

# 複合水路における波の非線形性について

## NON-LINEARITY OF WAVES IN A CHANNEL WITH ABRUPTLY CHANGED WIDTH

野村圭司<sup>1</sup>・古田泰久<sup>2</sup>・濱中建一郎<sup>3</sup>

Keiji NOMURA, Yasuhisa FURUTA and Ken-ichiro HAMANAKA

<sup>1</sup> 学生員 北見工業大学 大学院工学研究科 (〒090-8507 北見市公園町 165 番地)

<sup>2</sup> 理修 北海道東海大学 大学院理工学研究科 (〒005-8601 札幌市南区南沢 5-1-1-1)

<sup>3</sup> 正会員 工博 北海道東海大学教授 工学部海洋開発工学科 (〒005-8601 札幌市南区南沢 5-1-1-1)

There are several papers concluding that the free long waves are generated to compensate the discontinuity of the forced long waves across the harbour (or channel) mouth. But the linear waves should be continuous across the mouth and the forcing terms in the free surface condition also should be continuous. Therefore, there is no reason for the forced waves to have discontinuity across the mouth.

In the present paper, we re-analyze the problem of Bowers (1977) in more exact way and show that the numerical discontinuity of the forced waves comes from the Gibbs phenomenon of the Fourier analysis. Therefore this discontinuity has no physical meaning and do not generate the free long waves.

**KEY WORDS** : Nonlinearity, free long waves, forced waves, gibbs phenomenon

### 1. はじめに

これまでに港湾において、非線形長周期自由波の発生原因は港口部での長周期拘束波の不連続性を補うことによって生じると仮定されてきた。この問題をはじめて論じたのは Bowers(1977)<sup>1)</sup>であり、このとき非線形の効果が示された。さらに、Wu and Liu (1990)<sup>2)</sup>は Bowers の理論をもとに矩形港湾に拡張し、multiple-scale 摂動法を用いて同様の結果を得ている。Bowers の解析では摂動法を用いて 2 次のオーダまで展開したが線形解を導く際、港口部の接続条件を近似的に扱っており、不完全な線形解を用いている。しかしながら、線形波は連続であり、それによって構成される 2 次の水面条件の強制項(非斉次項)も同様に連続であるべきである。したがって、港口部に渡って拘束波が不連続性を持つことは物理的な理由を持たない。Wu and Liu の場合 first variables を slow variables から区別して、長波に対する散乱波の影響を無視して考えている。散乱波による強制項は空間において first variables の関数で、また時間に関して slow variables の関数である。それ故にそれらの影響は無視されるべきではない。

このことから本研究では、摂動法を用いて Bowers が扱ったものと同様の水路に対し、接続条件になら近似を用いず、また散乱項も考慮して

解析し拘束波の不連続性を再検討することを目的とする。

### 2. 基礎方程式と摂動展開

今、計算領域として Bowers(1977)と同様に簡単な共鳴水路 (Fig.1) を考える。領域 I, II とともに水深は一定で、流体運動は非圧縮、非粘性、非回転とすると速度ポテンシャルを仮定することができる。

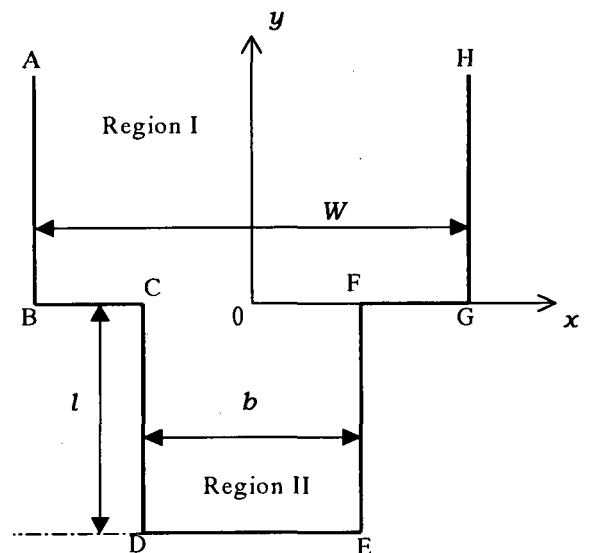


Fig.1 Schematic diagram of the channel

よって、基礎方程式と境界条件は以下のように表せる。

$$\Delta\Phi = 0 \quad (2.1)$$

$$\Phi_z = \eta_t + \nabla\eta \cdot \nabla\Phi \quad \text{on } z = \eta \quad (2.2)$$

