

境界要素法における開境界条件と開口部近傍の波動場

Wave field near an opening with open boundary condition for BEM

野村圭司*・浜中建一郎**

Keiji Nomura, Ken-ichiro Hamanaka

Open boundary condition used in the analysis of wave fields with the boundary element method is discussed. Hamanaka (1995) proposed a new open boundary condition which is ideally appropriate for any wave condition. But this boundary condition is formulated under an assumption that an opening and two boundaries on both sides of the opening make a straight line. In actual harbors, most of the boundaries on both sides of the opening have a finite angle. In the present paper, the validity of this condition is examined in detail, comparing with potential matching method. It is confirmed that this open boundary condition is still valid in such configurations of boundaries.

Key word ; Boundary Element Method, Open boundary Potential matching method

1. はじめに

平面2次元波動場を境界要素法で解く際、開口部に適当な境界条件を与える必要がある。一般に、開境界条件は、単に開口部だけでなく、拡張して部分反射境界、また入射境界に置いて内部から反射して来た波を自由に通過させるためにも使われるため、適当な境界条件を与えることは重要である。

これまで著者等は、従来用いられてきた境界条件 (Isaacson:1990, Chou et al:1993 等) では計算上見かけの反射波が現れることを示し、同時に上記の3つの境界に対しほぼ完全な新しい境界条件を提案した (Hamanaka:1995, 浜中:1995)。さらにいくつかの計算例から、提案した開境界条件により妥当な解が得られることを示した (野村・浜中:1996)。

しかしながら、提案した境界条件は、開口部の両側の境界 (防波堤等) が、開口部と同一直線上にあるという仮定の下に導かれている。実際の港では開口部の両側の防波堤は適当な角度を持っていることが多く、この仮定は成り立たない。

このことから本研究では、開口部の両側の境界が角度を持つ場合のこの境界条件の適用性を検討することを目的とする。

2. 基礎方程式と積分方程式

流体運動は非圧縮、非粘性、非回転と仮定する。今、波動場が時間的に周期的であると仮定すると、その速度ポテンシャルは

$$\Phi = \text{Re} \left\{ \phi e^{-i\omega t} \right\} \quad : \quad \omega \text{ は角周波数}$$

と表せる ($\wedge$: 有次元量)。

全ての変量を $\hat{\omega}$ と重力加速度 $\hat{g}$ とで無次元化すると

$$(x, y, z) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \hat{\omega}^2 / \hat{g} \quad , \quad (\eta, h) = (\hat{\eta}, \hat{h}) \hat{\omega}^2 / \hat{g}$$

$$t = \hat{\omega} \hat{t} \quad , \quad \bar{\phi} = \hat{\phi} \hat{\omega}^3 / \hat{g}^2$$

基礎方程式は3次ラプラス方程式で、水面 ($z=0$) と底面 ($z=-h$) の境界条件と共に以下の様に表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \hat{z}^2} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \hat{z}} &= \bar{\phi} \quad \text{on } z=0 \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \hat{z}} &= 0 \quad \text{on } z=-h \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

さらに

$$\bar{\phi} = \phi(x, y) \cosh k(z+h)$$

として変数分離を行うと、以下の Helmholtz 方程式が得られる。

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2) \quad (2-2)$$

水面の境界条件から

$$k \tanh kh = 1$$

(2-2) 式の Helmholtz 方程式に対する Green の公式は

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \phi (\Delta G + k^2 G) - G (\Delta \phi + k^2 \phi) \right\} dv \\ &= \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \end{aligned} \quad (2-3)$$

と表される。ここで V は考えている領域で、 S はその境界、 ν は境界上の外向法線を表す。(2-3) 式における関数 G として、(2-2) 式を満たし特異性を有する0次の第1種 Hankel 関数

$$G = H_0^{(1)}(kr) \quad , \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (2-4)$$

これは、 $r=0$ で特異点となる(2-2)の Helmholtz 方程式の主要解である。

これを用いると、(2-3)式は

特異点 $P:(x_0, y_0)$ が領域内にあるとき

* 学生員 北海道東海大学大学院

** 正員 北海道東海大学工学部海洋開発工学科

$$4i\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2-5)$$

特異点が境界上にあるとき

$$2i\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2-6)$$

となる。境界要素法では、(2-6)式を離散化して、境界上のポテンシャルに関する連立1次方程式として解き、得られた境界上のポテンシャルから(2-5)式により領域内の任意の位置でのポテンシャルが求められる。

