

波動場中の円柱近傍の 流れ構造に関する数値解析

NUMERICAL ANALYSIS FOR FLOW STRUCTURE AROUND A CIRCULAR CYLINDER IN WATER WAVES

佐藤 幸雄¹・濱中 建一郎²

Yukio SATO and Ken-ichiro HAMANAKA

¹正会員 博(工) 北見工業大学助教授 工学部土木開発工学科(〒090-8507 北見市公園町 165 番地)

²正会員 工博 北海道東海大学教授 工学部海洋開発工学科(〒005-8601 札幌市南区南沢 5 条 1 丁目)

In this paper, flow structure around a circular cylinder was calculated in each cases of waves of small amplitude in long waves, in shallow water and in deep water. The Boundary Element Method with the Green's integral equation was used for numerical analysis of the potential flow in field of wave motion. Also, in case of analysis of flow structure around the circular cylinder, vorticity equation and Poisson's equation for stream function were employed for governing equation, and flow structure with separation and fluid force acting upon the circular cylinder were calculated numerically, using the finite differential method and spectrum method. In the result of study, it was confirmed that flow structure or fluid force was evidently different in each cases of water waves. Further, fluid force by numerical analysis was compared with Morison's equation and was discussed.

Key Words: Flow structure, fluid force, separation, circular cylinder

1. まえがき

本論は 2 次元の波動場内に円柱を波の進行方向に対して直角, 水平に没水させて設置したとき, 円柱の表面に剥離を伴うような場合を考えて, 円柱表面の極く近傍における流れ場および円柱に働く流体力を求める事を目的とする. この場合, 今までは円柱より遠く離れたところの流れ関数に対する境界条件として, 円柱の直径が比較的小さい場合は円柱が存在しないときの微小振幅波の流速成分を使用したり¹⁾, また, 長波性の波に対しては水平振動流の流速成分を用いる²⁾など近似的な数値計算を行ってきた. しかし, 円柱の存在の有無により, 円柱近傍の流れ構造に差異が生じることは充分考えられ, より正確な境界条件に基づいた計算が必要である. 本研究では一般的な波動場として, 長波的な場合から深水波的な領域までを取り扱い, 種々の波動場に対する円柱近傍の流れ構造と剥離渦の発生状況を数値解析により明確にすることを目的とし, さらに剥離を伴う場合の円柱に働く流体力と, ポテンシャル流および Morison 式の場合との差異を比較検討することとした.

2. 数値解析

(1) ポテンシャル流の流れ場

円柱を取り囲む波動場をポテンシャル流と考えて, つぎのようなグリーンの積分公式を用いた境界要素法により, 流れ場のポテンシャル ϕ を求める. 図-1 に示すように, 円柱を囲む境界上のポテンシャル $\phi'(x_0, z_0)$ に対するグリーンの積分公式は,

$$\phi'(x_0, z_0) = \frac{1}{\pi} \int_S \left\{ \phi'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) - (\log r) \frac{\partial \phi'(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right\} dS \quad \dots (1)$$

であり, また, 領域内部のポテンシャル $\phi(x, z)$ に対しては,

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \phi'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) - (\log r) \frac{\partial \phi'(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right\} dS \quad \dots (2)$$

で与えられる. ここで, (ξ, η) は境界上の点の座標で, $\log r$ は 2 次元ラプラスの式の主要解,

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \eta)^2} \text{ である.}$$

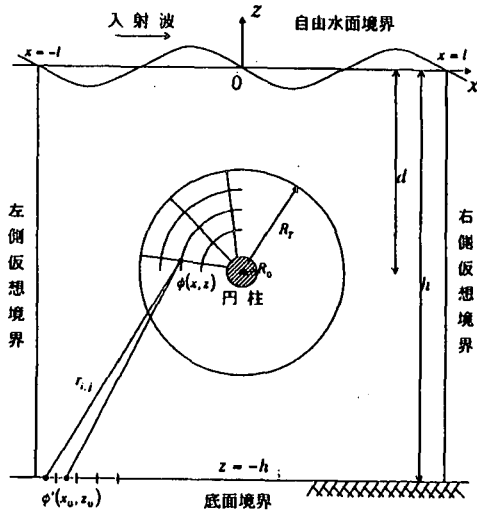


図-1 座標系(ポテンシャル流の場合)

