

拡張型 Boussinesq 方程式に基づく波・流れ相互干渉の数値モデルの構築 Numerical Modeling of Wave-Current Interactions using Extended Boussinesq Equations

モハマド モヒウディン*・富樫宏由**・余 錫平***
Mohammad Mohiuddin, Hiroyoshi Togashi and Xiping Yu

A non-linear model for a wave field coexisting with currents has been developed to investigate the influence of currents on waves propagation. A new form of dispersion relation is derived by extending for the wave-current coexistence field based on special type of depth-integrated Boussinesq equations (Madsen *et al.* 1991,1992). The third spatial derivative of surface fluctuation, $\partial^3 S / \partial x^3$ is discretized in terms of surface curvature, $\partial^2 S / \partial x^2$ and subsequently is solved by the cubic spline method. The model is applied to wave propagation in a domain of variable depths with preexisting adverse and following currents of different magnitudes.

Keywords: Dispersion relation, wave-current interactions, cubic spline, surface curvature.

1. 序 論：波・流れの相互干渉の現象は、波伝播特性、流れの分布及び海洋構造物に作用する外力等に強く影響する浅海域において最も重要である。流れの存在は、波速、波長及び波周期の間の関係を変化させる。また強い流れは波伝播の方向をも変化させる。非一様な流れに乗った進行波の振幅は非線形干渉によって影響を受ける。波・流れ相互干渉の現象においては、波長と波向の変化は運動学的な考察のみによって決まるものであるが、一方、振幅の変化は波と流れの結合系の力学によって決まる。定常で非一様な流れは、波の運動学と力学に対してそれと分かる程の影響を持っている (Longuet-Higgins and Stewart, 1961)。従って、波・流れ系に対して定式化された波理論を使うことは極めて重要なことである。本研究においては、一様流れを導入して水深方向に積分した拡張型 Boussinesq 方程式が、結合した波・流れ系と関連した分散関係式を考慮しながら、逆方向又は同一方向の先在流れ場を伴った領域に適用されている。

2. 理 論：Madsen 等によって導かれた新形式の1次元 Boussinesq 方程式は、以下のようである。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad P = \int_{-h}^S u dz \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{d} \right) + g d \frac{\partial S}{\partial x} - h^2 \left(B + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} - B g h^3 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} = \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + 2 B g h^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

ここで、 u は水粒子速度、 h は静水深、 S は水面変動、 d は全水深、 P は u が深さ方向に積分された流束 (fluxes) そして $B (=1/15; \text{Madsen 等による})$ は curve fitting parameter である。上の方程式 (2) の左辺第2項の非線形項は、波による水粒子速度 u の他に流れ速度 U の一様流を導入すると以下のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{d} \right) = 2U \frac{\partial P}{\partial x} - U^2 \frac{\partial}{\partial x} (S+h), \quad P = \int_{-h}^S (u+U) dz \quad (3)$$

一方、波・流れ共存場の速度ポテンシャルは、定常流れ項と進行波動項の重ね合わせによって次式で表される。

$$\Phi = Ux + A \cosh k(h+z) \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} U^2 t \quad (4)$$

これは、ラプラスの方程式、底面及び水面の運動学的条件を満たす。式(4)を水面の力学的条件に代入して、高

* 学生会員 長崎大学大学院海洋生産科学研究科 (〒852 長崎市文教町1-14)

** フェロー会員 長崎大学工学部社会開発工学科

*** 正会員 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻

次項を無視すると次式を得る。

$$S = \frac{A}{g} \left\{ \omega \cosh kh \sin(kx - \omega t) + Uk \cosh kh \sin(kx - \omega t) \right\} \quad (5)$$

