

剥離を伴う波動場中の円柱に働く流体力と Morison式の係数

Morison's Coefficient C_D, C_M and Fluid Force on a Circular Cylinder with Separation in Water Waves

佐藤 幸雄*・奥村 慎也**・浜中建一郎***

Yukio Sato, Shinya Okumura and Ken-ichiro Hamanaka

Using vorticity equation and Poisson equation for stream function for governing equation, flow structure around a circular cylinder in water waves was calculated numerically. Calculated results were expressing appropriately the behavior of vorticity, stream line and pressure field. Next, fluid force acting on the circular cylinder was calculated using the values of pressure field obtained by numerical analysis. The coefficients C_D, C_M of Morison equation were obtained applying the Minimum square method to in-line force with time. Consequently, it was found that when Keulegan-Carpenter number, K.C. became larger, coefficients C_D, C_M were different gradually compare with these of potential flow.

Key words : circular cylinder, separation, fluid force

I. まえがき

円柱を水平な状態で2次元的に微小振幅波または浅水波等の波動場中に没水させて設置した場合、波動場中では水平方向および鉛直方向流速成分が存在するため、水平振動流のような場合と異なり、円柱は種々の方向から流体力を受け上下左右に動揺することが考えられる。また、粘性の影響により円柱表面上に剥離が生じ剥離渦が伴うような場合は円柱に加わる流体力はポテンシャル流の場合とは異なることが考えられる。このような点に着目して、本研究は円柱表面上より遠く離れた境界層外縁に微小振幅波の流速成分を境界条件に与え、剥離を伴う円柱のまわりの流れ場および圧力場を、渦度方程式および流れ関数に対するポアソン方程式を用いて数値解析により求めた。増田ら(1985)、Stansby(1991)は低いK.C.数の場合に、Morison式の抗力係数 C_D および質量力係数 C_M について検討している。本研究も同様の趣旨であるが、K.C.数が若干大きい値まで含んでいること、また、流れ場についてやや詳細であることなどが異なっている。本研究では数値解析により求めた流体力の時間変化にMorison式を適用し、最小2乗法により C_D, C_M の値を求めた。そして、剥離を伴う場合の流体力に対するMorison式の適用性について検討を加えることとした。

II. 基本方程式

図-1に示すような座標系を用いて、円柱を波動場内に水平かつ2次元的に固定した状態で設置し、垂直上向きにy軸、水平方向にx軸を取る。つぎに、各変量を円柱の半径 R_0 ($2R_0=D$, D :直径)と表面波の振動数 σ' ($=2\pi/T'$, T' :周期)

で無次元化した場合、流れ関数に対するポアソン方程式と渦度方程式はそれぞれ式(1)および式(2)となる。

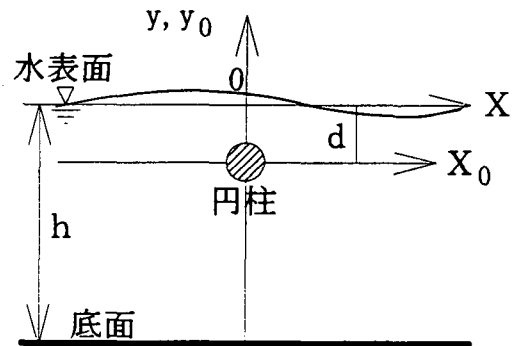


図-1 座標系の定義

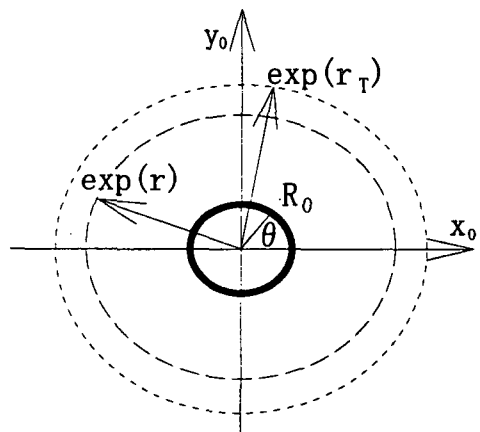


図-2 等角写像による座標系

- * 正会員 北見工業大学工学部土木開発工学科
- ** 学生員 北見工業大学大学院
- *** 正会員 北海道東海大学工学部海洋開発工学科

(090北見市公園町165番地)

$$\Delta\psi = -\omega \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \nu\Delta\omega \quad \dots\dots(2)$$