計算メッシュ数; R 方向 32, θ 方向 32,

$R_T = 0.8d$, 境界上の分割点数 100~140

つぎに, 図-1 に示すように波動場を囲む境界, 底面, 円柱表面, 自由水面, 左・右の仮想境界上を区間長 ΔS , 区間個数 N 個に分割して式(1)を離散化すると

$$\phi'(i) = \sum_{j=1}^N \{ \bar{E}_{i,j} \phi'(j) - E_{i,j} \bar{\phi}'(j) \} \Delta S_j \quad \dots (3)$$

となり, ここで $\bar{\phi}' = \partial \phi' / \partial \nu$

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1}{\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) ds = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r_{i,j}) \Delta S_j$$

$$E_{i,j} = \frac{1}{\pi} \int_s \log r ds = \frac{1}{\pi} (\log r_{i,j}) \Delta S_j \quad (4)$$

また, 特に $i = j(x_0 \rightarrow \xi, z_0 \rightarrow \eta)$ のときは, $\log r$ の主値積分を用いて,

$$E_{i,i} = \frac{1}{\pi} (\log \frac{\Delta S_j}{2} - 1) \Delta S_j, \quad \bar{E}_{i,i} = 0 \quad (5)$$

となる。

つぎに, 表面波に微小振幅波を考えて, 各変量を各周波数 σ と重力の加速度 g により無次元化する。有次元量に $\hat{\cdot}$ を付けて表すと, 各無次元変量はそれぞれ,

$$(x, z) = (\hat{x}, \hat{z}) \sigma^2 / g,$$

$$(h, d, \eta) = (\hat{h}, \hat{d}, \hat{\eta}) \sigma^2 / g, \quad R_0 = \hat{R}_0 \sigma^2 / g,$$

$$t = \sigma \hat{t}, \quad (\phi, \psi) = (\hat{\phi}, \hat{\psi}) \sigma^3 / g^2, \quad \text{となり,}$$

無次元化された基本方程式および境界条件は, それぞれつぎのようになる。

速度ポテンシャルを $\Phi = \phi e^{i\omega t}$ とおいて,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \phi \quad (z=0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \quad (z=-h) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= 0 \quad (\text{円柱表面上}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (6)$$

ν ; 領域の外向き法線ベクトルを表す。

また, 左・右の仮想境界上のポテンシャルに減衰定在波を考慮して, 左側仮想境界上では,

$$\begin{aligned} \phi_{x=-l} &= e^{ikl} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ &+ \sum_{n=1}^M a_n e^{-ikl} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

右側仮想境界上では

$$\phi_{x=l} = \sum_{n=1}^M b_n e^{-ikl} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad \dots (8)$$

をそれぞれ与えた。(M; 散乱波の項数)

式(7),(8)中の無次元波数 k, k_n に関する分散関係式は $k \tanh kh = 1, k_n \tanh k_n h = -1$ である。(9) 以上の各式を使用して, 境界上のポテンシャル ϕ' に関する連立方程式を解いて, ϕ' を求めた。

さらに, 領域内部のポテンシャル ϕ については, 式(2)を同様に離散化して, 境界上のポテンシャル ϕ' を使用すると, 点 (x, z) の ϕ の値を一義的に求めることが出来る。

(2) 円柱近傍の流れ場

各変量を角周波数 σ と円柱の半径 R_0 により無次元化された, 渦度方程式と流れ関数に対するポアソン方程式はそれぞれ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} + \nu \Delta \omega \quad \dots (10)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \dots (11)$$

である。図-2の座標系にしたがって,

式(10)及び(11)を $x = e^r \cos \theta, z = e^r \sin \theta$ により $r-\theta$ に変換すると, 渦度方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= J^{-1} \left[- \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right. \\ &\left. + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad \dots (12) \end{aligned}$$

ポアソン方程式は,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -J\omega \quad (13)$$

ここで, J ; Jacobian で $J=e^{2r}$ である.