ここで、 ω は角周波数($2\pi/T$)。 T は周期、そして k は波数である。

式(3)と(5)を式(1)と(2)に適用し、 h と U の最低次導関数(1階微分)項とその積を無視すると、次の分散関係式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\omega^3 \left\{ 1 + k^2 h^2 (B + 1/3) \right\} + \omega^2 Uk \left\{ 1 - k^2 h^2 (B + 1/3) \right\} + \omega k^2 \left\{ U^2 + gh(1 + Bk^2 h^2) \right\} \\ & - Uk^3 \left\{ U^2 - gh(1 + Bk^2 h^2) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

上式の展開において、流れ速度の変化はその領域における波速(の変化)と比較して小さいものと仮定されている。 $U = 0$ の時、式(6)は次式となるが、これは波場だけに対して Madsen 等(1991, 1992)によって導かれた分散関係式と一致する。

$$-\omega^2 + ghk^2 + Bgh^3k^4 - \omega^2 k^2 h^2 (B + 1/3) = 0 \quad (7)$$

1次元の波・流れ場に対する定義概要図を図-1(a), (b)に示す。

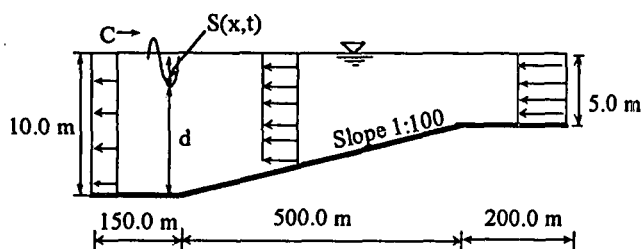


図-1 (a) 波・逆方向流れ場

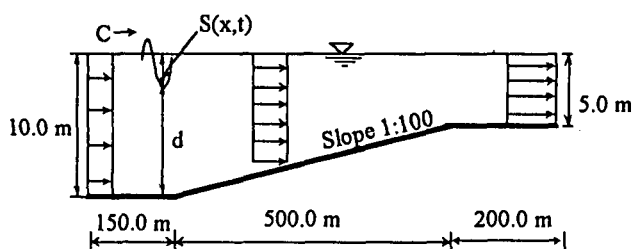
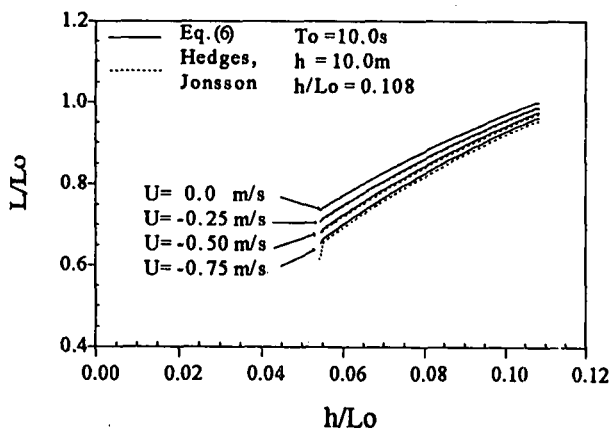
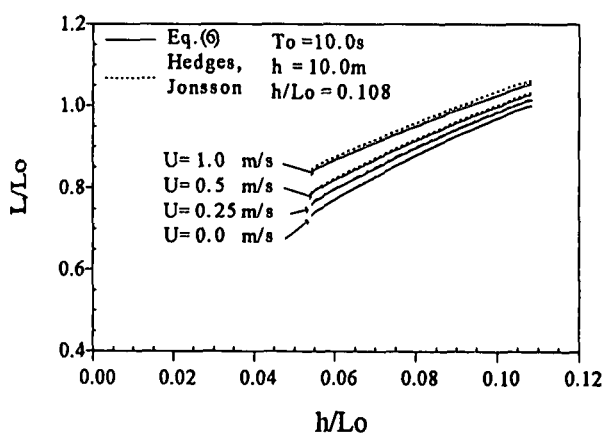