さらに、式(3)を用いた等角写像により図-2に示すような新しい座標系を導入すると、無次元化された流れ関数に対するポアソン方程式と渦度方程式の式(1)および(2)はそれぞれ (r, θ) 座標系に変換されて式(4)および(5)となる。

$$x = e^r \cos \theta, \quad y = e^r \sin \theta \quad \dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2} = -J\omega \quad \dots\dots(4)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = J^{-1} \left[-\frac{\partial\psi}{\partial \theta} \frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\omega}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad \dots\dots(5)$$

ここで、 J は式(3)のヤコビアンで式(6)で表される。
 $J = e^{2r} \quad \dots\dots(6)$

Ⅲ. 境界条件

流れ関数 ψ の Γ 方向微分係数は、

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = e^r (-v \cos \theta + u \sin \theta) \quad \dots\dots(7)$$

となり、円柱より遠く離れた境界層外縁 ($r=r_T$) で微小振幅浅水波の流速成分を与えることとする。無次元化された水平および鉛直方向流速成分はそれぞれ

$$u = A \cdot \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \sin(kx-t) \quad \dots\dots(8)$$

$$v = A \cdot \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \cos(kx-t) \quad \dots\dots(9)$$

ここで、水深 ; $h=h'/R_0'$, 波長 ; $L=L'/R_0'$, 振幅 ; $A=H'/2R_0'$ したがって、式(4)および(5)の境界条件としては、

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)_{r=r_T} = A \cdot R_T \left[\sin \theta \frac{\cosh ky_0}{\sinh kh} \sin(kx_0-t) - \cos \theta \frac{\sinh ky_0}{\sinh kh} \cos(kx_0-t) \right] \quad \dots\dots(10)$$

ここで
 $x_0 = R_T \cos \theta, \quad y_0 = h - d + R_T \sin \theta$
 $k = 2\pi / L, \quad \exp(r_T) = R_T, \quad d; \text{没水深}$
 また、円柱表面上では $u = v = 0$ より

$$r=0 \quad \text{で} \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial \theta} = 0 \quad \dots\dots(11)$$

渦度の境界条件としては、 $r=r_T$ において $\omega=0$

$$r=0 \quad \text{では} \quad \text{Thom の式を使用して} \quad \omega = -J^{-1} \frac{\partial\zeta}{\partial r} \left\{ \frac{2\psi(\Delta\zeta)}{(\Delta\zeta)^2} \right\}, \quad r=r_T \frac{e^{b_T}-1}{e^b-1} \quad \dots\dots(12)$$

b ; 座標の空間メッシュの歪み度合いを与える。

Ⅳ. 圧力場について

Navier-stokesの方程式を使用して導かれた圧力方程式を無次元化して式(13)に示す。

$$\Delta p = 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots(13)$$

ここで、 $p = p' / \rho' (\sigma' R_0')^2$, ρ' ; 流体の密度
 式(13)の境界条件として、円柱の表面では、

$$r=0 \quad \text{で} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \quad \dots\dots(14)$$

また、円柱より遠く離れたところでは微小振幅波の圧力を適用することとし、無次元化された圧力の式は、

$$p = \frac{A \cdot L}{2\pi} \frac{\cosh ky_0}{\sinh kh} \sin(kx_0-t) \quad \dots\dots(15)$$

である。

Ⅴ. 解析方法および計算条件

式(4)、(5)を数値解析により解くために、 θ 方向にはスペクトル法を、また r 方向には有限差分法を適用し、時間方向は前進差分、空間差分には中央差分スキームを使用した。また、圧力場 p の値は流れ関数 ψ が求められた後、その ψ の値を使用して、 ψ を求めたときと同様の方法で求めることが出来る(奥村ら、1995、海講参照)。

計算条件は表-1(a)、(b)に示した通りであるが、波動場の値については無次元量で $L=2420$, $h=400$, $d=100$ の 1 種類の場合である。これらの値を $D'=10\text{cm}$ と

表-1(a) 計算条件

K. C. 数	Re数	CASEの数	NT	NNT	cycles
1.0~13.0	150	13ヶ	16000	48000	3
1.0~11.0	200	11ヶ	16000	48000	3
1.0~12.0	250	12ヶ	16000	48000	3
1.0~12.0	300	12ヶ	16000	48000	3
1.0~8.0	400	8ヶ	16000	48000	3

表-1(b)