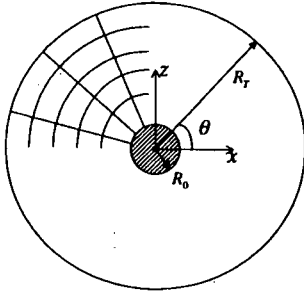


図-2 座標系と計算範囲(円柱近傍)

計算メッシュ数; R 方向 32, θ 方向 32

$$R_T = R_0 e^{\tau} = 10R_0 \quad (r_T = 2.3)$$

つぎに, r 方向には伸縮座標を使用して,

$$r = r_T \frac{e^{\xi} - 1}{e^{\xi_T} - 1} \quad (14)$$

と置き, r を ξ に変換すると, 式(12)および(13)は, それぞれ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J^{-1} \xi_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - J^{-1} \nu \left\{ (\xi_1)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \xi_2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right\} = 0 \quad \cdots (15)$$

$$\omega = -J^{-1} \left\{ (\xi_1)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \xi_2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right\} \quad \cdots (16)$$

のようになる. ここで, $\xi_1 = \partial \xi / \partial r$, $\xi_2 = \partial^2 \xi / \partial r^2$ 式(15)及び(16)に対する境界条件は, 円柱より遠く離れた $R_T = R_0 e^{\tau} = 10R_0$ ($r_T = 2.3$) の位置の

ポテンシャル流に対してコーシーリーマン方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad \cdots (17)$$

を使用する. また, 渦度に関しては, $\omega = 0$, 円柱表面上においては “non-slip” の条件より, ψ に対しては, $\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$ 渦度 ω に対しては

$$\text{Thom の式を用いて } \omega = -J^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial r} \left\{ \frac{2\psi (\Delta \xi)}{(\Delta \xi)^2} \right\}$$

圧力場については圧力方程式,

$$\Delta p = 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} \quad \cdots (18)$$

$$p = \hat{p} / \rho (\sigma R_0)^2, \quad \rho; \text{ 流体の密度}$$

を使用した. 圧力 p に対する境界条件は, 円柱表面上で,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

円柱より遠く離れた境界層外縁ではポテンシャル流の圧力を与えるものとして,

$$p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\phi e^{it} \quad \cdots (19)$$

である.

(3) 計算条件と計算方法

計算に使用した波動場の条件は表-1 に示すように通常の海域において発生する波を想定して, 長波性の波(CASE-1), 浅水波(CASE-2)および深水波(CASE-3)の 3 種を選んだ. 波の振幅 η はいずれも微小振幅とした. 計算方法は, 第一段階で円柱より遠く離れたポテンシャル流の領域(図-1)内の速度ポテンシャルを境界要素法により求める. その速度ポテンシャルの中より, 第 2 段階として円柱の半径 R_0 の 10 倍程度($R_T = 10R_0$)離れた位置の値を使用して, 式(17)により $\partial \psi / \partial r$ の値を有限要素法により求める. さらに, この $\partial \psi / \partial r$ の値を境界条件として, 円柱の極く近傍の渦度 ω , 流れ関数 ψ および圧力場 p と流体力 F を求める方法をとった. この場合, σ と g により無次元化した値 $(\partial \psi / \partial r)^*$, p^* と σ と R_0 で無次元化した $(\partial \psi / \partial r)$, p とは次の関係がある.

$$\partial \psi / \partial r = (\partial \psi / \partial r)^* (g / \sigma^2 R_0),$$

$$p = p^* (g / \sigma^2 R_0)^2$$

(4) 計算結果と考察

CASE-1, CASE-2 および CASE-3 の場合の水面形(無次元量)と流速ベクトル図(有次元量)

表-1 計算条件

波の種類		有次元量				無次元量					
		周期 $\hat{T}$ (sec)	水深 $\hat{h}$ (m)	波高 $\hat{H}$ (m)	最大流速 $\hat{U}_{\max}$	比水深 $\hat{h}/\hat{L}$	K.C.数	Re数	A	ν	波数 k
長波性	CASE-1	30.0	16.0	0.16	0.062	1/23.3	18.6	6186	1.6	0.00191	3.8
浅水波	CASE-2	10.0	16.0	0.30	0.110	1/7	10.2	10160	3.0	0.00064	1.4
深水波	CASE-3	5.0	24.0	0.40	0.070	1/1.6	3.5	6960	4.0	0.00032	1.0