なお(2-4)式のハンケル関数は特異点から充分離れた遠方境界では、特異点から離れる方向に進行する波動解となり、放射条件を満たしている。

3. 開境界条件

Helmholtz 方程式を用いて平面2次元波動場を解く場合、考慮すべき境界のタイプとしては、完全反射境界、開境界、入射・吸収境界、部分反射境界などが挙げられるが、完全反射境界以外は妥当な境界条件が与えられていない。従来、開境界も含めた部分反射境界に対する境界条件としては、境界に対して特定の入射角を持つ成分波に対する条件式が準用されてきた(Isaacson:1990, Chou:1993)。しかしながら、この条件式では反射率が波の入射角に依存し、たとえある入射角に対して最適な条件を与えたとしても、異なった方向から複数の波が入射する場合には計算上見かけの反射波が現れ適用できない。

以上のことから、本節では、入射角に依存せず、入射波として平面波でも円筒波でも良く、また複数の成分波に対しても成立するほぼ完全な開境界条件式(Hamanaka:1995, 浜中:1995)を示し、その導出過程について述べる。

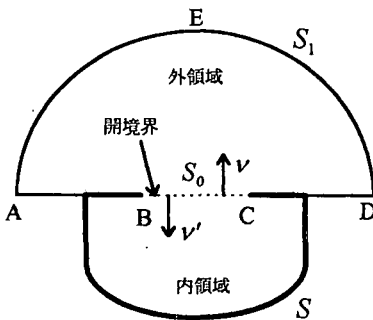


図1. 開境界概念図

開境界に対する境界条件を与えるために、図1のように開境界BCの外側に半無限領域を考え、外領域と呼ぶ。それに対し問題としている領域を内領域と呼ぶ。外領域に対し開境界から充分遠方に半円状に境界をとる。外領域は S_0 と S_1 で、内領域は S_0 と S とで囲まれている。今、(2-6)式をこの外領域に適用する。

特異点 P を開境界上の (x_0, y_0) に位置させると、(2-6)式は以下になる。

$$2i\phi(P) = \int_{S_0+S_1} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu'} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu'} \right) ds \quad (3-1)$$

ただし、 ν' は外領域から外向きの法線ベクトルである。特異点 P は直線AD上にあるから、

$$\partial G / \partial \nu' = 0 \quad \text{on AD.}$$

AB, CDは完全反射境界とすると

$$\partial \phi / \partial \nu' = 0 \quad \text{on AB and CD.}$$

さらに関数 G とポテンシャル ϕ は遠方境界AEDで放射条件を満たすとする、(3-1)式の積分は開境界上だけとなり、

$$2i\phi(P) = \int_{S_0} -G \frac{\partial \phi}{\partial \nu'} ds = \int_{S_0} G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds \quad (3-2)$$

となる。この(3-2)式が内領域の開境界に対する境界条件となる。

4. 比較のための2領域接続法

直接法

角度を持った防波堤によって作られる開口部に対し、提案した開境界条件が妥当であることを示すために、図2の様な領域を考える。開口部には開境界条件式を与え、入射境界に対しては入射波の条件式と反射波の通過のため開境界条件式を適用する。それ以外は、完全反射境界とする。

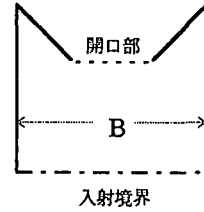


図2

2領域接続法

一方、図3の様に開口部の外側にもう一つの領域を設定した2領域接続法を考える。開口部の内側を領域I、外側を領域IIとし、各々の領域でポテンシャルを ϕ_1 、 ϕ_2 とする。各々の領域に対し通常境界要素法を適用するが、そのとき開口部での未知数はポテンシャルとその法線微分との両方である。