CASE	K. C. 数	Re数	A	ν
1	2.0	250	0.596	0.00509
2	6.0	250	1.788	0.01527
3	12.0	250	3.576	0.03055

して有次元量で示すと、 $L'=121m$, $h'=20m$, $d'=5m$, $T'=11sec$, それに波高 $H'=10 \cdot A_{cm}$ に相当する。表中のNTは1周期 (2π) の分割数 $\Delta t = 2\pi / NT$ であり、NNTは3周期分、 $NNT = 3 \cdot NT$ (3cycles) である。また、 r 方向、 θ 方向のメッシュ分割数は共に64 η とした。また、

$$\left. \begin{aligned} K.C. \text{ 数} &= \frac{u' T'}{D'} = \pi A \frac{\cosh k(-d+h)}{\sinh kh} \\ Re \text{ 数} &= \frac{u' D'}{v'} = \frac{2\pi \cosh k(-d+h)}{v \sinh kh} \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

である。

VI. 計算結果および考察

多くの計算 CASE の中より1例として表-1 (b)に示すような計算CASE ($Re=250$, $K.C.=2, 6, 12$)について図示すると、渦度のContours図については図-3、図-4、図-5 であり、 $K.C.$ 数が大きくなるにしたがって、円柱のまわりに発生する剥離の状態も活発となる。このような渦度の値に対応した流れの状態を図-6、図-7および図-8に流れ関数のContours図で示したが渦の発生に対応した流れの状態がよく現れていることが分かる。つぎに、同じ計算条件に対応する圧力場をContours図で示したのが図-9、図-10および図-11である。圧力のContoursにおいても $K.C.$ 数が次第に大きくなると、円柱に加わる圧力が大きくなることが分かる。すなわち、Contoursが込み合っている $K.C.=12.0$ の図-11の場合では圧力勾配が急な側から緩い側へ円柱を押すような圧力が作用していることが見て取れる。以上の各図はいずれも1周期 (2π) を8等分した $t = 2\pi / 8$ 毎の状態を示したものであるが、さらに、圧力場の値を用いて円柱上に働く流体力についての時間変化を求めてみる。まず円柱表面上に働く圧力 p とせん断力 τ の水平方向ならびに鉛直方向成分をそれぞれ円柱のまわり $\theta = 0 \sim 2\pi$ について積分する。このとき水平および鉛直方向それぞれの円柱に働く流体力 F は $F = p + \tau$ である。これらの F の値を縦軸に、横軸に位相 t を取って描くと流体力の水平方向成分については図-12, 13, 14、また、鉛直方向成分については図-15, 16, 17 のようになる。

