

境界要素法を用いた波動場解析における Legendre-Gauss積分について

Boundary integral using The Legendre-Gauss quadrature in BEM

大橋正臣¹・村上智一²・佐藤幸雄³・濱中建一郎⁴

Masami OHASHI, Tomokazu MURAKAMI, Yukio SATO and Ken-ichiro HAMANAKA

¹学生員 工修 北見工業大学 大学院工学研究科 (〒090-8507 北海道北見市公園町165番地)

²北海道東海大学 大学院理工学研究科 (〒005-8601 北海道札幌市南区南沢5-1-1)

³正会員 工博 北見工業大学 工学部土木開発工学科 (〒090-8507 北海道北見市公園町165番地)

⁴正会員 工博 北海道東海大学 工学部海洋環境学科 (〒005-8601 北海道札幌市南区南沢5-1-1)

The Boundary element method (BEM) implemented by the Green's integral equation is used to solve wave field governed by the Laplace or Helmholtz equation. When the boundary is divided into small segments and the integral on each segment is performed by a numerical method, the boundary integral equation is approximated by a linear algebraic equation. Locating the singular point on each segment, a simultaneous equation is obtained and can be solved by use of standard matrix method. Usually a simple trapezoidal rule is used on the numerical integration on the segments, and it has suitable accuracy at least in the linear analysis. But when the method is extended to nonlinear analysis, much higher accuracy is needed in the integral of multiplication of the linear potential and its derivatives in the forcing terms of surface condition.

In the present paper, we investigate the accuracy of boundary integral with the Legendre-Gauss quadrature.

Key Words : Legendre-Gauss quadrature, Boundary element method

1. はじめに

波動場解析をする際、速度ポテンシャルが存在する問題では、ラプラス方程式や鉛直方向に関数を仮定できる場合はヘルムホルツ方程式を解くこととなる。水中に構造物がある解析、水深が複雑に変化する解析、また任意形状をした港湾内の静穏度解析をする場合では、グリーンの公式を用いた境界要素法が簡便であると云える。この方法では適当な特異関数を用いて積分方程式を導き、境界を微小要素で離散化し、最終的には微小要素上の未知数に対する連立線形方程式を解くことに問題を帰着させる。

境界を微小要素で離散化した際、微小セグメント内の積分に関して、中央点で近似する台形則が広く用いられてきている。しかし、この問題を高次の有限振幅波まで考えた場合、例えば、ストークス波の場合、水面の境界条件式の強制項が線形解とその微係数（水面流速）の積で構成されている事を考えると、線形解の誤差を最小限にする必要がある。また、境界要素法で波動場中の流速を算出する際、Doublet形主要解を用いるが、Source形主要解に比べ特異性が強いために台形則や線形近似では必要な

精度が得られないことが、浜中・工藤(1996)によって報告されている。

よって本研究では、Source形、Doublet形主要解を使用した境界要素法における微小セグメント中の積分に関して、Legendre-Gaussの積分公式を用いて誤差を低減させることを目的とする。

2. 基礎方程式と境界条件

非圧縮、非粘性流体の非回転運動を仮定する。また、周期解を仮定すると、速度ポテンシャルは、

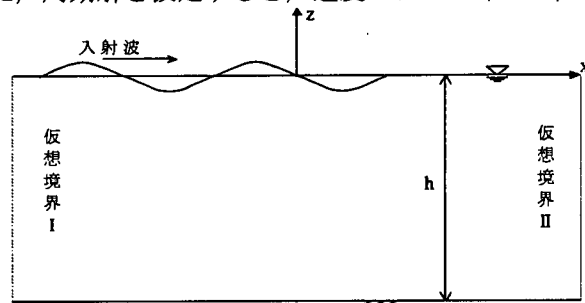


図-1 座標系

$$\Phi = \text{Re}\{ \phi e^{-i\omega t} \} \quad (1)$$

これに対する基礎方程式と境界条件は、

$$\Delta \phi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad \text{on } z=0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=-h \quad (4)$$

