

境界要素法による波と浮体運動の相互干渉解析
Analysis for interaction between waves and motions of floating body
with the boundary element method

大橋 正臣*・浜中建一郎**・佐藤 幸雄***
 Masami Ohashi, Ken-ichiro Hamanaka, Yukio Sato

A boundary element method is proposed to analyze the interactions between waves and motions of a floating body. In this method, by use of a Green's function which satisfies the boundary conditions on the water surface and the bottom, the unknown variables are reduced to the amplitudes of motions of the floating body and the velocity potentials on the submerged surface and the breakwaters, if they are exist. these unknown variables can be obtained simultaneously by solving the discretized linear equations. The amplitudes of motions of the floating body are calculated and significant resonance between waves and the motions of body are appeared. The numerical results are confirmed by comparing to the experimental results in two-dimensional cases.

Key word ;floating body, interaction , boundary element method, Green's function

1. まえがき

波動場内、特に港湾のような有限海域内における浮体運動を純解析的に解くのは、非常に単純な浮体形状と港湾形状の場合に限られる(井島他:1972)。従って何らかの数値解析の手法を考える必要がある。数値解析の手法は一般的に、差分法、有限要素法、境界要素法が挙げられるが、浮体の回りの流れが完全に3次元であることを考慮すると境界要素法が有利であると考えられる。

境界要素法を用いた場合にも、波の場を予め求めそれによる流体力から浮体運動を求める方法と(清川他:1983、樫木他:1988、清川他:1993)、波の場と浮体運動を同時に解く方法とに大別される。しかしながら、前者の方法では比較的狭い港内や水路内で起こる波と浮体運動との相互作用を解くことは出来ない。一方後者でこれまで報告されている方法では(井島他:1978)、特異関数として主要解を用いているため、未知数を全境界(浮体没水面、水面、底面、防波堤没水面)に配置する必要がある、3次元解析では未知数が多大となり現実的ではない。

このことから本研究では、特異関数としてグリーン関数を用い、波の場と浮体運動とを同時に解く方法を提案する。この方法によれば未知数は浮体没水面と防波堤没水面に配置するだけで良く、必要な未知数の数は圧倒的に少なくてすむと同時に、波の場と浮体運動との相互作用も解析することが出来る。つまり、係船岸壁(波を反射する構造物)などが船舶の近くに存在する狭い港内でも、波によって船体動揺が起こり、動揺している船舶によって波が発生する現象を解くことが出来る。数値解析と同時に断面2次元水

槽を用いて、矩形浮体について実験を行い、実験結果と解析結果の比較検討を行う。ただし、解析と実験は岸壁(反射境界)などが、設置されていないものとする。

2. 基礎方程式

ポテンシャル流れと周期解を仮定する。

全ての变量を角周波数 $\hat{\omega}$ 、と重力加速度 $\hat{g}$ とで無次元化すると($\hat{\cdot}$ は有次元量を表す)、速度ポテンシャルは、 $\Phi = \text{Re}\{\phi e^{-it}\}$

これに対する基礎方程式と境界条件は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi \quad \text{on} \quad z = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -h \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = A(x, z) \quad \text{on} \quad S_B \quad (4)$$

ここで $A(x, z)$ は物体表面 S_B 上での表面の法線方向 n の移動速度の振幅を表す。

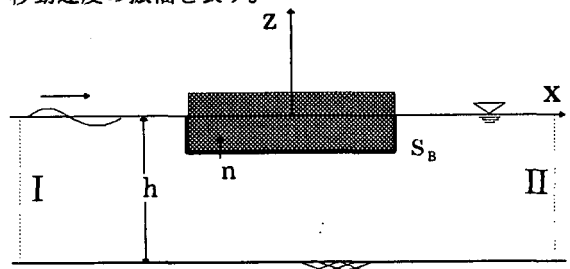


図1 座標系

* 学生員 北見工業大学大学院土木開発工学専攻 (090-8507 北海道北見市公園町 165 番地)