没水深 $\hat{d} = 8.0(\text{m})$ (一定) 円柱半径 $R = 0.05(\text{m})$ (一定), 計算 cycle; 3cycle $\hat{U}_{\max}$; 円柱の中心位置における微小振幅波の水平最大流速 A, ν ; は, 角周波数 σ と円柱半径 $\hat{R}$ で無次元化した, 無次元振幅と無次元動粘性係数 k ; は, σ と重力加速度 g による無次元波数

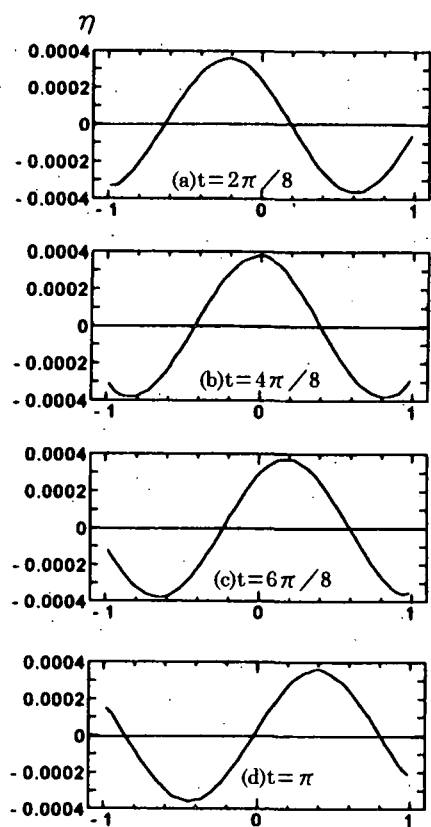


図-3(a)水面形(CASE-1)

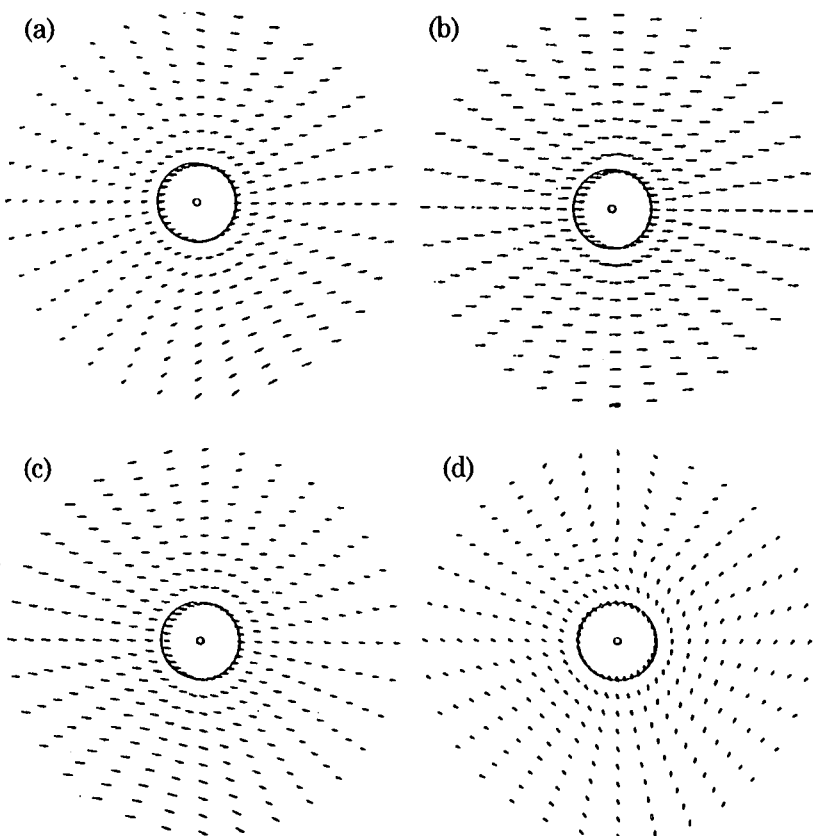


図-3(b)ポテンシャル流の流速ベクトル(CASE-1)

