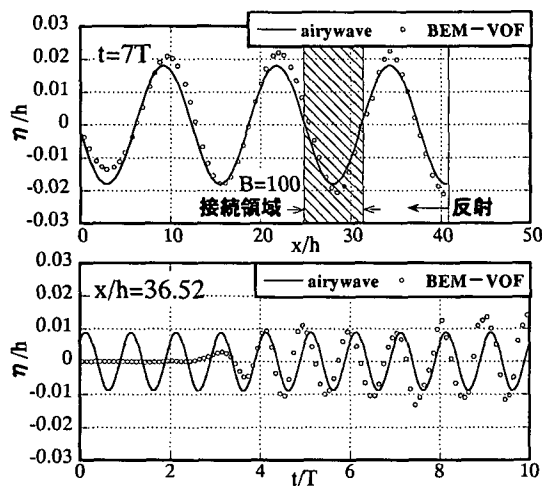


図-10(b) 空間波形と時間波形(反射条件, B=100)

本解析法は計算時間により2乗誤差が変動しているが、平均的にみてVOF法のみでの計算とさほど変わらない精度で計算が行われていると考えられる。このときの計算に要した時間を比較するとBEMが最も短く、VOFではBEMの5.4倍、本解析法では3.1倍であった。計算条件が異なると、各手法が計算に要する時間も変化するものと思われるが、VOF法のみで計算を行う場合、計算領域が広く現象が複雑であるほど多大な計算時間を必要とすることから考えると、非線形性の強い現象を対象とする場合には、VOF法のみによる解析に比べ本解析法が有利であるといえる。

4. あとがき

VOF法のみでの計算に比べると、本計算法は格段に計算時間を短縮出来ることから、計算精度および安定性の向上を図ることで、優れた解析法になり得るものと思われる。しかしながら、現段階では改善の余地が多く、特にVOF領域からの反射波が存在する場合、BEMとVOFとの接続領域で波形の乱れが生じやすい。この理由として、BEMとVOFとの計算精度の差によるところが大きいと考えられる。すなわち、BEMとVOF法では、同程度の計算精度を確保するため

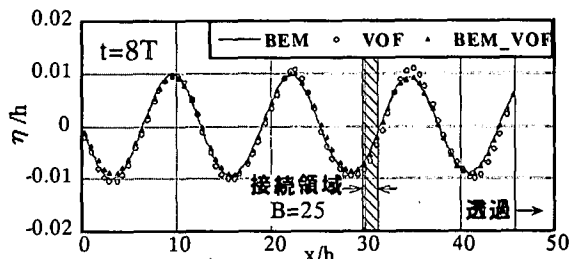


図-11 透過条件における空間波形の比較

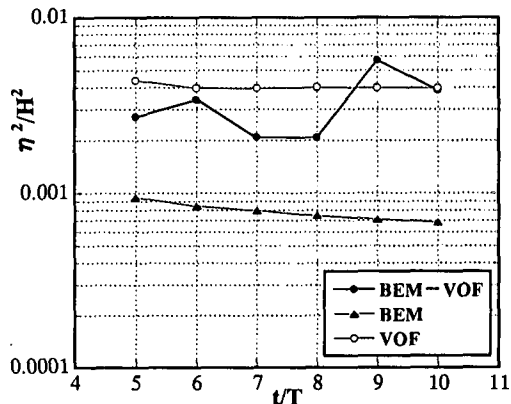


図-12 計算精度の比較

に必要な要素やセルの大きさと時間ステップの間隔が必ずしも一致しないため、例えば、BEMでの1ステップの計算に対しVOF法では数ステップの計算が必要になる。したがって、接続領域で物理量を滑らかに接続するためには、BEMとVOF法のそれぞれについて時間ステップや計算点間隔による計算精度を十分に検討する必要がある。

参考文献

- 1) 例えば(財)沿岸開発技術研究センター(2001), 数値波動水路の研究・開発
- 2) 井島武士, 永田修一: グリーンの公式による非定常有限振幅波の数値解析, 第26回海岸工学講演会論文集, pp.80-83, 1979.
- 3) 滝川清, 田淵幹修: 有限要素法による波動解析について—運動する境界面を有する場合, 第27回海岸工学講演会論文集, pp.1-5, 1980.
- 4) 大山巧, 灘岡和夫: 非線形不規則波動場を対象とした数値波動水槽の開発, 土木学会論文集, No.429, pp.77-86, 1991.
- 5) 吉田明德, 村上啓介, 山城賢: 多成分不規則波と没水構造物との非線形干渉解析, 第43回海岸工学講演会論文集, pp.791-796, 1996.
- 6) 細山田得三, 吉田茂, 早川典生, 犬飼直之, 中田芳貴: SOLA-SURF法による潜堤周辺の波動場の3次元計算, 第45回海岸工学講演会論文集, pp.157-160, 1998.
- 7) 川崎浩司: 潜堤構造物による砕波変形と再生過程に関する基礎的研究, 名古屋大学学位論文, 1998.
- 8) Nichols, B. D., Hirt, C. W. and Hotchkiss, R. S.(1980), SOLA-VOF: A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries, Los Alamos Scientific Laboratory report LA-8355