特に入射側、透過側に仮想境界をそれぞれ設け、仮想境界上の速度ポテンシャルは以下のように、入射側境界には入射波、反射波、及び減衰定在波、透過側境界には透過波と減衰定在波を仮定する。

$$\phi_I = ia \frac{g}{\omega} \left\{ (e^{-ikx} + K_R e^{ikx}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{k_n x} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right\} + c.c. \quad (5)$$

$$\phi_{II} = ia \frac{g}{\omega} \left\{ K_T e^{-ikx} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k_n x} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right\} + c.c. \quad (6)$$

ここで K_R , K_T は、反射率、透過率を表し、波数 k , および減衰定在波の波数 k_n は以下の分散関係を満足するものとする。

$$\omega^2 = gk \tanh kh = -gk_n \tan k_n h \quad (7)$$

また、一般的に境界要素法を使用する場合は、何らかの構造物を対象にする事から、境界条件として構造物表面の境界条件も必要となる。

3. 境界要素法

(1) 積分方程式

グリーンの公式から導かれる積分方程式は、

$$C\phi(x_0, z_0) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (8)$$

ここで、 s は領域を囲む境界を表し、 $\partial/\partial \nu$ は境界上の外向き法線方向微分を表す。また、特異関数 G は Source 形主要解を使用する。

$$G = \log r \quad (9)$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

ここで、 (x_0, z_0) は特異点の座標を示す。定数 C は特異点の位置が、境界上の場合 $C=\pi$ 、領域内部の場合は $C=2\pi$ とする。

(2) 離散化

(8) 式の積分方程式を図-2のように、通し番号をつけた微小セグメントに分割し、特異点を配置したセグメントを i 番目とすると、セグメントの中央点の

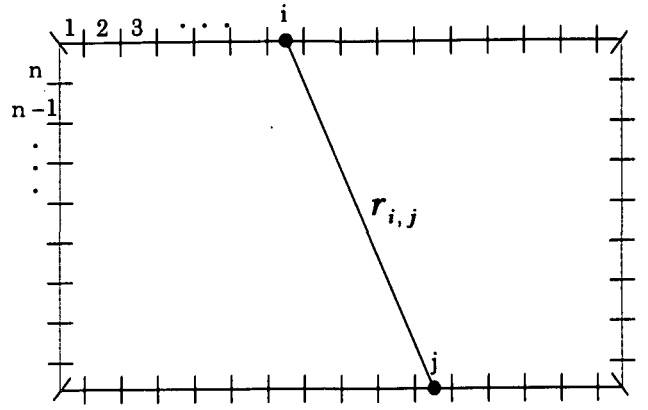


図-2 離散図

速度ポテンシャルとその法線微分を未知数とする線形方程式が得られる。

$$\pi \phi_i = \sum_j^s (\phi_j \bar{E}_{i,j} - E_{i,j} \bar{\phi}_j) \quad (10)$$

$$\bar{\phi}_j = \partial \phi_j / \partial \nu$$

ここで、 $i \neq j$ のとき、

$$E_{i,j} = \int_{\Delta s_j} G ds, \quad \bar{E}_{i,j} = \int_{\Delta s_j} \frac{\partial G}{\partial \nu} ds$$

$i = j$ のとき、

$$E_{i,i} = \left(\log \frac{\Delta s_i}{2} - 1 \right) \Delta s_i, \quad \bar{E}_{i,i} = 0$$

ここで、 Δs は微小セグメントの長さを表す。また、境界条件は速度ポテンシャルとその法線微分との関係となっていることから、未知数は、セグメントの数と同数の速度ポテンシャルとなる。