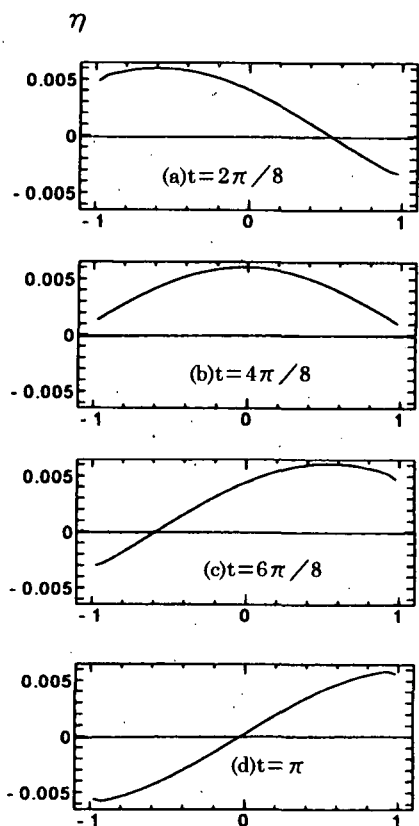


図-4(a)水面形(CASE-2)

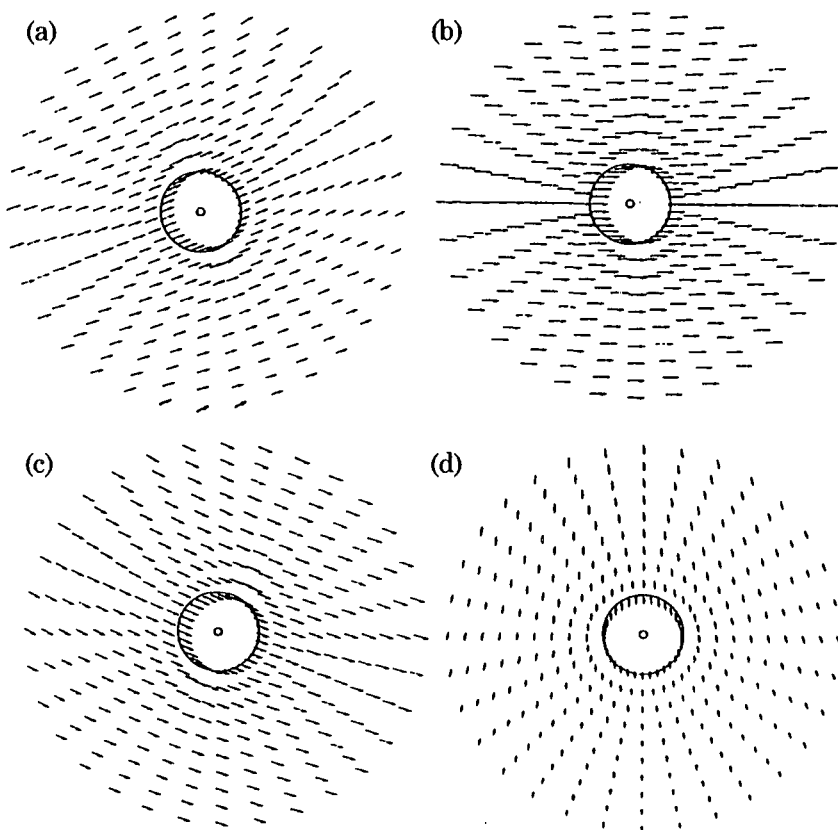


図-4(b)ポテンシャル流の流速ベクトル(CASE-2)