$$\Phi_t + g\eta + \frac{1}{2}\{(\nabla\Phi)^2 + \Phi_z^2\} = 0 \quad \text{on } z = \eta \quad (2.3)$$

$$\Phi_z = 0 \quad \text{on } z = -h \quad (2.4)$$

$$\Phi_v = 0 \quad \text{on the side walls} \quad (2.5)$$

ここで  $\Delta \equiv (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$ ,

$$\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y).$$

$\eta$  は水面変位、 $v$  は水路側壁に対する法線微分を表す。水面の境界条件式(2.2), (2.3)の非線形性を考慮するために摂動法を用いて解析する。

$$\Phi = \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \dots \quad (2.6)$$

$$\eta = \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + \dots \quad (2.7)$$

(2.6), (2.7)を(2.1)~(2.5)に代入して整理すると  $\Phi^{(n)}$ ,  $\eta^{(n)}$  に対する基礎方程式と境界条件が得られる。

$\varepsilon$  の1次のオーダーでは

$$\Delta\Phi^{(1)} = 0 \quad (2.8)$$

$$\Phi_z^{(1)} = \eta_t^{(1)} \quad \text{on } z = 0 \quad (2.9)$$

$$\Phi_z^{(1)} + g\eta^{(1)} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (2.10)$$

$$\Phi_z^{(1)} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (2.11)$$

$$\Phi_v^{(1)} = 0 \quad \text{on the side walls} \quad (2.12)$$

$\varepsilon$  の2次のオーダーでは

$$\Delta\Phi^{(2)} = 0 \quad (2.13)$$

$$\Phi_z^{(2)} - \eta_t^{(2)} = -\eta^{(1)}\Phi_{zz}^{(1)} + \nabla\eta^{(1)} \cdot \nabla\Phi^{(1)} \quad \text{on } z = 0 \quad (2.14)$$

$$\Phi_t^{(2)} + g\eta^{(2)} = -\eta^{(1)}\Phi_{tt}^{(1)} - \frac{1}{2}\{(\nabla\Phi^{(1)})^2 + (\Phi_z^{(1)})^2\} \quad \text{on } z = 0 \quad (2.15)$$

$$\Phi_z^{(2)} = 0 \quad \text{on } z = -h \quad (2.16)$$

$$\Phi_v^{(2)} = 0 \quad \text{on the side walls} \quad (2.17)$$

### 3. 1次の解

角周波数  $\omega$  の入射波に対して  $\Phi^{(1)}$ ,  $\eta^{(1)}$  を以下の様に仮定することができる。

$$\Phi^{(1)} = i \frac{g}{\omega} f(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.1)$$

$$\eta^{(1)} = f(x, y) e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.2)$$

ここで  $c.c.$  は共役複素数を示す。

(3.1)と(3.2)は(2.9)~(2.11)と以下の分散関係式を満足する。

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.3)$$

(2.8)に(3.1)を代入すると  $f(x, y)$  に関する以下のHelmholtz方程式が得られる。

$$f_{xx} + f_{yy} + k^2 f = 0 \quad (3.4)$$

よって、側壁の境界条件(2.12)を満たす上式の解を求める。

#### 幅広水路 (領域 I)

入射波(振幅  $a$ )は狭い水路の口部(CF)に直角入射するものとし、広い水路の分布関数  $f_I$  は Bowersの解析に類似した以下の式で仮定する。

$$f_I = a \left[ \cos ky + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) e^{-\alpha_n y} \right] \quad (3.5)$$

ここで、第1項は入反射波を示す。

また、(3.5)を(3.4)に代入すると以下の式を得る。

$$\alpha_n = \sqrt{(2n\pi/W)^2 - k^2} \quad (3.6)$$

#### 幅狭水路 (領域 II)

(3.5)と同様に狭い水路の分布関数  $f_{II}$  は

$$f_{II} = a \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{2n\pi}{b} \left(x + \frac{b}{2}\right) \cosh \beta_n (y+l) \quad (3.7)$$