** 正 員 北海道東海大学工学部海洋開発工学科

*** 正 員 北見工業大学工学部土木開発工学科

3. Green 関数と積分方程式

グリーンの公式から導かれる積分方程式は、

$$C\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (5)$$

ここで、 G は特異関数、 S は領域を囲む境界を表す。また、 $\partial/\partial n$ は境界上の外向き法線方向微分を表す。特異関数 G として主要解を用いると境界 S の全てについて積分する必要がある。

一方、John の Green 関数は、断面 2 次元では、

$$G = C_0 e^{ik|x-x_p|} \cosh k(z_p + h) \cosh k(z + h)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-k_m|x-x_p|} \cos k_m(z_p + h) \cos k_m(z + h)$$

$$C_0 = i/k(h + \sinh^2 kh)$$

$$C_m = 1/k_m(h - \sin^2 k_m h)$$

この Green 関数は水面と底面の境界条件を満たしている。水面と底面は積分に寄与しない。放射条件を考慮すると、遠方境界 I、II では反射波・透過波は積分に寄与しない。従って、入射波と物体表面の積分だけが残る。よって、(5) は以下になる。

$$C\phi(P) = \int_{S_b} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS + C_0 \phi_0 \quad (6)$$

尚、 ϕ_0 は入射波ポテンシャルを表し、係数 C は、特異点 が浮体表面上にあるとき $-1/2$ 、領域内・水面・底面上にあるとき -1 として積分するものとする。

4. 浮体の運動方程式

断面 2 次元問題を考えているから、浮体の運動は鉛直・水平方向の並進運動と、浮体の中心点（例えば重心）の回りの回転運動とで表される。

中心点の座標を X 、 Z で表すと、

$$m \left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) = F_x \quad (7)$$

$$m \left(\frac{d^2 Z}{dt^2} \right) = F_z \quad (8)$$

$$I \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = M \quad (9)$$

ここで m は浮体の質量、 F_x 、 F_z は浮体に働く x 方向、 z 方向の力、 I は慣性モーメント、 θ は回転角、 M は浮体に働く力のモーメントである。

同様に、 $\hat{\omega} \cdot \hat{g} \cdot \hat{\rho}$ で無次元化している ($\hat{\rho}$: 水の単位体積重量)。

5. 浮体没水面上の境界条件

浮体没水面上の境界条件としては、運動学的境界条件と力学的境界条件が考えられる。

運動学的境界条件は、浮体の運動に伴う没水面の法線方向速度は、それに接する流体の法線方向速度に一致することを意味する。力学的境界条件は、流体の運動を生じさせ

る力は、回りの流体力と浮体に働く重力とであることを意味する。次に運動学的境界条件・力学的境界条件の導出について述べる。

5-1. 運動学的境界条件

最初に回転運動を考える。回転運動の中心は、重心の位置とする。静水時の重心の位置を (x_0, z_0) とし、それを原点とする局所座標を (x', z') とする。静水時の表面の座標を (x'_0, z'_0) と極座標 (R, θ) で表す (図 2 参照)。

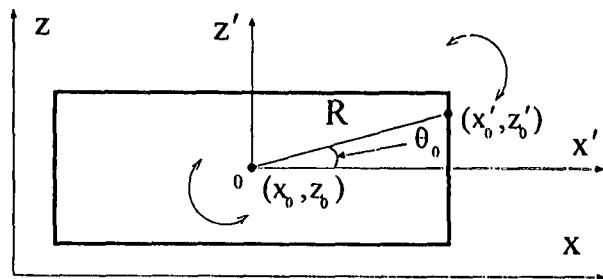


図 2 局所座標

θ が周期変動するとして

$$\theta = \theta_0 + \alpha_\theta e^{-it} \quad (10)$$

α_θ : 回転運動振幅

時刻 t の時の (x', z') 座標は

$$\begin{aligned} x' &= R \cos \theta = R \cos(\theta_0 + \alpha_\theta e^{-it}) \\ &= R \cos \theta_0 \cos(\alpha_\theta e^{-it}) - R \sin \theta_0 \sin(\alpha_\theta e^{-it}) \end{aligned}$$