図-3 渦度のContours
CASE-1 K.C.=2 Re=250

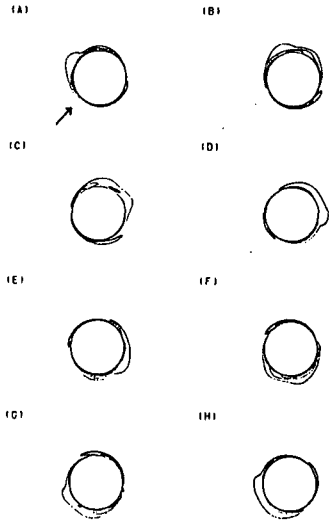


図-4 渦度のContours
CASE-2 K.C.=6 Re=250

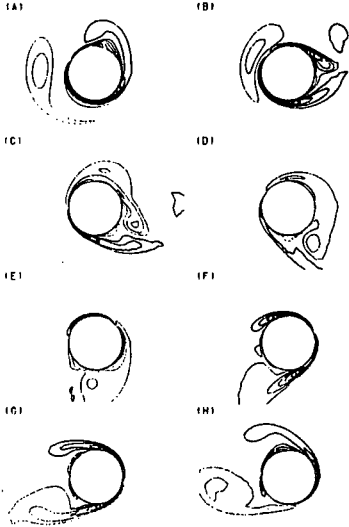


図-5 渦度のContours
CASE-3 K.C.=12 Re=250

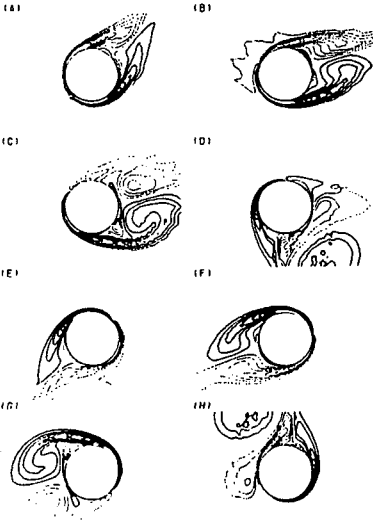


図-6 流れ関数のContours
CASE-1 K.C.=2 Re=250

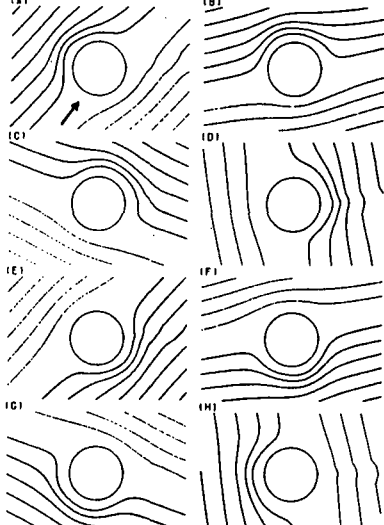


図-7 流れ関数のContours
CASE-2 K.C.=6 Re=250

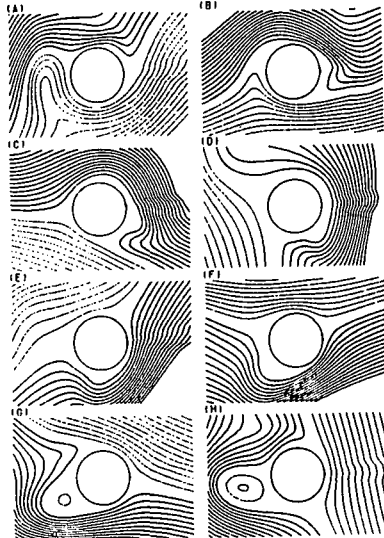


図-8 流れ関数のContours
CASE-3 K.C.=12 Re=250

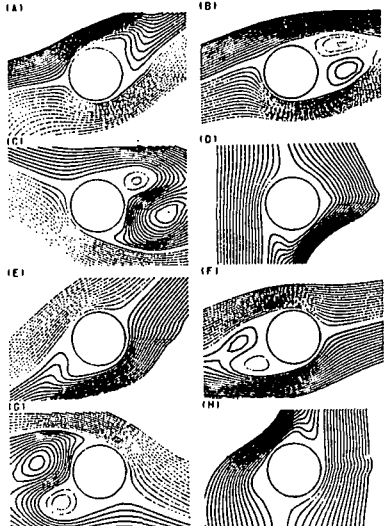


図-9 圧力場の Contours
CASE-1 K.C.=2 Re=250

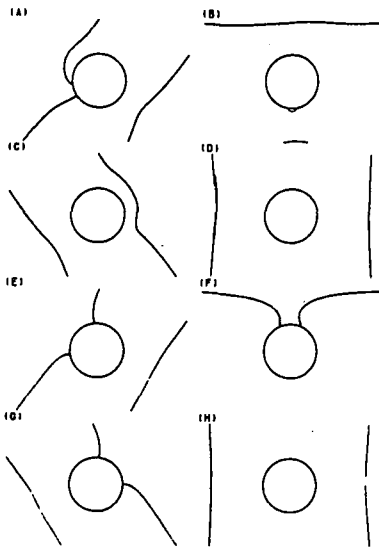


図-10 圧力場の Contours
CASE-2 K.C.=6 Re=250

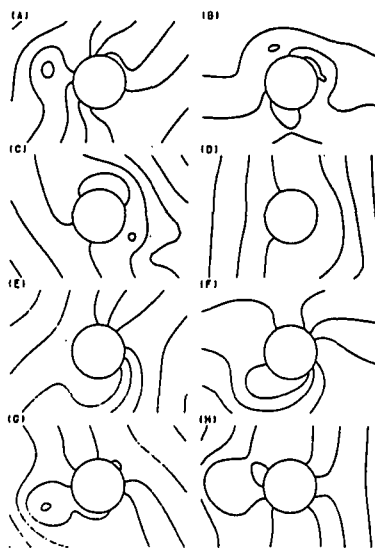


図-11 圧力場の Contours
CASE-3 K.C.=12 Re=250

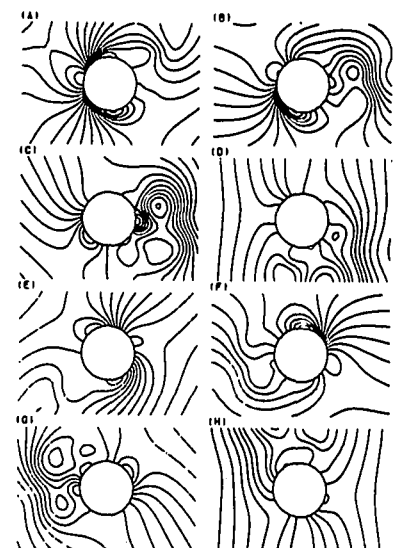


図-12 流体力の時間変化 (水平力)