ここで、

$$\beta_n = \sqrt{(2n\pi/b)^2 - k^2} \quad (3.8)$$

(3.5)と(3.7)はそれぞれの領域に対し側壁の境界条件を満足する。 $A_n$ と $B_n$ の決定法は、 $y=0$ の $x$ 軸に沿った境界条件と接続条件を用いる。

領域 I と II との接続部の分布関数  $f_I$ ,  $f_{II}$  の接続条件より

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{2n\pi}{b} \left(x + \frac{b}{2}\right) \cosh \beta_n l \quad \text{on } |x| \leq b/2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$y$  方向の法線微分の接続条件は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} -\alpha_n A_n \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) \\ &= 0 \quad \text{on } \frac{b}{2} < |x| \leq \frac{W}{2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n B_n \cos \frac{2n\pi}{b} \left(x + \frac{b}{2}\right) \sinh \beta_n l \quad \text{on } |x| \leq \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

次に、Figure 2に示した  $y=0$  の  $x$  軸上に沿って

適当に点を選び(選点), その点に対して(3.9), (3.10)を適用する.

選点の総数は広い水路で  $M$  個, 狭い水路で  $N$  個となり, それぞれについて(3.9), (3.10)を適用する. よって, 未知数  $A_n$ ,  $B_n$  の数と式の数が一致して連立して解くことができる.

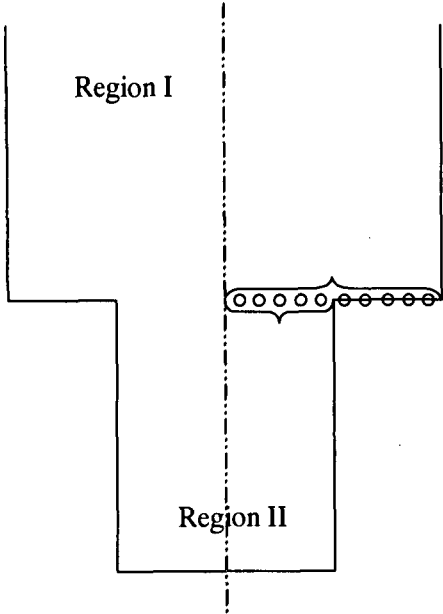


Fig. 2 Matching points

#### 4. 2次の解

ここでは入射波を角周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  ( $\omega_1$  と  $\omega_2$  はわずかな差を持つように与える) の2成分波として考える. また, 1次のオーダのポテンシャルと水面変位を以下の式で示す.

$$\Phi^{(1)} = \phi_1 e^{i\omega_1 t} + \phi_2 e^{i\omega_2 t} + c.c. \quad (4.1)$$

$$\eta^{(1)} = f_1 e^{i\omega_1 t} + f_2 e^{i\omega_2 t} + c.c. \quad (4.2)$$

ここで,

$$\phi_j = i \frac{g}{\omega_j} f_j \frac{\cosh k_j(z+h)}{\cosh k_j h} \quad (j=1,2)$$

$$\omega_j^2 = g k_j \tanh k_j h \quad (j=1,2)$$

とする.

水面の境界条件(2.14), (2.15)の強制項から異なる成分の角周波数を生じるが, ここでは長周期成分に関わる差の角周波数  $\omega_1 - \omega_2$  だけに着目する.

この角周波数による拘束波は

$$\Phi^{(2)} = \phi^{(2)} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c. \quad (4.3)$$

$$\eta^{(2)} = \xi^{(2)} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c. \quad (4.4)$$

となる.

これら(4.1), (4.2), (4.3)そして(4.4)を2次のオーダの水面境界条件(2.14), (2.15)に代入して整理すると

$$g\phi_z^{(2)} - (\omega_1 - \omega_2)\phi^{(2)} = G_1 f_1 \bar{f}_2 + G_2 \nabla f_1 \cdot \nabla \bar{f}_2 \quad (4.5)$$

となる. ここで  $\bar{f}_2$  は  $f_2$  の共役複素数を示す.