微小振幅とすると ($|\alpha_\theta| \ll 1$)

$$|\alpha_\theta e^{-it}| \ll 1$$

従って

$$\begin{aligned} x' &= R \cos \theta_0 - \alpha_\theta e^{-it} R \sin \theta_0 \\ &= x'_0 - \alpha_\theta z'_0 e^{-it} \end{aligned} \quad (11)$$

同様に

$$\begin{aligned} z' &= R \sin \theta = R \sin(\theta_0 + \alpha_\theta e^{-it}) \\ &= R \sin \theta_0 \cos(\alpha_\theta e^{-it}) + R \cos \theta_0 \sin(\alpha_\theta e^{-it}) \\ &= R \sin \theta_0 + \alpha_\theta e^{-it} R \cos \theta_0 \\ &= z'_0 + \alpha_\theta x'_0 e^{-it} \end{aligned} \quad (12)$$

水平・鉛直方向の並進運動による変位を各々

$$\alpha_x e^{-it}, \quad \alpha_z e^{-it} \quad (13)$$

α_x : 水平運動振幅、 α_z : 鉛直運動振幅

とすると、3つの運動による位置は

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_0 + \alpha_x e^{-it} - \alpha_\theta z'_0 e^{-it} \\ z = z_0 + z'_0 + \alpha_z e^{-it} + \alpha_\theta x'_0 e^{-it} \end{cases} \quad (14)$$

従って、x 方向、z 方向の速度は

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = (-i\alpha_x + i\alpha_0 z_0') e^{-it} = B_x e^{-it} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = (-i\alpha_z - i\alpha_0 x_0') e^{-it} = B_z e^{-it} \end{cases} \quad (15)$$

(x_0', z_0') の位置の物体表面の法線単位ベクトルを (n_x, n_z) とすると、(15) から (4) の A は

$$A = (n_x, n_z) \cdot (B_x, B_z) = n_x B_x + n_z B_z \quad (16)$$

として与えられる。

5-2. 力学的境界条件

浮体に働く力は、鉛直方向の重力と流体から受ける力である。非粘性流体を仮定しているので、流体から受ける力は、圧力だけとなる。

(1) 浮体に働く力

浮体に働く流体力はポテンシャル流れに対する圧力方程式から、($\hat{\cdot}$ は有次元量を表す)。

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \frac{\hat{P}}{\hat{\rho}} + \hat{g}\hat{z} + \frac{1}{2}(\nabla \hat{\Phi})^2 = 0$$

線形化して、無次元化すると、

$$P = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - z \quad (17)$$

$\Phi = \phi e^{-it}$ を代入、

$$P = i\phi e^{-it} - z \quad (18)$$

圧力は物体表面の法線方向に働くから、

$$\begin{cases} P_x = n_x P \\ P_z = n_z P \end{cases} \quad (19)$$

浮体に働く全圧力は、

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{S_B} P_x dS \\ &= ie^{-it} \int_{S_B} n_x \phi dS - \int_{S_B} n_x z dS \end{aligned} \quad (20)$$

(20) の右辺第 2 項は静水圧による水平方向の全圧力で、その積分は零になるから、

$$F_x = ie^{-it} \int_{S_B} n_x \phi dS \quad (21)$$

ここで法線ベクトル $\mathbf{n}$ は、浮体の運動に伴って向きを変えるから、(21) の右辺の n_x も運動に伴って、値を変えるが微小運動を仮定しているから、静止時の n_x とする。

浮体に働く鉛直方向の全圧力と浮体に働く重力とを合わせて、(m : 無次元重力)