次に特異点を各セグメントに順次配置することにより、未知数の数だけ方程式が得られ、連立させることにより、境界上の速度ポテンシャルを算出することができる。

4. 微小セグメント中の積分

(1) 台形則

セグメントの中央点の値で代表させた台形則を用いると、

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= \int_{\Delta s_j} G ds = G(x_j, z_j; x_i, z_i) \Delta s_j \\ &= \log r_{i,j} \Delta s_j \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{i,j} &= \int_{\Delta s_j} \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \frac{\partial}{\partial \nu} G(x_j, z_j; x_i, z_i) \Delta s_j \\ &= \mathbf{v} \cdot \nabla (\log r_{i,j}) \Delta s_j \end{aligned} \quad (12)$$

$$r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

ここで $\mathbf{v}$ は法線ベクトルを示す。

(2) Legendre-Gauss積分

Legendre-Gaussの積分公式は、 $[-1, 1]$ で直交性を持つLegendreの多項式 $P_N(\xi)$ とその根を分点に持ち $P_N(\xi)$ を使用したLagrangeの補間多項式で、非積分関数 $f(\xi)$ を、 $2N-1$ 次の多項式と近似するものである。

Legendreの多項式 $P_N(\xi)$ は、

$$P_N(\xi) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\xi^N} (\xi^2 - 1)^N \quad (13)$$

上式を用いた、Legendre-Gaussの積分公式は、

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \frac{b-a}{2} \sum_{L=1}^N w_L f(\xi_L) + \alpha \quad (14)$$

$$\xi_L = \frac{b-a}{2} \xi_{0L} + \frac{b+a}{2}$$

$$w_L = \int_{-1}^1 \frac{P_N(\xi)}{(\xi - \xi_{0L}) P'_N(\xi_L)} d\xi \quad (L=1, 2, 3, \dots, N)$$

ここで ξ_{0L} は、 $P_N(\xi)$ の零点、 α は打ち切り誤差である。

例えば、分点を3点とすると、Legendreの多項式 $P_3(\xi)$ および、重み w_L は、

$$P_3(\xi) = \frac{5\xi^3 - 3\xi}{2}$$

$$w_L = \frac{1}{3(5\xi_{0L}^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{5\xi^3 - 3\xi}{(\xi - \xi_{0L})} d\xi \quad (L=1, 2, 3)$$

より、以下の表になる。

表-1 3次のLegendre多項式の零点と重み

零 点 ξ_{0L}	重 み w_L
0	8/9
$\pm\sqrt{3/5}$	5/9

よって、特異関数のLegendre-Gauss積分は、特異点の位置 p と分点の距離を $R_L = |p - \xi_L|$ とすると、以下のようになる。

$$E_{i,j} = \int_{\Delta s_j} G ds = \frac{|\Delta s_j|}{2} \sum_{L=1}^3 w_L \log R_L$$

$$\bar{E}_{i,j} = \int_{\Delta s_j} \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \frac{|\Delta s_j|}{2} \sum_{L=1}^3 w_L \{ \mathbf{n} \cdot \nabla (\log R_L) \}$$

$$\xi_L = \frac{|\Delta s_j|}{2} \xi_{0L} + \xi_{1/2}$$

ここで、 $\xi_{1/2}$ はセグメントの中央点の座標を示している。

5. 弱非線形解析の場合

波動場を弱非線形であると仮定した場合、速度ポテンシャル Φ を以下のように摂動展開する。

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots \quad (15)$$

ここで、 ε は非線形性を表すパラメーターとする。

同様に周期解を仮定すると、これまでの線形波（1次オーダーの解）を利用して、2次オーダーの拘束波を求めることができる。2次オーダーの速度ポテンシャル $\Phi^{(2)}$ は、

$$\Phi^{(2)} = \text{Re} \{ \phi^{(2)} e^{-2i\omega t} + \phi^{(2)*} \} \quad (16)$$

ここで、 $\phi^{(2)}$ は時間的に変化しない定常項である。

2次オーダーの拘束波の基礎方程式と境界条件は、

$$\Delta \phi^{(2)} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - 4\omega^2 \phi = -\frac{2i\omega^3}{g} \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + i\omega \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \\ + 2i\omega \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - i\omega \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{on } z=0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=-h \quad (19)$$