図-1 (b) 波・同一方向流れ場

式(6)は色々な大きさの先在する流れ場を考慮した物理領域に適用される。式(6)はまた Hedges (1987)、Jonsson 等 (1970) の分散関係式とも比較検討されている。図-2(a)は、もし波が逆方向流れ場を伝播する場合は、流れ速度 U が大きくなるにつれて波長は減少して波速も減少することを示している。一方これとは逆に図-2(b)では、同一方向流れを伴った波は、流れ速度 U が増大するにつれて波速と波長が増加することを示している。図-2(a), (b)によれば、両者の理論的展開のアプローチが互いに異なるけれども、両者の分散関係式は見事によく一致していることを明示している。



(a) 波・逆方向流れ場



(b) 波・同一方向流れ場

図-2 Hedges, Jonsson の理論式との波長に関する比較

3. 数値解法とモデリング : 式(1)と(2)を離散化して差分式を解くためには、修正 Dronkers スキームを使用した。使用した変数と格子点の記号の取り方は図-3に示してある。連続方程式と運動方程式は共に離散化され、その差分式は2つの異なった時間レベルで P と S を定義することによって定式化されている。 P と S は各々太線と細線の交点で定義されている。

もし Boussinesq 補正項 $\partial^3 S / \partial x^3$ がスキームの中に陰的に含まれてくると、運動方程式の差分式(9) は3重対角系にすることが出来なくなる。従って、水面変動の3次の偏微分 $\partial^3 S / \partial x^3$ (Boussinesq補正項)は、式(8)に示すように水表面曲率の項で離散化され、それを更に離散化することなしに、直接的に $\partial^2 S / \partial x^2$ を得るために3次のスプライン法を採用した。

$$\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} = \frac{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{S_{xx} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - S_{xx} \Big|_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (8)$$

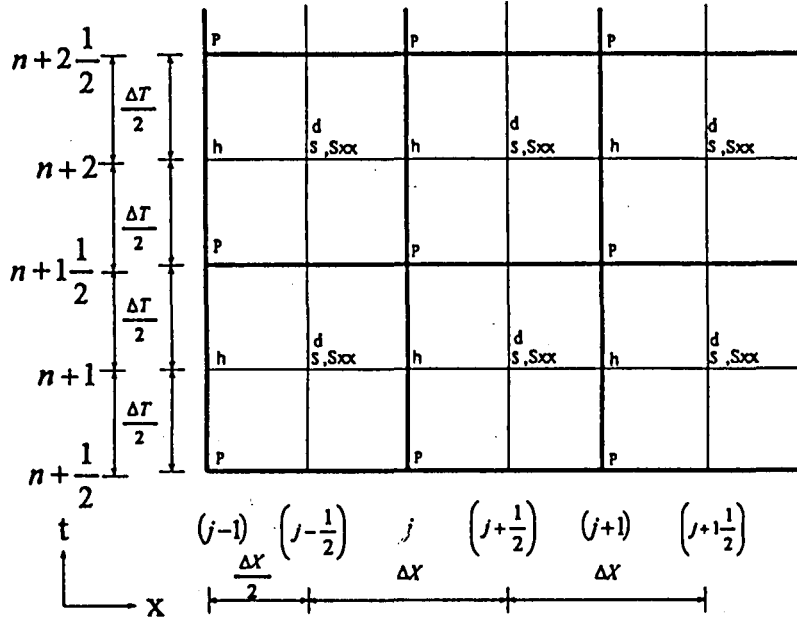


図-3 x-t 平面における差分スキーム

式(1)と(2)の差分方程式を下に示す。

$$S_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - S_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(P_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - P_j^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad (9)$$

$$A_j P_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} + B_j P_j^{n+\frac{1}{2}} + C_j P_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} = D_j \quad (10)$$