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{S_B} P_z dS - m \\ &= ie^{-it} \int_{S_B} n_z \phi dS - \int_{S_B} n_z z dS - m \end{aligned} \quad (22)$$

(22) の右辺の第 2 項は静水圧による鉛直方向の全圧力で、(14) を用いて静水時の表面の位置とそれからの偏差で表すと、

$$\begin{aligned} \int_{S_B} n_z z dS &= \int_{S_B} n_z (z_0 + z_0') dS \\ &\quad + e^{-it} \int_{S_B} n_z (\alpha_z + \alpha_0 x_0') dS \end{aligned}$$

となるが、上式の右辺第 1 項は静水時の静水圧による力で、明らかに重力と釣り合っているから、

$$\begin{aligned} F_z &= ie^{-it} \int_{S_B} n_z \phi dS \\ &\quad - e^{-it} \int_{S_B} n_z (\alpha_z + \alpha_0 x_0') dS \end{aligned} \quad (23)$$

ここで n_z は (21) の場合と同様、運動を微小と仮定して静止時の値をとるとする。

(2) 浮体に働くモーメント

重心回りの力のモーメントは

$$M = x' P_z - z' P_x$$

従って、没水面全体では、

$$M = \int_{S_B} (x' P_z - z' P_x) dS \quad (24)$$

(18)、(19) から、圧力は

$$\begin{aligned} P_x &= in_x \phi e^{-it} - n_x x \\ P_z &= in_z \phi e^{-it} - n_z z \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} x' P_z - z' P_x &= i\phi e^{-it} (n_z x' - n_x x') \\ &\quad - z' (n_z x' - n_x z') \end{aligned}$$

であるから (24) は、

$$\begin{aligned} M &= ie^{-it} \int_{S_B} (n_z x' - n_x z') \phi dS \\ &\quad - \int_{S_B} (n_z x' - n_x z') z' dS \end{aligned} \quad (25)$$

ここで (x', z') は局所座標であることを考慮し、高次項を省略すると、

$$\begin{aligned} M &= ie^{-it} \int_{S_B} (n_z x_0' - n_x z_0') \phi dS \\ &\quad - \int_{S_B} (n_z x_0' - n_x z_0') z_0' dS \\ &\quad - e^{-it} \int_{S_B} (n_z x_0' - n_x z_0') (\alpha_z + \alpha_0 x_0') dS \\ &\quad - e^{-it} \int_{S_B} \{ n_z (\alpha_z - \alpha_0 z_0') - n_x (\alpha_z + \alpha_0 x_0') \} z_0' dS \end{aligned} \quad (26)$$

(26) の右辺第 2 項は、静止時における静水圧による力のモーメントであるから釣り合いの条件で零。(26) は、 α_x 、 α_z 、 α_0 でまとめて、

$$\begin{aligned} M &= ie^{-it} \int_{S_B} (n_z x_0' - n_x z_0') \phi dS \\ &\quad - e^{-it} \alpha_x \int_{S_B} n_z z_0' dS \\ &\quad - e^{-it} \alpha_z \int_{S_B} (n_z x_0' - 2n_x z_0') dS \\ &\quad - e^{-it} \alpha_0 \int_{S_B} \{ n_z (x_0')^2 - 2n_x x_0' z_0' - n_z (z_0')^2 \} dS \end{aligned} \quad (27)$$

(3) 全運動の力学的境界条件

運動方程式(7)、(8)、(9)を書き直し、力学的境界条件を導出する。

x方向・z方向の重心の移動、重心回りの回転は

$$\alpha_x e^{-it}, \quad \alpha_z e^{-it}, \quad \alpha_\theta e^{-it}$$

から、それぞれの時間tの2階微分は、

$$d^2 X / dt^2 = -\alpha_x e^{-it}, \quad d^2 Z / dt^2 = -\alpha_z e^{-it}$$

$$d^2 \theta / dt^2 = -\alpha_\theta e^{-it}$$

運動方程式(7)は、(21)より

$$-m\alpha_x = i \int_{S_B} n_x \phi dS \quad (28)$$

運動方程式(8)は、(23)より

$$-m\alpha_z = i \int_{S_B} n_z \phi dS - \int_{S_B} n_z (\alpha_z + \alpha_\theta x'_0) dS \quad (29)$$