2次オーダーの水面条件の強制項は、1次オーダーの水面の速度ポテンシャル、その鉛直方向(z)微分、 z の2階微分と水平方向(x)微分によって構成されている。その内、速度ポテンシャルは、これまで述べたように境界要素法によって算出される。また、鉛直方向微分、 z の2階微分は1次オーダーの水面境界条件から、速度ポテンシャルを使って表すことができる。よって、水面での水平方向微分、つまり水面の水平流速を導出する必要がある。

6. Doublet形Green関数

(1) Source形とDoublet形の特異関数

(9)式の特異関数はSource形特異関数であり、これを用いた積分方程式の境界上の積分によって表されるのは、特異点上の速度ポテンシャルであることはこれまで述べてきた。それに対し、Doublet形特異関数は特異点上の速度ポテンシャルの微係数を表している。

(2) 積分方程式

Doublet形特異関数を使用した積分方程式を導出する。まず、Source形特異関数の特異点が領域内部にある場合の積分方程式は、

$$2\pi\phi(x_0, z_0) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds$$

上式の積分方程式を特異点の座標で微分すると、

$$2\pi \frac{\partial \phi(x_0, z_0)}{\partial x_0} = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v \partial x_0} - \frac{\partial G}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (20)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(x_0, z_0)}{\partial z_0} = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v \partial z_0} - \frac{\partial G}{\partial z_0} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (21)$$

このとき(9)より、

$$\frac{\partial G}{\partial x_0} = -\frac{x-x_0}{r^2} \equiv D_1 \quad (22)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_0} = -\frac{z-z_0}{r^2} \equiv D_2 \quad (23)$$

D_1 , D_2 はDoublet形特異関数で、(20), (21)は以下のようにDoublet形特異関数に対する積分方程式となる。

$$2\pi \frac{\partial \phi(x_0, z_0)}{\partial x_0} = \int_s \left(\phi \frac{\partial D_1}{\partial v} - D_1 \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (24)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(x_0, z_0)}{\partial z_0} = \int_s \left(\phi \frac{\partial D_2}{\partial v} - D_2 \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (25)$$

(24), (25)より、Source形特異関数の積分方程式(19)と同様に離散化できる。ここで高次の解析について考えれば、水面の水平流速を求めれば良いので、

$$2\pi \frac{\partial \phi}{\partial x_0} = \sum_j \left(\phi_j \bar{E}_{i,j} - E_{i,j} \bar{\phi}_j \right) \quad (26)$$

この時、Doublet形特異関数の特異点近傍のセグメントの積分に関しては、

$i = j$ のとき、

$$(\phi_j \bar{E}_{i,j} - E_{i,j} \bar{\phi}_j) = \Delta s_j \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right)_0 + \pi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 \quad (27)$$

となる。

境界上の速度ポテンシャルとその法線微分が得られ、この積分方程式(26)を使用する事により、水面の水平流速が得られる。

通常は、Source形特異関数を用いた積分方程式で境界要素法を解き、その後Doublet形特異関数を用いた積分方程式に代入し、速度ポテンシャルの微係数を得ることとなる。

7. 結果

計算条件として波動場は、図-1のように、断面2次元で水深一定とし、反射構造物などは存在しないこととする。

図-3~5は、特異関数としてSource形主要解を使用し、境界要素法を用いて波動場解析したときの反射率である。ここで、実線はLegendre-Gaussの積分公式(分点3)で積分したもの(境界条件に減衰定在波を考慮)で、破線は台形則を用いたもの(入射進行波のみ)である。また、点線は台形則で減衰定在波を考慮したものである。もちろん構造物など波を反射させることは無いので、真値は零である。