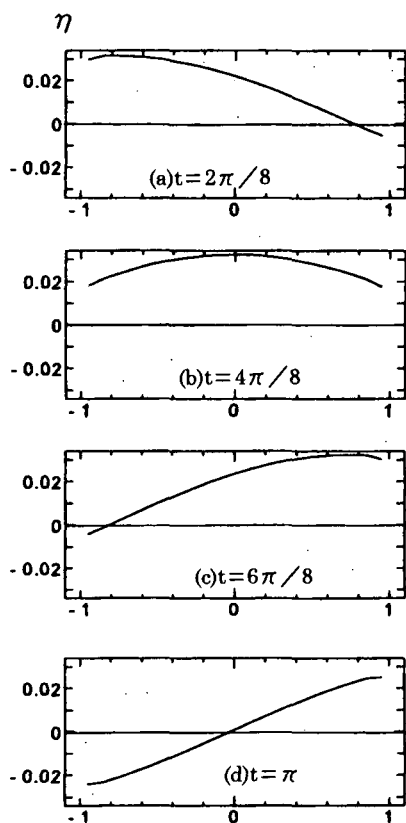


図-5(a)水面形(CASE-3)

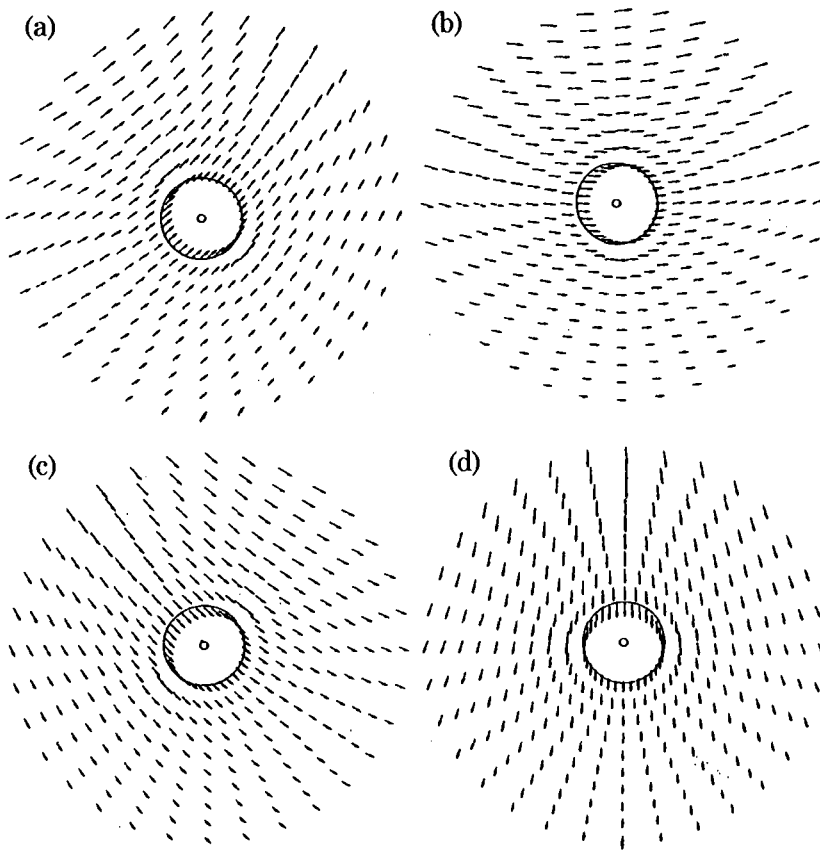


図-5(b)ポテンシャル流の流速ベクトル(CASE-3)

を示すと、長波性の波では図-3(a), (b)のようになり、 $t=0\sim\pi$ の半周期分ではあるが、流れは水平振動流に近い様相を示している。ただし、 $t=\pi$ では水平振動流の場合と異なり、水平、鉛直方向流速成分が表われている。同様の図を浅水波と深水波の場合について図-4(a), (b)と図-5(a), (b)に示した。流れの状態はベクトル図より浅水波の場合は楕円軌道を描き、深水波の場合はほぼ円軌道を描いているのが見られる。また、流速ベクトル図中の実線の小さい円は円柱を示し、少し大きな円は $R_T=10R_0$ (境界条件の位置)を示している。つぎに、ポテンシャル流の流速成分に規定されて発生する円柱近傍の流れの状態を示すと、CASE-1の場合は流れ関数のContoursの図-6(a)より、流れが図-3(b)の流速ベクトルに追従して発生し