運動方程式(9)は、(26)より

$$\begin{aligned} -I\alpha_\theta &= i \int_{S_B} (n_z x'_0 - n_x z'_0) \phi dS \\ &\quad - \alpha_x \int_{S_B} n_z z'_0 dS \\ &\quad - \alpha_z \int_{S_B} (n_z x'_0 - 2n_x z'_0) dS \\ &\quad - \alpha_\theta \int_{S_B} \{ n_z (x'_0)^2 - 2n_x x'_0 z'_0 - n_x (z'_0)^2 \} dS \end{aligned} \quad (30)$$

この(28)、(29)、(30)を力学的境界条件とする。

6. 境界要素法による解析

この問題を境界要素法により解くことを考える。境界要素法では、積分方程式(6)を離散化してポテンシャルの連立一次方程式を解くが、未知数として没水壁上のポテンシャルだけでなく、各運動の振幅($\alpha_x, \alpha_z, \alpha_\theta$)も未知数として残る。このままでは解く事が出来ないで、力学的境界条件(28)、(29)、(30)を連立させ、ポテンシャルと各振幅の連立1次方程式にする事により解析できる。結果、境界上のポテンシャルと共に各振幅も求められる。得られた境界上のポテンシャル・各振幅を離散化した積分方程式に代入すると、任意の位置でのポテンシャルが分かる。

7. 実験方法

実験水槽は、幅25cm、深さ50cm、長さ22mの断面2次元水槽、吸収式造波装置を使用した(図-3、参照)。浮体は木材、発泡スチロールの2種類で、R1を50cm、70cmとして合計4種類を用い(表1、参照)、無係留で水面上に浮かせた。

測定方法は、周期0.6~1.3秒の内10通り、波高2cm、4cmの波を入射させ、浮体運動をビデオで撮影して、ディスプレイ上から浮体の重心の移動、最大傾斜角を10波程度読み取り、その平均より各振幅とした。

表1 実験浮体

素 材	R 1 (cm)	R 2 (cm)	R 3 (cm)
木 材	50.0	10.2	5.3
	70.0	10.2	5.4
発泡スチロール	50.0	10.0	0.7
	70.0	10.0	0.7

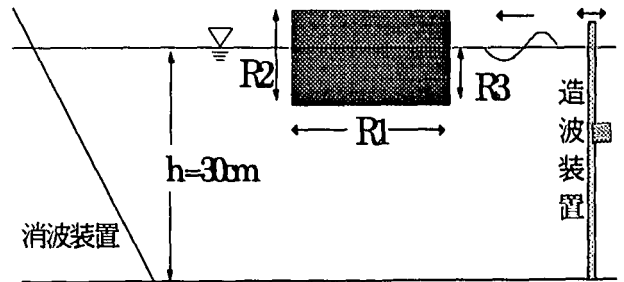


図3 実験水槽

8. 解析及び実験結果

図4から図8は解析結果と実験結果を表したものである。横軸は浮体の代表的な長さR1を入射波長Lで割って無次元化したもので、縦軸は、回転運動振幅を除き、各振幅を入射波高で割って無次元化したものである。

図4~図6は、浮体材料を木材として、図7、図8は浮体材料を発泡スチロールを用いている。図4は水平運動振幅 α_x を表し、図5・図7は鉛直運動振幅 α_z 、図6・図8は回転運動振幅 α_θ を表している。