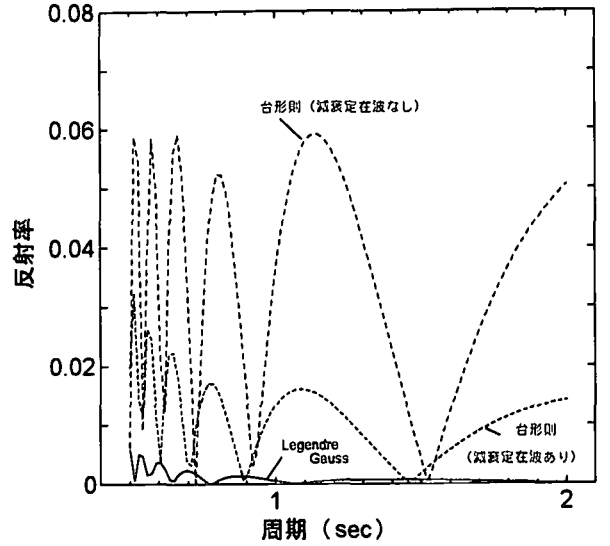


図-3 周期の変化に対する反射率
 $h=0.2m$, $L=1.2m$

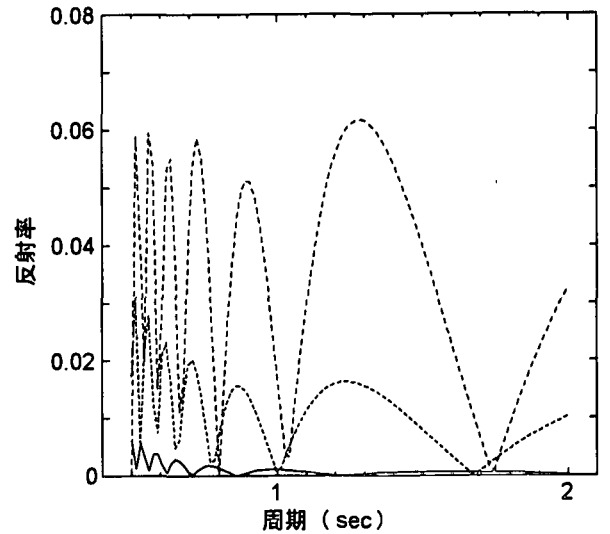


図-4 周期の変化に対する反射率
 $h=0.2m$, $L=1.4m$

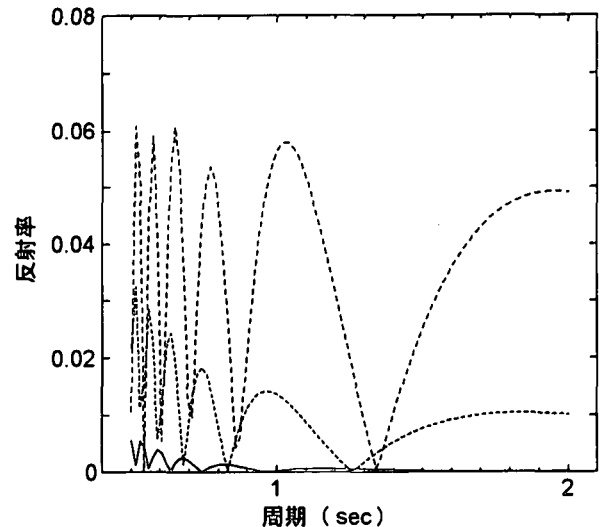


図-5 周期の変化に対する反射率
 $h=0.3m$, $L=1.2m$

図-3は、水深0.2m、セグメントの幅を1cmとし、仮想境界ⅠからⅡまでの距離Lを1.2mとした。図-4は図-3と同様に水深0.2m、セグメントの幅を1cmとし、仮想境界ⅠからⅡまでの距離Lは1.4mとした図である。また、図-5はセグメントの幅を1cm、仮想境界ⅠからⅡまでの距離Lは1.2mで、水深を0.3mとした図である。

これらの図より、解析領域の大きさに関わらず、台形則で減衰定在波を考慮しない場合よりも考慮したもの、そして、Legendre-Gauss積分と精度が良くなっていることが分かる。