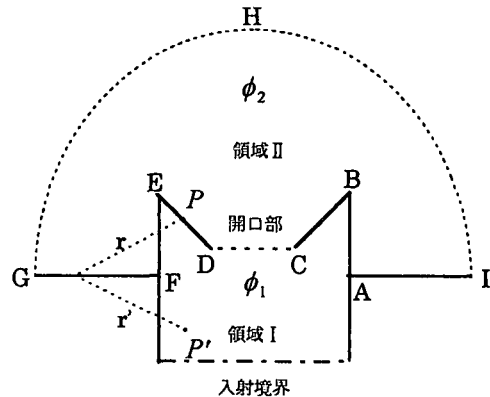


図3

二つの領域の開口部での接続条件として

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_2 & \text{on 開口部} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} &= -\frac{\partial \phi_2}{\partial \nu} & \text{on 開口部}\end{aligned}$$

を与える。

領域Ⅰでは(2-4)式を用いた(2-6)式を適用する。

領域Ⅱでは、特異点 P が境界 A-F 上にあるとき、対称特異点 P' を直線 G-I に対して P の対称点に位置させる。このふたつの特異点に対応して、ふたつの 0 次の第 1 種 Hankel 関数から

$$G = H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(1)}(kr')$$

なる特異関数を考える。この特異関数を用いて領域Ⅱで積分方程式を考えると、 P' は領域外にあることを考慮して

$$2i\phi(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (4-1)$$

となる。

ここで境界 FG, IA を完全反射境界とすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on FG, IA}$$

また G の対称性から

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on FG, IA}$$

さらに、遠方境界 GHI では ϕ も G も放射条件を満たすから、積分値は零となり従って(4-1)は

$$2i\phi(P) = \int_{A-F} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds$$

となる。従って、境界 F-G-H-I-A 上には未知数を置く必要はなくなる。この方法では、領域Ⅰの入射境界で領域内から戻ってくる波に対する通過条件として開境界条件を用いる以外、開境界条件は用いられていない。

従って、開口部に開境界条件式を用いた解法との比較により、開境界条件の適用性を検討することが出来るであろう。

5. 解析結果

計算に用いた無次元水深は 1 で、この場合の波長は約 2π である。領域の幅 $B=30$ で、境界を離散化したセグメント幅は 0.5 である。入射波は入射境界に直角に入射し、振幅は 1 である。

図 4 は、開口部が外側に張り出した場合の波形で(a)が直接法、(b)が 2 領域接続法である。両者にはほとんど差異は見られない。図 5 は同じ結果から振幅を求め、その等高線を描いたものである。この場合は部分的にわずかな差が見られる。

図 6 と図 7 は、さらに外側に開口部が張り出した場合の波形と振幅の等高線である。図 4、図 5 と同様、振幅の等高線にわずかな差が見られるだけである。

図 8 は、内側に開口部が凹んだ場合の振幅の等高線であ

る。様子は外の場合と変わらない。

図 9 と図 10 は、ふたつの解析方法による振幅の差の等高線である。図 9 は開口部の両側の境界が、一直線上にある場合で、純解析的には全く同一の解が得られるべきであるが、約 10% 程度の差が見られる。これは用いた代数方程式の解法による誤差や、単精度を用いたこと等の数値誤差で開境界による誤差ではない。図 10 は計算例の中で最も誤差の大きかったと思われる図 8 の結果を用いた場合で、部分的には入射振幅に対し 20% 程の誤差のある所もあるが、局所的振幅は 3 を超えていることを考慮すると、局所振幅に対する誤差は 10% 以下となり、さらに図 9 で示した数値誤差を考えると、開境界条件による誤差は数% となり、開境界条件の妥当性を示していると言えよう。

6. まとめ

Hamanaka(1995)、浜中(1995)によって提案された新しい開境界条件式は、開口部とその両側の防波堤が直線上にあるとの仮定の下に導かれた。本研究では、そのような配置にない場合にも提案した開境界条件式が適用可能であることを示すために、開口部の外側にもう一つの領域を設け、2 領域接続法により解いた。その結果を、開口部に直接開境界条件式を適用した場合と比較し、両者の間に有意な差が生じないこと、すなわち、直線配置でない場合にも、提案した開境界条件式が適用可能であることを示した。