各々の図で、実線はR1=50cm、点線はR1=70cmのときの解析結果で、○はR1=50cmに対する実験値、□はR1=70cmに対する実験値である。

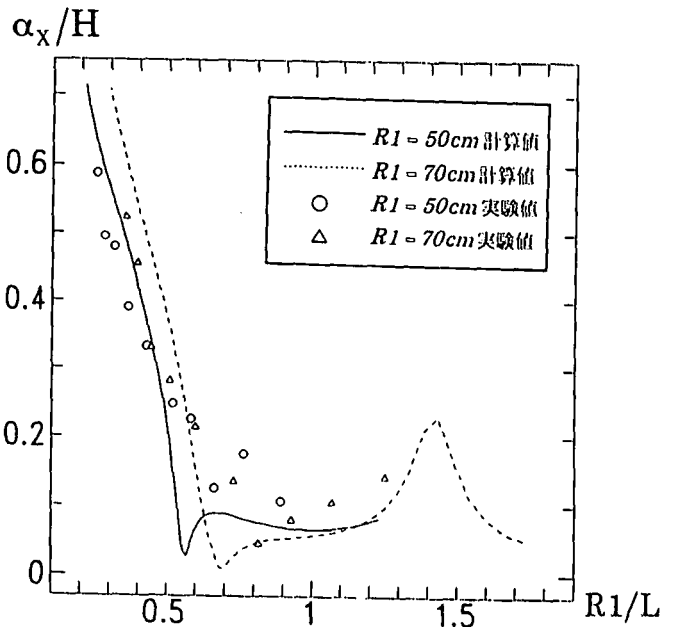


図4 R1/Lの変化に伴う α_x/H (木材)

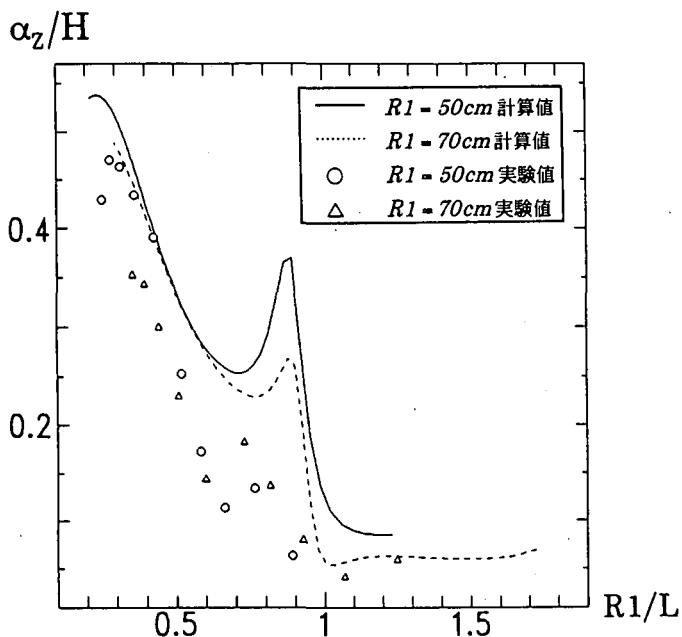


図5 $R1/L$ の変化に伴う α_z/H (木材)