ここで、

$$A_j = -\frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{d_{j-\frac{1}{2}}^n} \left(P_j^{n-\frac{1}{2}} + P_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right) - h_j^2 \left(B + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{6} \frac{h_j}{\Delta x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (11)$$

$$B_j = 1 + \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{d_{j+\frac{1}{2}}^n} \left(P_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} + P_j^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{d_{j-\frac{1}{2}}^n} \left(P_j^{n-\frac{1}{2}} + P_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right) + 2h_j^2 \left(B + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad (12)$$

$$C_j = \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(P_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} + P_j^{n-\frac{1}{2}} \right) \frac{1}{d_{j+\frac{1}{2}}^n} - h_j^2 \left(B + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{6} \frac{h_j}{\Delta x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (13)$$

$$D_j = P_j^{n-\frac{1}{2}} - g \frac{\Delta t}{\Delta x} d_{j+\frac{1}{2}}^n \left(S_{j+\frac{1}{2}}^n - S_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - h_j^2 \left(B + \frac{1}{3} \right) \left(P_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} - 2P_j^{n-\frac{1}{2}} + P_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} \right) \frac{1}{(\Delta x)^2} \\ + Bgh_j^3 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(S_{xx}^n_{j+\frac{1}{2}} - S_{xx}^n_{j-\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{6} h_j \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial h}{\partial x} \left(-P_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} + P_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right) + Bgh_j^2 (\Delta t) \frac{\partial h}{\partial x} \left(S_{xx}^n_{j+\frac{1}{2}} + S_{xx}^n_{j-\frac{1}{2}} \right) \quad (14)$$

計算の開始時点では、積分した速度の流束 P と水面変動 S は、それぞれ $t=(n-1/2)\Delta t$ と $t=n\Delta t$ の時点 で定義されるが、ここで Δt は計算の時間ステップである。 $t=n\Delta t$ 時点における S の値がわかれば、その2階

微分値 S_{xx} を得るにはスプライン法が適用される。また、 $t=(n+1/2)\Delta t$ 時点における P は、 $t=(n-1/2)\Delta t$ における P と $t=n\Delta t$ における S , S_{xx} を用いて計算される。 $t=(n+1/2)\Delta t$ 時間レベルで計算された P 値は一系列の代数方程式を形成するので、大きなマトリックスを解く代わりに2重掃出し法(Abbott, 1979) が用いられる。そして最後に、 $t=(n+1/2)\Delta t$ における S の計算は、前に計算された $t=(n+1/2)\Delta t$ における P と $t=n\Delta t$ における S を用いて実行される。その後の計算ステップは、上に述べた方法の繰返しで必要とする時間レベルまで進められる。

4. 適用計算結果とその考察： 図-1 に示す一様傾斜面上に流れがある場合の波変形を計算する問題にこの数値モデルは適用された。計算領域の終点に（下流側水平床末端からの）反射の影響が到達する前に計算は打ち切られた。入射波の波周期 $T = 10.0\text{ s}$ 、波高 $H = 1.0\text{ m}$ に対する波伝播の問題が、流れなしと種々の大きさの定常流れがある場合について調べられた。波形勾配 $H_0/L_0 = 0.0108$ の場合、相対流れ速度を逆方向流れと同一方向流れに対して共に $U/C_0 = 0.0, 0.054, 0.108$ 及び 0.135 と変化させた。

図-4(a) は、波が浅水域に伝播するにつれ、またより大きい逆向き流れ速度場になるにつれて、波高が次第に増加することを示している。一方、図-4(b)に示すように、同向き流れ速度場がより大きくなるにつれて波高は逆に減少する。