ていることが分かり、また図-6(b)の渦度のContoursにおいても、流れに沿った剥離渦の発生が見られる。同様の図を CASE-2, CASE-3 について示すと、それぞれ流れ関数については図-7(a), 図-8(a)であり、渦度に関しては図-7(b)と図-8(b)である。これらの図はいずれも 3cycles 目の状態で前半の半周期分について示している。各 CASE について流れの状態は、長波、浅水波および深水波の特徴がよく表われていると云える。剥離渦については CASE-1 の場合が K.C.数も大きく渦の発生は大きいが、CASE-2 および CASE-3 の場合は K.C.数が小さいことに加えて、剥離渦が円柱上を回転することから、渦の発生が抑制されることが考えられ、この事は CASE-3 の深水波の場合により特徴づけられている。

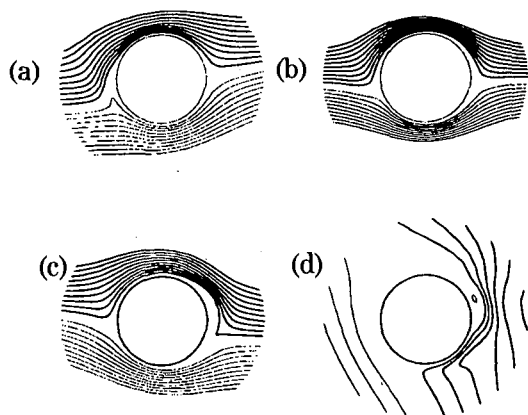


図-6(a)流れ関数のContours(CASE-1)

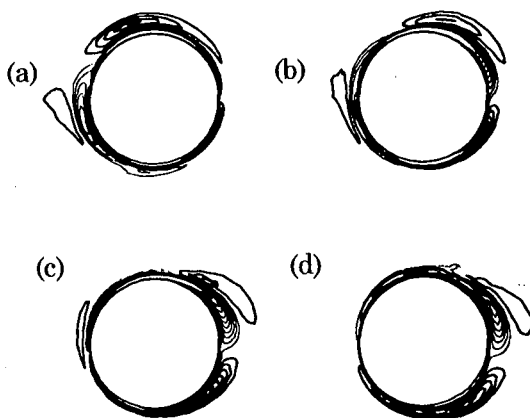


図-6(b)渦度のContours(CASE-1)

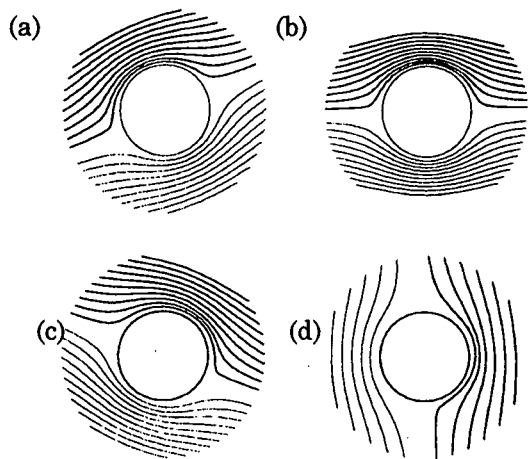


図-7(a) 流れ関数の Contours (CASE-2)

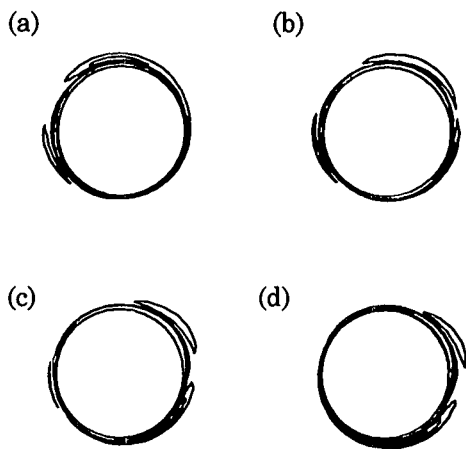


図-7(b) 渦度の Contours (CASE-2)