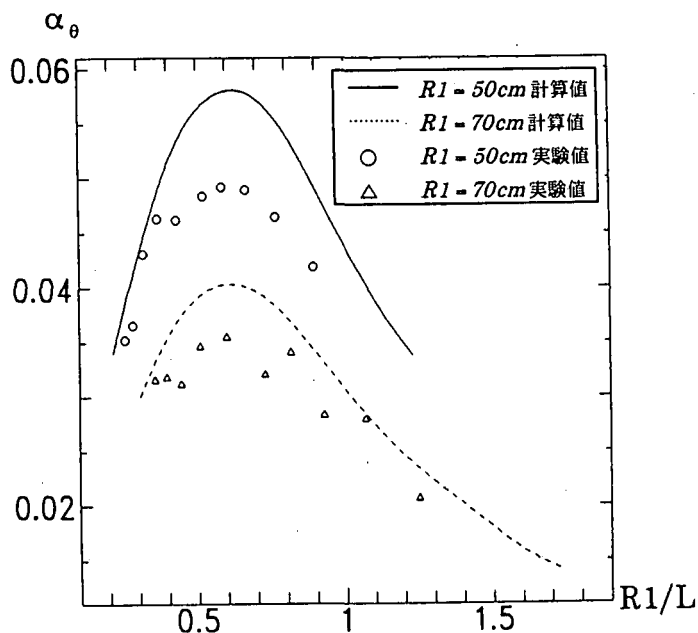


図8 $R1/L$ の変化に伴う α_θ
(発泡スチロール)

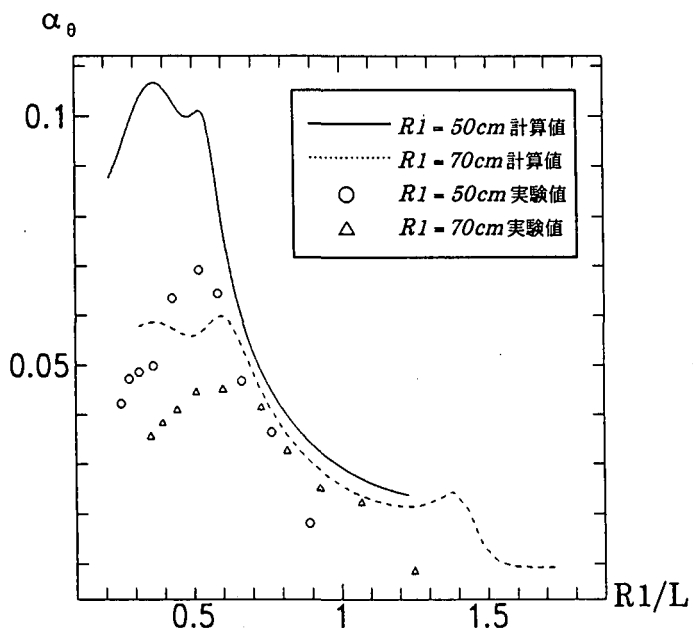


図6 $R1/L$ の変化に伴う α_θ (木材)

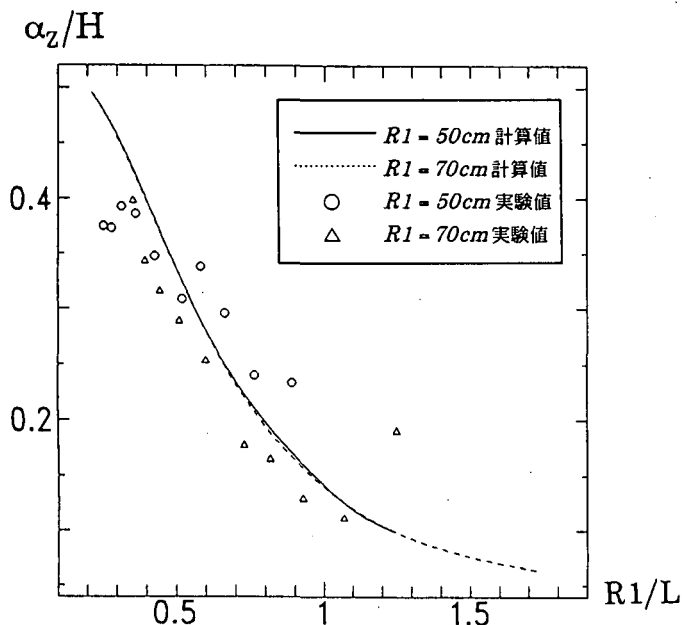


図7 $R1/L$ の変化に伴う α_z/H
(発泡スチロール)