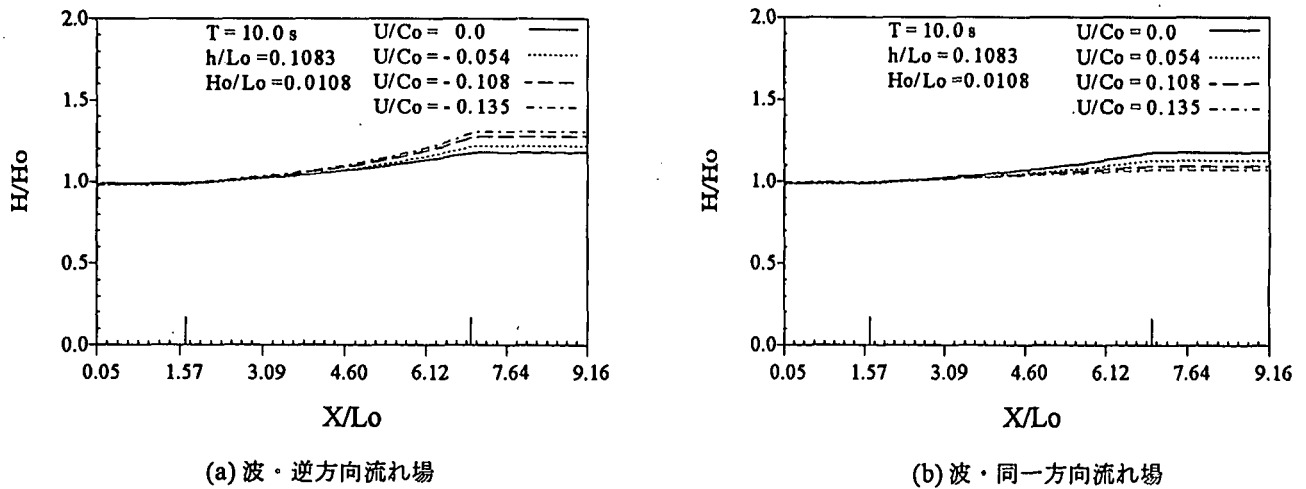


図-4 波高の空間分布（入射波の条件: $T_0 = 10.0\text{ s}$, $H_0 = 1.0\text{ m}$, $h/L_0 = 0.1083$, $H_0/L_0 = 0.0108$ ）

また、領域上で変化する平均水位の空間分布は逆・同向き流れ各々に対して図-5(a), (b) に示してある。波が水深の変化する領域に進むと平均水位は静水位とは異なってくる。水深が減少するにつれて、エネルギー損失のない破碎しない波の存在によって平均水位がより低められる。岸方向水平床上では、逆向き流れによる平均水位の低下は同向き流れの場合と比較して逆により大きくなる。