また,

$$G_1 = i \left\{ -g^2 \left( \frac{k_1^2}{\omega_1} - \frac{k_2^2}{\omega_2} \right) + (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1^2 - \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) \right\}$$

$$G_2 = 2ig^2 \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)$$

次にLaplace方程式(2.3)と, 水面と底面の境界条件(4.5), (2.16)を満たす拘束波の速度ポテンシャルを求める. (4.5)の右辺の水平分布関数を考慮すると  $f_1$ ,  $f_2$  を代入することで拘束波の速度ポテンシャルを得る.

幅広水路 (領域 I)

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & a_1 a_2 \left[ C_1 \cos(k_1 + k_2)y \frac{\cosh \gamma_1(z+h)}{\cosh \gamma_1 h} \right. \\ & + C_2 \cos(k_1 - k_2)y \frac{\cosh \gamma_2(z+h)}{\cosh \gamma_2 h} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} C_3 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) e^{-(\bar{\alpha}_{2,n} - ik_1)y} \frac{\cosh \gamma_3(z+h)}{\cosh \gamma_3 h} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} C_4 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) e^{-(\bar{\alpha}_{2,n} + ik_1)y} \frac{\cosh \gamma_4(z+h)}{\cosh \gamma_4 h} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} C_5 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) e^{-(\alpha_{1,n} - ik_2)y} \frac{\cosh \gamma_5(z+h)}{\cosh \gamma_5 h} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} C_6 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) e^{-(\alpha_{1,n} + ik_2)y} \frac{\cosh \gamma_6(z+h)}{\cosh \gamma_6 h} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_7 \cos \frac{2(m+n)\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) \\ & \quad \times e^{-(\alpha_{1,m} + \bar{\alpha}_{2,n})y} \frac{\cosh \gamma_7(z+h)}{\cosh \gamma_7 h} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_8 \cos \frac{2(m-n)\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) \\ & \quad \times e^{-(\alpha_{1,m} - \bar{\alpha}_{2,n})y} \frac{\cosh \gamma_8(z+h)}{\cosh \gamma_8 h} \left. \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

ここで,

$$C_j = \frac{F_j}{g\gamma_j \tanh \gamma_j h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \quad (j=1-8)$$

$F_j$  は(4.5)の強制項の関数形から決まり,  $\gamma_j$  は Laplace方程式から決まる.

幅狭水路（領域 II）

$$\phi^{(2)} = \frac{a_1 a_2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ D_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cosh(\theta_3 + \theta_4) \frac{\cosh \lambda_1 (z + h)}{\cosh \lambda_1 h} \right. \\ + D_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cosh(\theta_3 - \theta_4) \frac{\cosh \lambda_2 (z + h)}{\cosh \lambda_2 h} \\ + D_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cosh(\theta_3 + \theta_4) \frac{\cosh \lambda_3 (z + h)}{\cosh \lambda_3 h} \\ \left. + D_4 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cosh(\theta_3 - \theta_4) \frac{\cosh \lambda_4 (z + h)}{\cosh \lambda_4 h} \right] \quad (4.7)$$

ここで,

$$D_j = \frac{H_j}{g \lambda_j \tanh \lambda_j h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \quad (j=1 \sim 4)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\pi(m+n)(x+b/2)/b$$

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\pi(m-n)(x+b/2)/b$$

$$\theta_3 + \theta_4 = (\beta_{1,m} + \bar{\beta}_{2,m})(y+l)$$

$$\theta_3 - \theta_4 = (\beta_{1,m} - \bar{\beta}_{2,m})(y+l)$$

$H_j$  は(4.5)の強制項の関数形から決まり,  $\lambda_j$  は Laplace 方程式から決まる.

### 5. 数値解析

はじめに線形解から自然な波形が得られることを確かめた.

次に, 2 次オーダの水面の境界条件について (4.5) の右辺で表される強制項の水路口 (Fig.1 の CF) とその外側の側壁上 (Fig.1 の BC, FG) での値を Fig.3 に示す. このとき問題は軸対称構造物であるため横軸は水路口の中心から水路幅方向の距離を考え, 0~50 が水路口, 50~100 が水路口外側の側壁である. 以下, Fig.4~7 も横軸に対しては同様に考える. 強制項は 1 次オーダで構成されているので展開項数を変えても安定して水路口で連続しているのが Fig.3 から分かる. Fig.4 は (4.6), (4.7) で示される拘束波の速度ポテンシャルの水路口とその外側での値 ( $z=0$ ) を示す. さらに Fig.5 は同じ位置での速度ポテンシャルの法線微分を示す. この結果から拘束波は水路口で不連続となっているように見える. しかしながら, 法線微分は水路口の外側の側壁上で水路口とほぼ同じ値をとり零とならず不透過条件を満たしていない. 他の側壁では解の形から明らかに不透過条件を満たしている. 水路口の外側の側壁と他の側壁とは物理的になんら違いはないことからこの結果は認めがたい.