9. 考察

図4は、 $R1/L$ の値が小さいとき ($R1/L=0.2\sim0.6$ 程度)、解析値よりも実験値が小さくなっている。これは解析では考慮していない粘性の影響により、実験値に小さな値がでたと思われる。 $R1/L$ の値が0.6以上のとき、解析値よりも実験値が大きな値を示しているのは、実験中、多少の質量輸送が波の進行方向に起こっていたために、正確な振幅を測定できなかった事によるものである。

図5は、解析値、実験値共に $R1/L$ が0.7~0.9にピークが見られる。これは浮体と回りの波動場が共鳴していると考えられる。実験値が解析値よりも小さい値であるのは、粘性の影響であると思われる。

図6は、同様に $R1/L$ が小さいところで、解析値より実験値が小さくなっている。これは粘性の影響と浮体の運動を元の位置 (静止時の位置) で近似しているために生じる誤差であると考えられる。

次に浮体の材質が発泡スチロールの場合では、実験中、断面2次元水槽の側壁に浮体が接触する事があり、解析値との比較が十分に出来なかったため、水平運動振幅の図の提示は省略した。鉛直・回転運動振幅は、多少、浮体が側壁に触れていても、水平運動振幅とは違い、浮体運動の復元力として水圧だけでなく重力も考えられ、側壁による摩擦力よりも強い復元力となると思われることから、解析結果と実験結果の比較を図7、図8として示した。

図7は、図5と異なり、振幅のピークが存在しない。これは発泡スチロールが軽い浮体であるために、実験、解析の範囲内では共鳴現象が起らなかったものと思われる。

図8は、実験値、解析値共に $R1/L=0.6$ 付近でピークを持ち、共鳴していると思われる。

全ての図において、粘性の影響、質量輸送の影響により、解析値と実験値には多少の違いが見られたが、ほぼ同様の傾向が見られると考えられる。

10. まとめ

解析方法として、主要解ではなく Green 関数を用いて解析した事により、大幅な未知数の低減を可能にし、また、浮体の回りに岸壁（反射境界）などが存在する場合には、浮体の没水面と反射境界だけに未知数を配置すれば良く、3次元問題を考えた時に有利であると考えられる。

解析結果、実験結果が、ほぼ一致していることから、解析方法の妥当性が認められた。

浮体運動は、浮体の質（大きさ・重さ）や波長などの関係から、浮体とその回りの波動場が共鳴現象を起こしていると考えられる。

今後課題として、解析方法をより実際の現象に近くするために、浮体の運動に伴う浮体没水面の位置の移動を考慮した解析方法を考える必要がある。

今回の解析では Green 関数として級数形だけを用いたが、精度良く解析するために、波数 k と特異点からの水平距離 $|x - x_0|$ の積が、大きい場合は級数形、小さい場合は積分形を用いて、Green 関数の使い分けをする必要がある。

実験方法は、水槽側壁に触れることのないように、工夫する必要があると思われる。

今回は、各振幅のみの測定であったが、浮体通過後の散乱波の測定も行う必要がある。

11. 参考文献

井島武志、田淵幹修、湯村やす（1972）：有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変化、土木学会論文集、第202号、pp33-48

清川哲志、平山彰彦、高梨和光（1983）：ハイブリット型境界要素法による任意反射率防波堤前面の浮体動揺解析、海岸工学論文集、第30回、pp450-454

榎木亨、青木伸一、濱本敏（1988）：港湾形状を考慮した港内船舶の回折・造波問題の解析、海岸工学講演会論文集、第35回、pp.692-696

清川哲志、大山巧、小林浩（1993）：グリーン関数法による任意形状浮体の動揺解析、土木学会論文集、第332号、pp55-65

井島武志、吉田明德、山本督夫（1978）：任意断面浮体の2次元係留運動と波の変形、土木学会論文集、第272号、pp53-63