参考文献

- Isaacson, M. and S. Qu (1990) : Wave in harbour with partially reflecting boundaries, Coastal Engg., vol.14, pp.193-214
- Chou, C.R. and W.Y. Han (1993) : Wave induced oscillations in harbours with dissipating quays, Coastal Engg. Japan, vol.36, No.1, pp. 1-23
- Hamanaka, K. (1995) : Fundamental solution and boundary condition on oscillations in harbors of arbitrary geometry, 12th Australasian Coastal and Ocean Engg. Conf., pp.163-168
- 浜中建一郎(1995) : グリーンの公式を用いた静穏度解析における種々の境界条件について, 海岸工学論文集 第 42 巻, No. 2, pp. 996-1000
- 野村圭司, 佐藤幸雄, 浜中建一郎(1996) : 境界要素法を用いた平面 2 次元波動場解析における開境界条件の検討, 海洋開発論文集 Vol. 12, p13-18

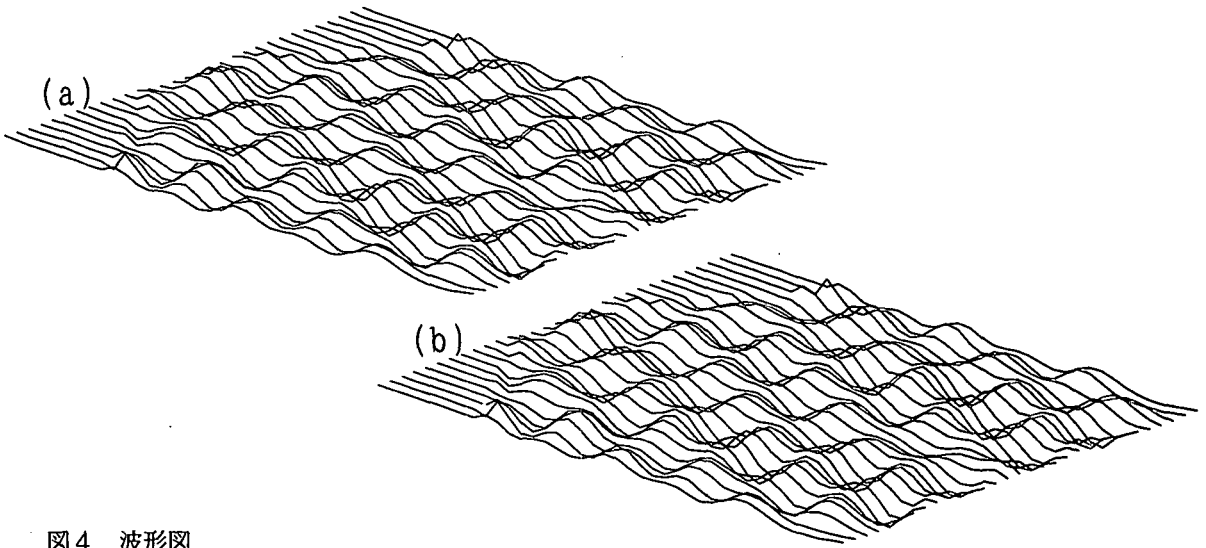


図4. 波形図

(a) 直接法 (b) 2領域接続法

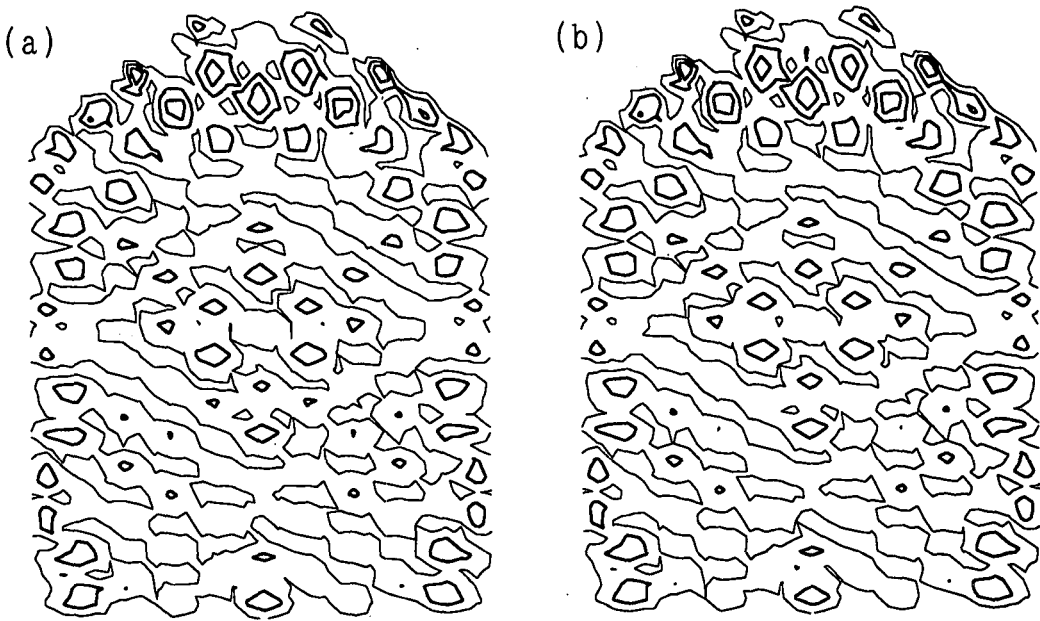


図5. 振幅の等高線

(a) 直接法 (b) 2領域接続法

等高線 細線 1, 太線 2, 3

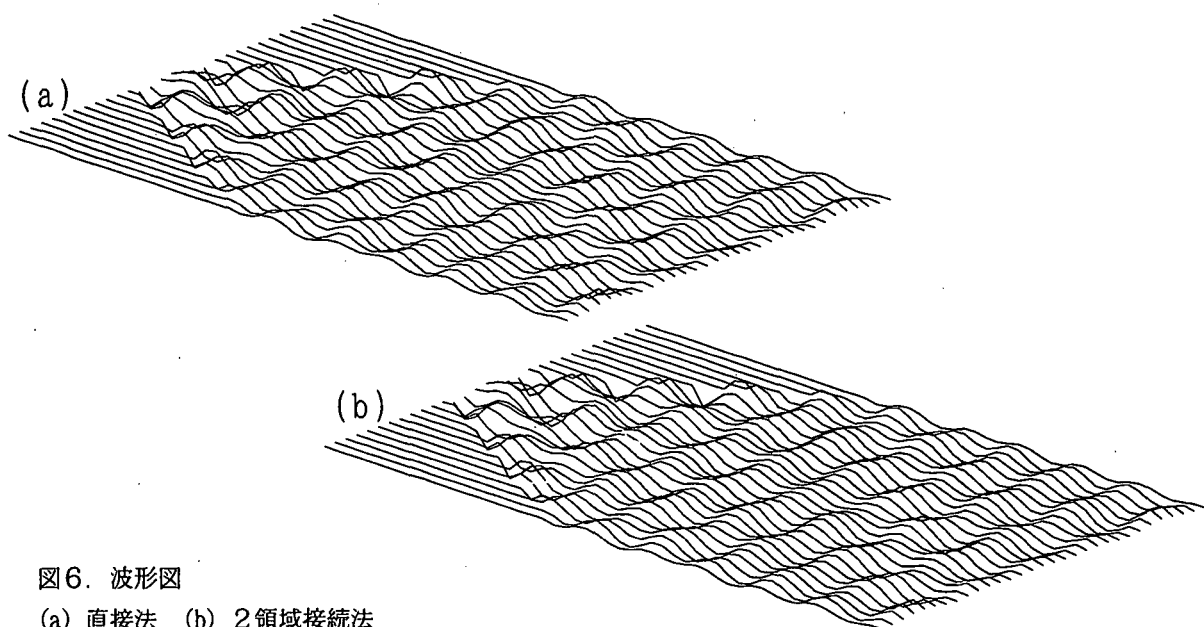