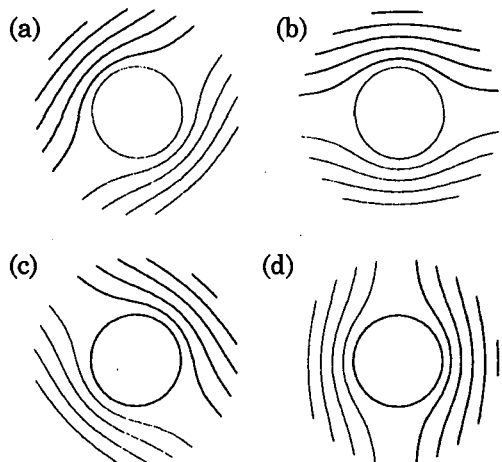


図-8(a) 流れ関数の Contours (CASE-3)

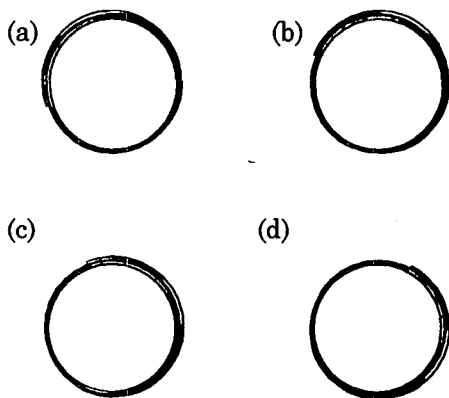


図-8(b) 渦度の Contours (CASE-3)

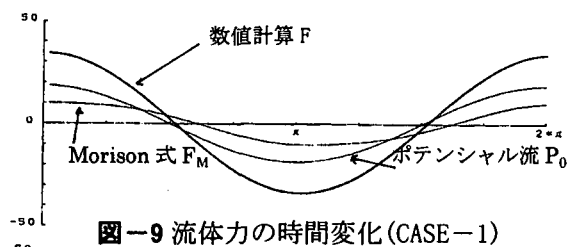


図-9 流体力の時間変化 (CASE-1)

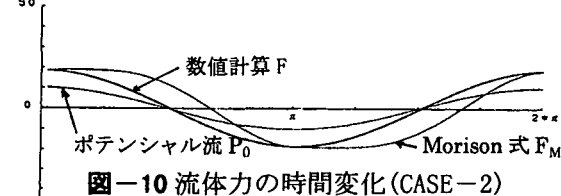


図-10 流体力の時間変化 (CASE-2)

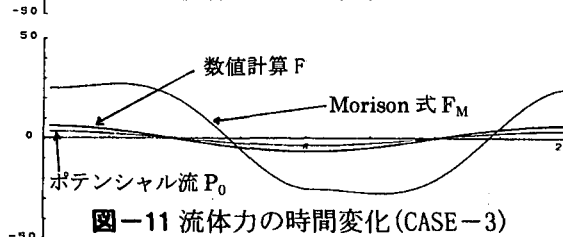


図-11 流体力の時間変化 (CASE-3)

図-9, 10 および 11 は円柱に働く流体力(水平方向成分)の時間変化について, 数値計算 $F(=P+\tau)$ とポテンシャル流 P_0 , Morison 式($C_D=1.17$, $C_M=2.0$ の場合) F_M を比較した図であるが, 剥離渦が大きく伴う CASE-1 では, 流体力の振幅 F_{max}

は P_0 , F_M に比べて 3 倍程度大きく現われる. また CASE-2 の場合は, F は F_M と同程度の値を示し, CASE-3 の場合は反対に F_M が F の 3 倍程度大きく現われることが分かる.

3. まとめ

- (1) 数値計算は波動場における円柱近傍の流れ状態を定性的によく再現することが分かった.
- (2) 波動場における流体力に Morison 式を適用する場合, 長波性の波の場合程 C_D , C_M を大きく見積もる必要があり, また, 深水波の波に対しては C_D , C_M は小さい値で良いと云える.
- (3) 今後は, 計算範囲を広げ各種の波に適用可能な C_D , C_M の値を求める必要がある.

参考文献

- 1) 奥村慎也, 佐藤幸雄, 渡辺靖憲: 波動場中の円柱まわりの流れ構造について, 海岸工学論文集 第 42 巻, pp831~835, 1995.
- 2) 佐藤幸雄, 浜中建一郎: 剥離を伴った振動流中の円柱に働く流体力について, 海岸工学論文集 第 40 巻, pp.856~860, 1993.

(1999. 4. 19 受付)