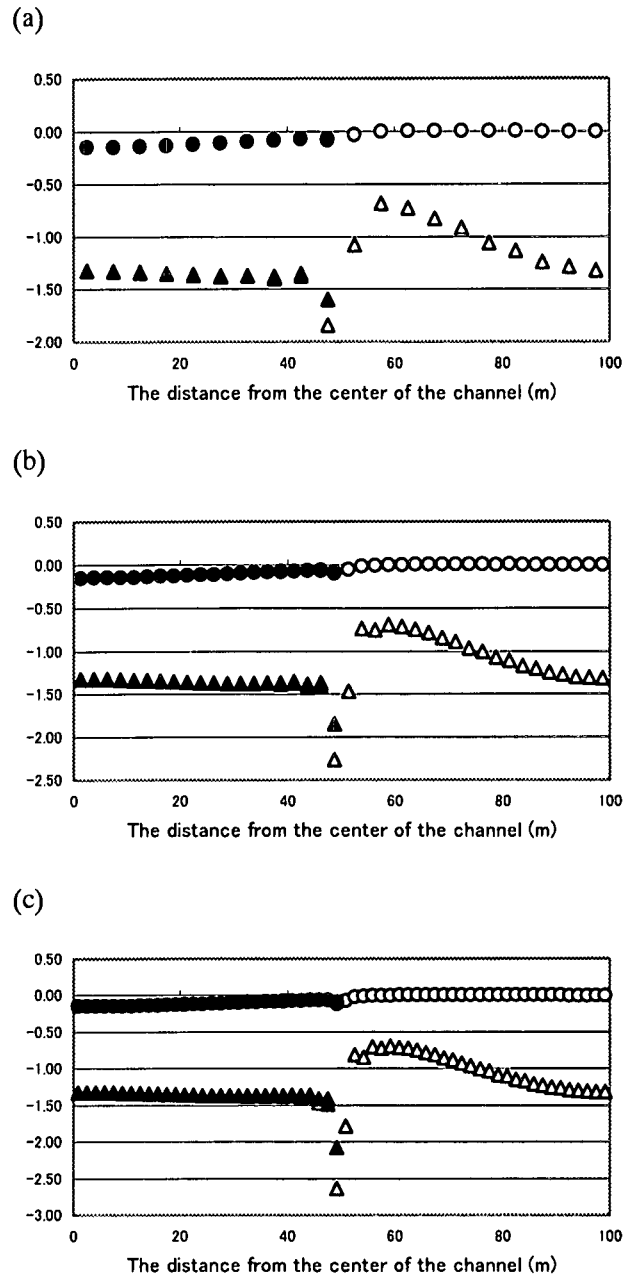


Fig.3 The forcing term of (4.5)

Real part : ○ (Region I), ● (Region II)

Imaginary part : △ (Region I), ▲ (Region II)

(a):  $M = 20, N = 10$

(b):  $M = 40, N = 20$

(c):  $M = 60, N = 30$

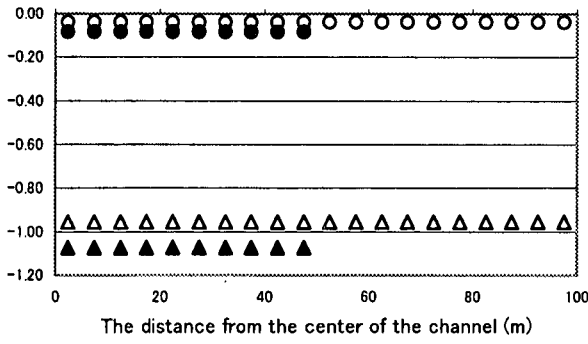


Fig. 4 The velocity potential of the forced waves  
 Real part : ○ (Region I), ● (Region II)  
 Imaginary part : △ (Region I), ▲ (Region II)  
 $M = 20, N = 10$