図6. 波形図

(a) 直接法 (b) 2領域接続法

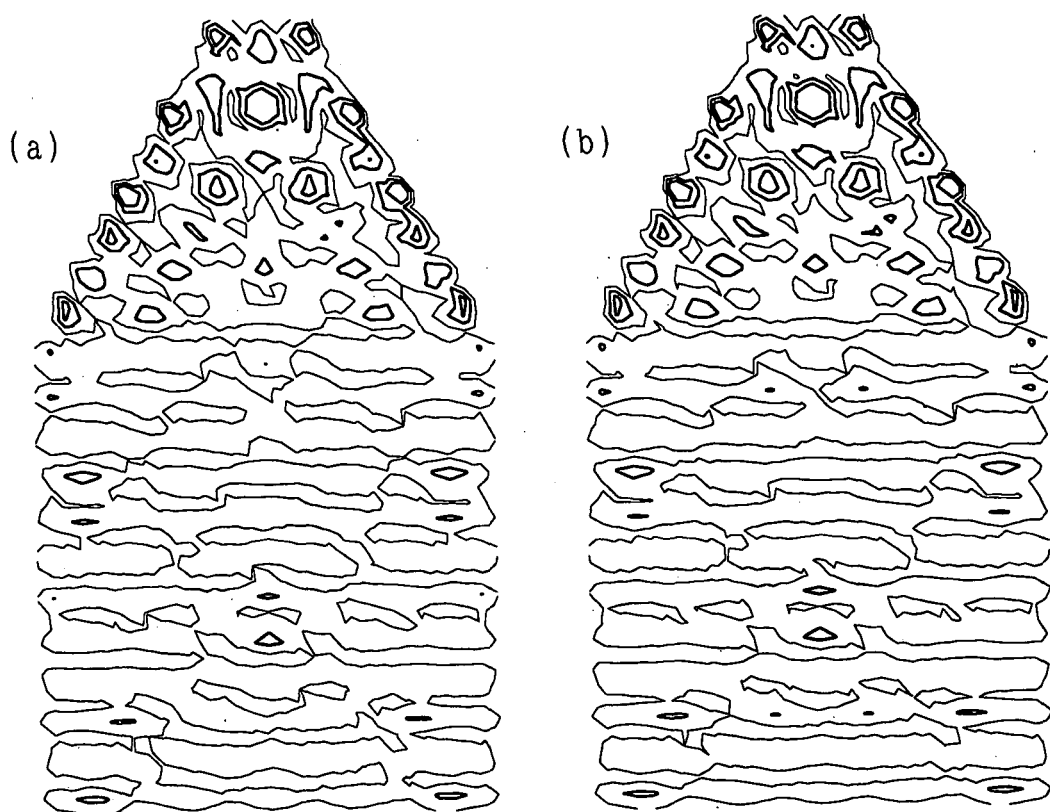
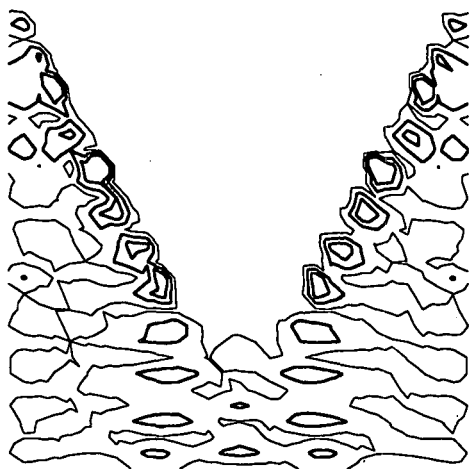


図7. 振幅の等高線

(a) 直接法 (b) 2領域接続法

等高線 細線 1, 太線 2, 3

(a)



(b)



図8. 振幅の等高線

(a) 直接法 (b) 2領域接続法

等高線 細線 1, 太線 2, 3

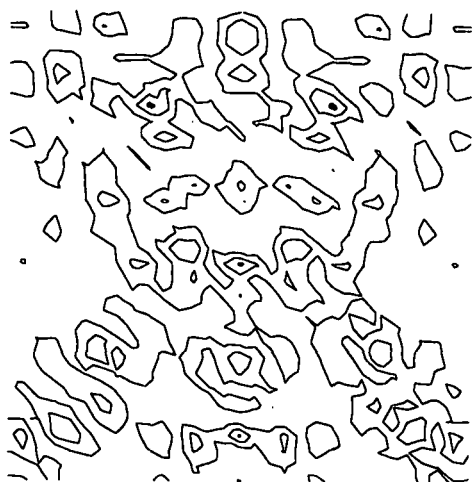


図9. 振幅の差の等高線

等高線 細線 4, 8%, 太線 12, 16, 20%

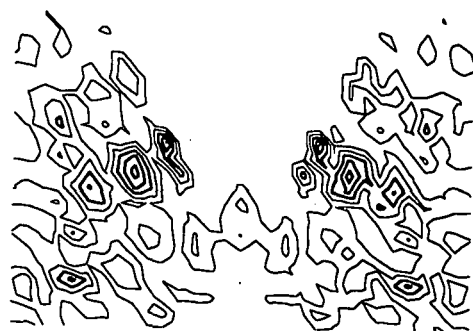


図10. 振幅の差の等高線

等高線 細線 4, 8%, 太線 12, 16, 20%