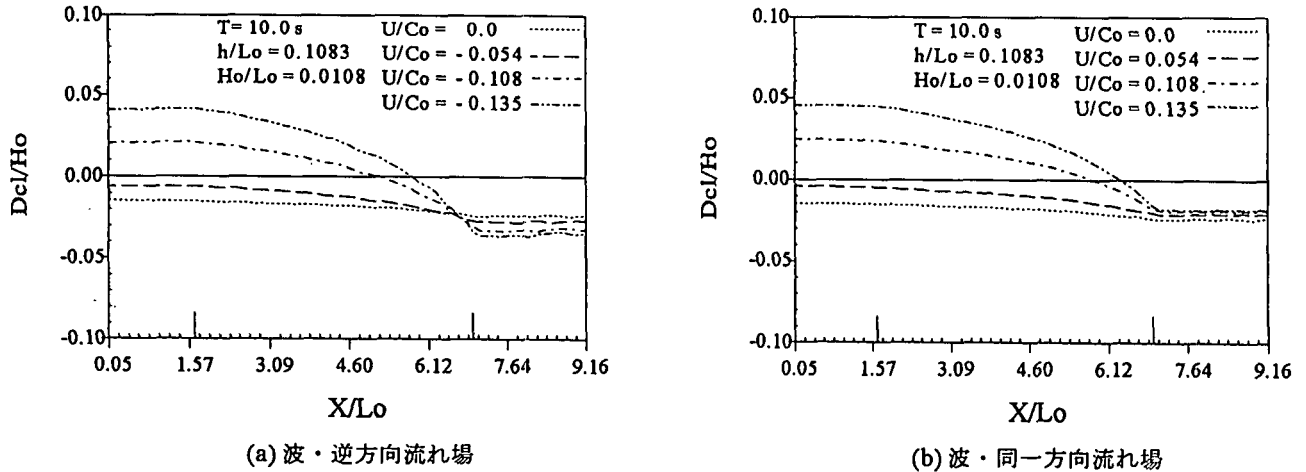
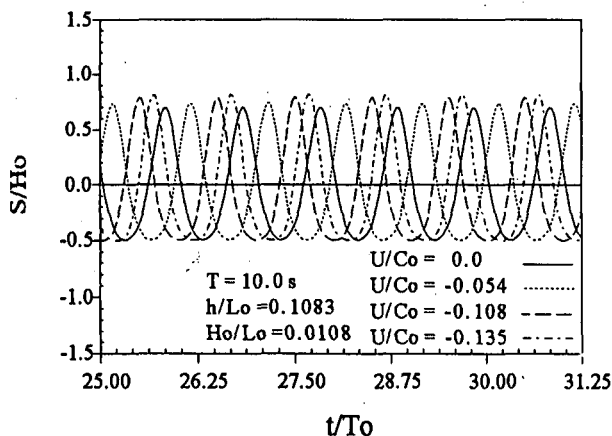
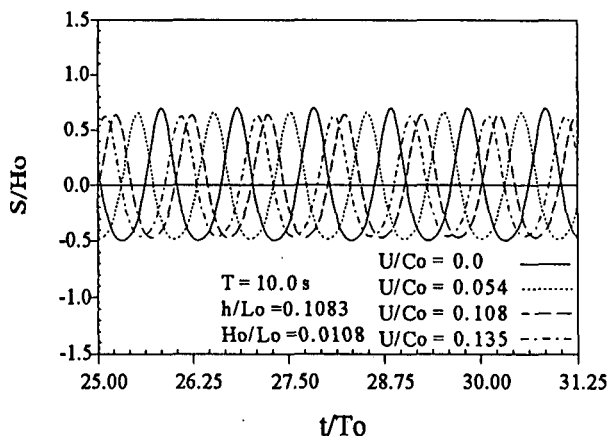


図-5 平均水位の空間分布（入射波の条件: $T_0 = 10.0\text{ s}$, $H_0 = 1.0\text{ m}$, $h/L_0 = 0.1083$, $H_0/L_0 = 0.0108$ ）

図-6(a),(b)は、岸方向水平床上で入射波境界から距離 658.75m の地点において、逆・同向き流れ速度がそれぞれ増加する場合の水面変動の時系列を示している。波・流れの相互干渉した水面変動が、流れがない場合の同じ点の水面変動と比較されている。水深が減少して逆向き流れ速度の強さが増加すると、その結果として生じる波頂