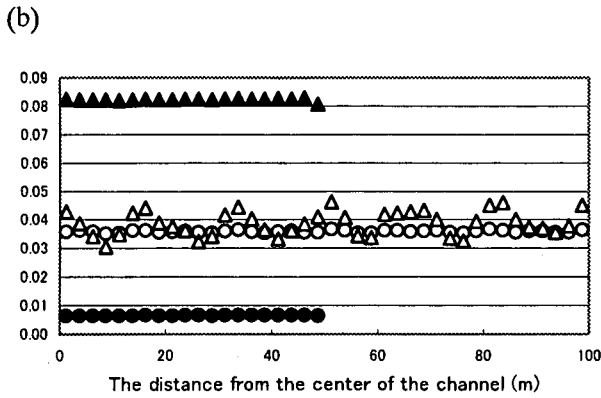
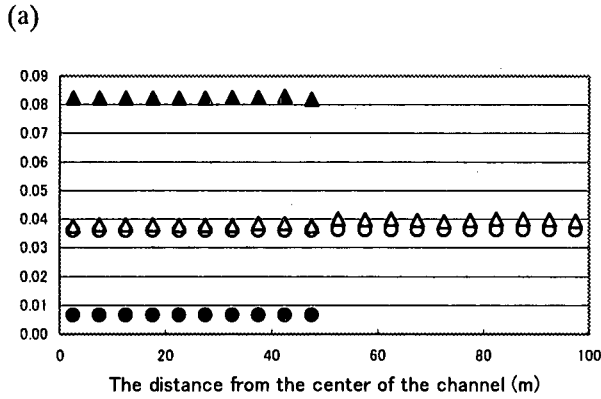


Fig. 5 The normal derivative of the forced waves  
 Real part : ○ (Region I), ● (Region II)  
 Imaginary part : △ (Region I), ▲ (Region II)  
 (a):  $M = 20, N = 10$   
 (b):  $M = 40, N = 20$

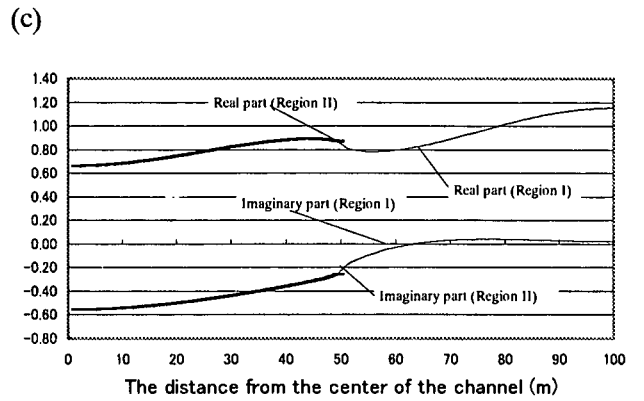
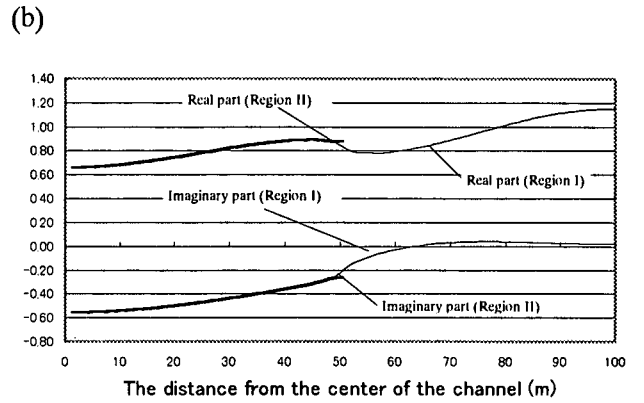
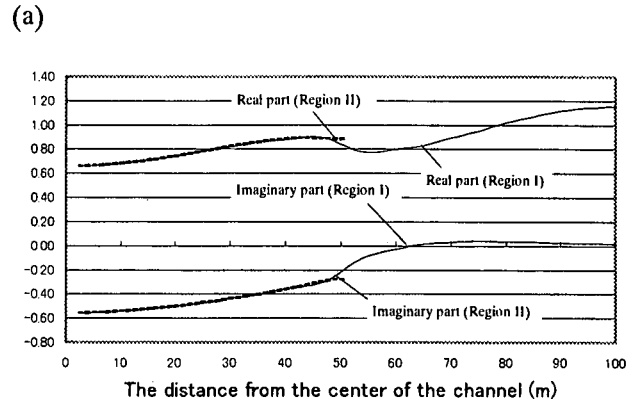
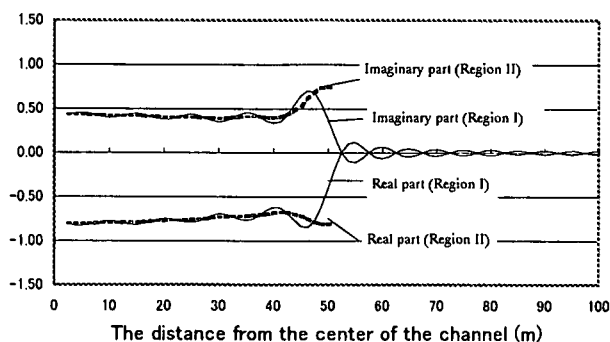
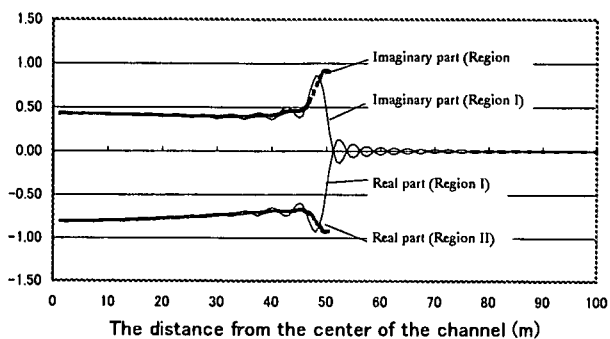