流速に関する検討について、境界上の速度ポテンシャルとして真値を使用した。特異関数はDoublet形主要解を使用し、(26)式の積分方程式により水平流速を算出した。図-6は水面の位置変化における水平流速について示したものである。ここで、横軸は水面上の位置である。実線は真値であり、破線はLegendre-Gauss積分、点線は台形則を用いた結果である。また、計算領域の水平距離Lは1.0m、振幅は0.02m、水深は0.2m、入射波周期Tは0.8secとした。この図から、端点付近を除いたところでは、台形則、Legendre-Gaussの積分が、共に真値に近い値を持っている。しかし、端点付近で台形則は真値との差が大きくなっている。これは端点では直角に曲がった境界となり、隣のセグメント中央点との距離が近くDoublet形のように特異性が強い場合は、台形則では誤差が大きくなる。しかし、Legendre-Gaussの積分公式で積分したものは、精度が良い事が分かる。

図-7は、水面の水平流速の真値と計算値の差の絶対値を表した図である。計算条件は図-6と同様であり、真値と計算値の差の絶対値を示している。この図からすべての位置でLegendre-Gauss積分が台形則より、精度が良いことがわかる。

8. まとめ

Source形、Doublet形特異関数を使用した結果は、共にLegendre-Gauss積分を使用した方法が台形則を利用したものより精度が良いことから、境界要素法を用いて高次の有限振幅波まで考えた場合に使用する線形解としては、Legendre-Gauss積分を使用することが有利であると云える。

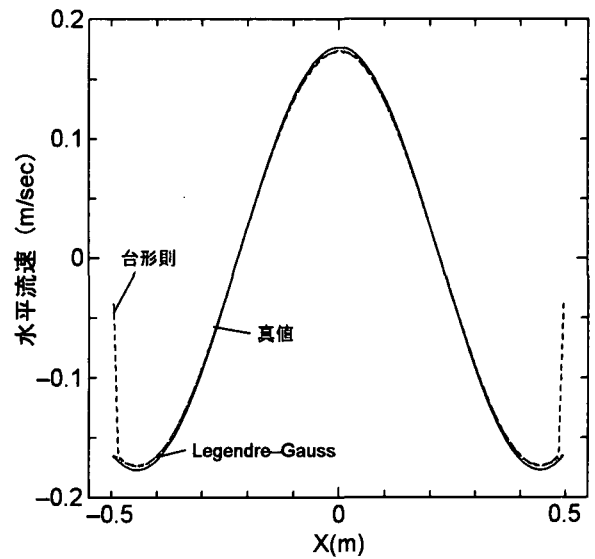


図-6 水面の位置の変化における水平流速
h=0.2m, T=0.8sec

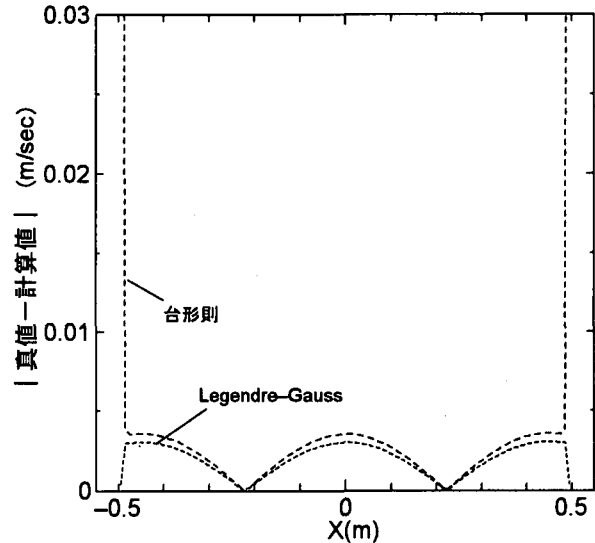


図-7 水平流速の誤差
h=0.2m, T=0.8sec

参考文献

工藤康一, 佐藤幸雄, 浜中建一郎: 境界要素法による波動場解析におけるDoublet形特異関数の境界上積分精度, 海洋開発論文集, Vol. 12, pp. 7-12, 1996.