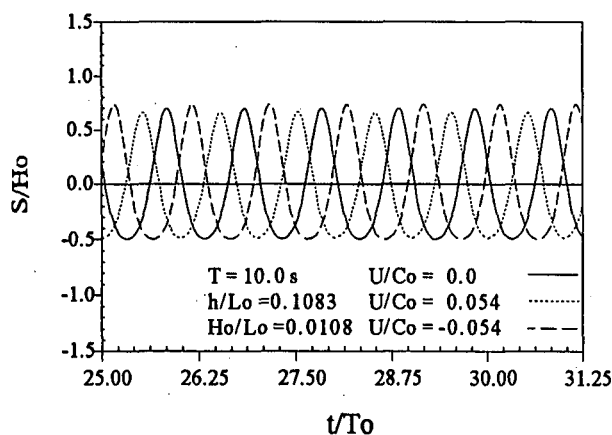


(a) 波・逆方向流れ場

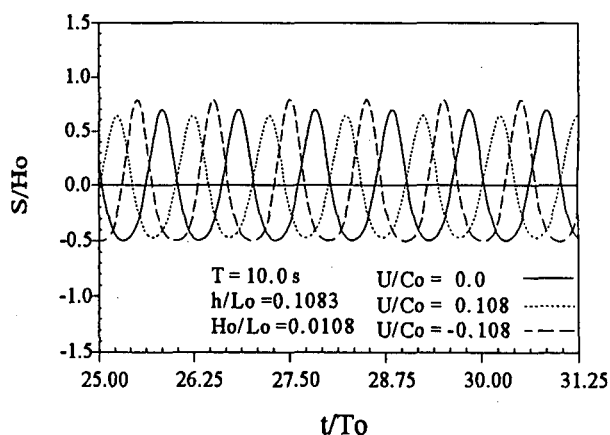


(b) 波・同一方向流れ場

図-6 入射波境界から 距離 658.75m の地点における水面変動
(入射波の条件: $T_o = 10.0s$, $H_o = 1.0m$, $h/L_o = 0.1083$, $H_o/L_o = 0.0108$)



(a) $U/C_o = 0.0, \pm 0.054$ の場合

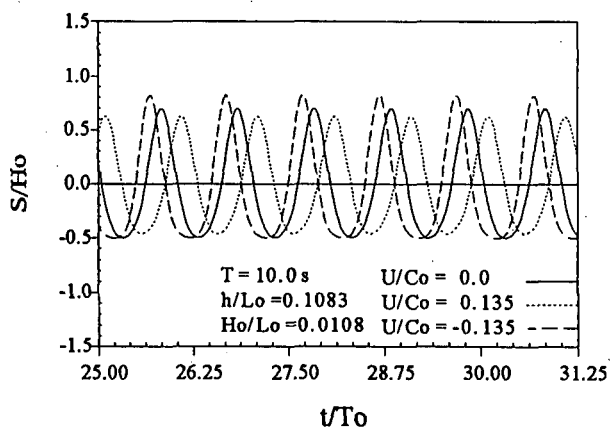


(b) $U/C_o = 0.0, \pm 0.108$ の場合

の振幅は、波谷のそれと比較してより細く尖ってくる。これに対して同向き流れの場合は、傾斜面上の Shoaling と波・流れの相互干渉の結果として、波頂の振幅は流れがない場合よりも減少する傾向がある。

図-7(a),(b),(c)は、3つの異なった大きさの逆・同向き流れの場合に対して、上と同じ地点の水面変動を示している。同じ大きさの流れ速度の場合、波頂の振幅は逆向き流れでは増加するのに対して、同向き流れでは減少する。そして、傾斜面上の波は逆向き流れが強くなるにつれて、波谷の振幅もまた増加してかつ平坦になってくる。

次いで、この数値モデルは、水平床上に放物線形状の没水マウンドがある場合に適用される。高さ 5.0m、長さ 150.0 m の放物型マウンドが入射波境界から 155.0m の位置に設置されている。解析領域の水平床上の水深は 10.0m、先在する同一方向流れ速度は $U = 0.5m/s$ である。入射波の波高 0.62m、周期 8.0s に対する波伝播の問題が、流れがない場合



(c) $U/C_o = 0.0, \pm 0.135$ の場合

図-7 入射波境界から距離 658.75m の地点における水面変動の逆・同一方向流れによる比較 (入射波の条件: $T_o = 10.0s$, $H_o = 1.0m$, $h/L_o = 0.1083$, $H_o/L_o = 0.0108$)

とある場合について解析された。

下流側最終端境界は解析領域の終点よりはるか遠方にある。従って、下流側境界からの反射はないものとしてよい。マウンド上の波高分布は、波の Shoaling と波を取り巻く流れの影響の合成効果を表している。マウンド上で逆向き流れが増加する場合の波伝播特性としては、波長は短縮して波高が増大するが、同向き流れが増加する場合は逆に波長は伸長して波高が減少する。