Fig. 6 The velocity potential of linear waves  
 (a):  $M = 20, N = 10$   
 (b):  $M = 40, N = 20$   
 (c):  $M = 60, N = 30$

(a)



(b)



(c)

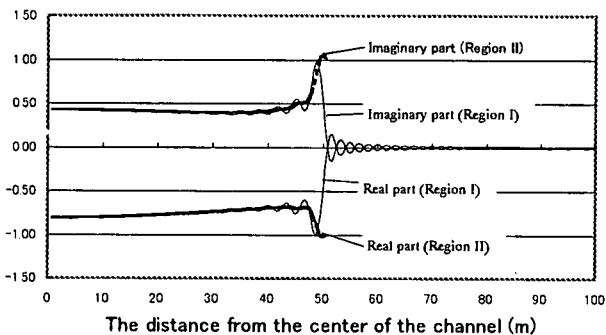


Fig. 7 The normal derivative of linear waves

(a):  $M = 20, N = 10$

(b):  $M = 40, N = 20$

(c):  $M = 60, N = 30$

この結果の原因を考えるために線形解の水路口での様子を選点の間も含め詳細に調べた。Fig.6は線形解のポテンシャルを示しており、水路口で滑らかに接続している。Fig.7は法線微分を示している。ふたつの領域での解が一致している位置は選点の位置である。これによれば水路口の選点上では法線微分は連続であるがそれ以外では不連続である。さらに、水路口の外側の側壁では選点上では境界条件を満たしているがそれ以外では大きく変動し境界条件を満たしていない。従って、この線形解は不完全であり、この解を用いて得られた拘束波の不連続性は物理的に意味を持たない。この変動はFourier 解析におけるGibbsの現象と思われ、展開項数を増やしても解消されない。

## 6. 結論

高次の自由波において発生の根拠とされている拘束波の不連続性について調べた。その結果、不連続性には線形解におけるGibbsの現象の影響が強くあると思われる。Bowersや本研究のように解の表記にFourier 級数を用いる限りこの現象を避けることは出来ない。従って、拘束波に不連続性が存在するか、しないかを確かめるには他の解析方法を開発する必要がある。

## 参考文献

- 1) Bowers, E. C.: Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, *J. Fluid Mech.*, Vol.79, pp71-92, 1977
- 2) Wu, J.-K. and L.-F. Liu: Harbour excitations by incident wave groups, *J. Fluid Mech.*, Vol.217, pp595-613, 1990