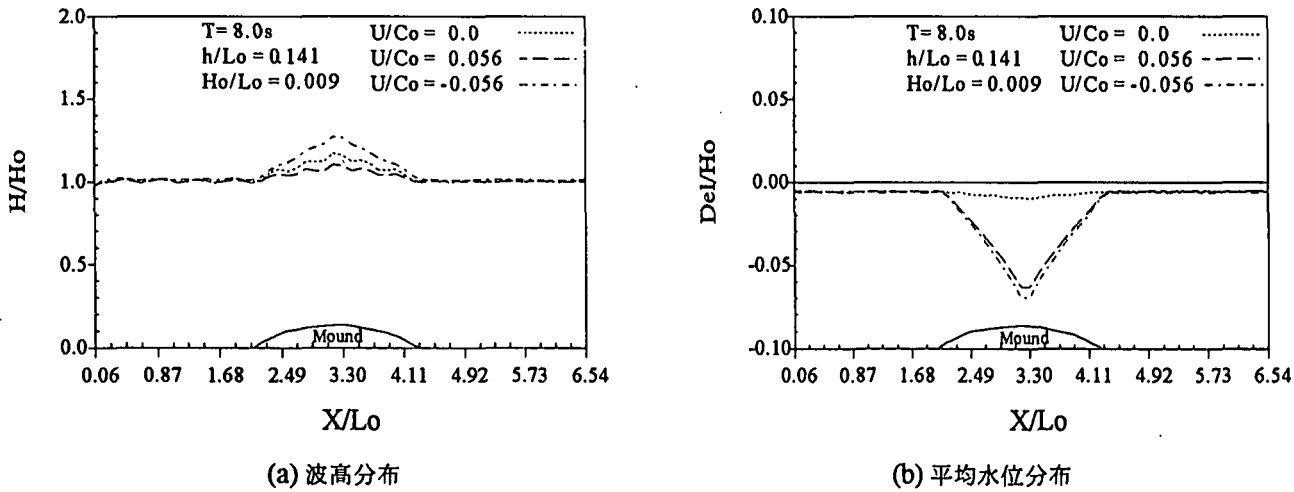


図-8 波と逆・同一方向流れ場における放物型没水マウンド上の波高と平均水位の空間分布

図-8(a)は、流れ速度が異なる3つの条件 ($U/C_0 = 0.0, \pm 0.056$) に対する波高分布を示している。これによると、マウンド上の波高は、流れがない場合の波高と比較して、逆向き流れでは増加し、逆に同向き流れでは減少する。また、図-8(b)に示すように、平均水位の低下はマウンド上で概して増大するが、逆向き流れによる場合の方が同向き流れによる場合よりも若干大きい。

5. 結 論：Madsen 等による Boussinesq 方程式に、一様流れを導入した拡張型 Boussinesq 方程式を用いることにより、非線形の波・流れ数値モデルを提示した。また、Boussinesq 補正項を解くための新しい数値解法も提示している。ここで得られた分散関係式は、Hedges (1987) と Jonsson 等(1970)の理論結果と比較され、両者は良く一致することが示された。この数値モデルによる適用計算結果は、逆方向流れと同一方向流れを考慮して例示された。

参 考 文 献

Abbott, M. B. (1979) : *Computational Hydraulics*, Pitman, London, 324 p.

Dronkers, J. J. (1969) : Tidal computations for rivers, coastal areas, and seas, *Journal of Hydraulic Division Proceedings*, American Society of Civil Engineers (ASCE), Volume 95, Number HY1, pp. 29-77.

Hedges, T. S. (1987) : Combinations of waves and currents: an introduction, *Proceedings Institution of Civil Engineers*, Part 1, pp. 567-585.

Jonsson, I. G., C. Skougaard and J. D. Wang (1970) : Interaction between waves and currents, *Proceedings of the 12th Conferences on Coastal Engineering*, Washington D.C. American Society of Civil Engineers (ASCE), 1970, pp. 489-507.

Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart (1961) : The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 10, pp. 529-549.

Madsen, P. A., R. Murray and O. R. Sørensen (1991) : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Engineering*, Volume 15, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, pp. 371-388.

Madsen, P. A. and O. R. Sørensen (1992) : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry, *Coastal Engineering*, Volume 18, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, pp. 183-204.