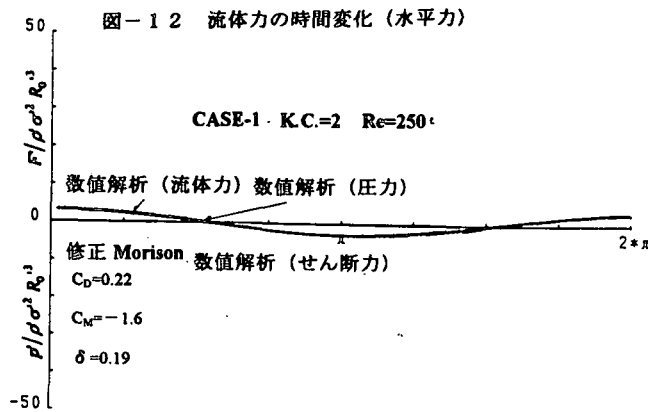


図-15 流体力の時間変化 (鉛直力)
CASE-1 K.C.=2 Re=250

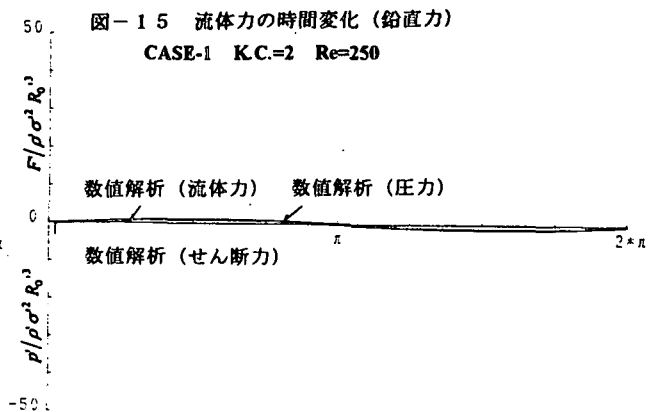


図-13 流体力の時間変化 (水平力)

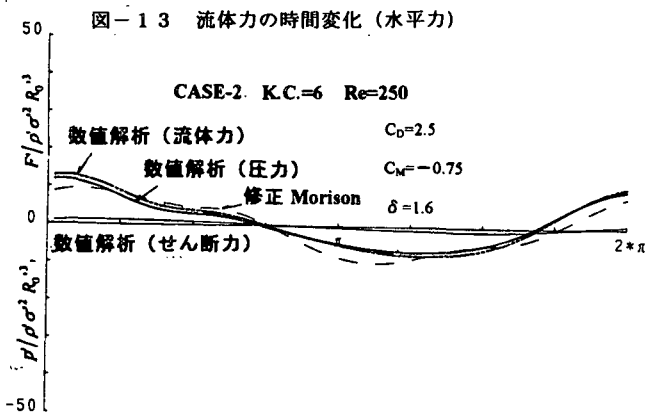


図-16 流体力の時間変化 (鉛直力)
CASE-2 K.C.=6 Re=250

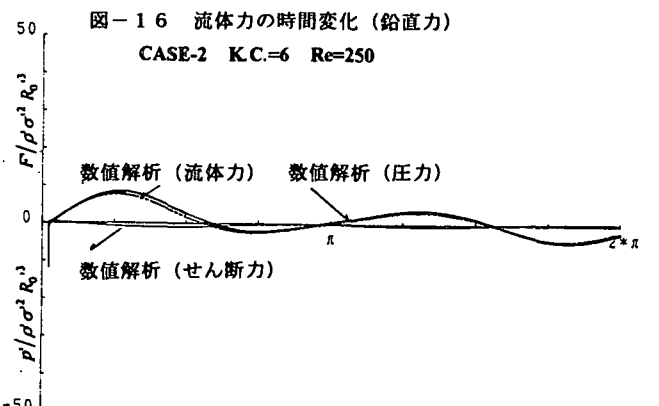


図-14 流体力の時間変化 (水平力)

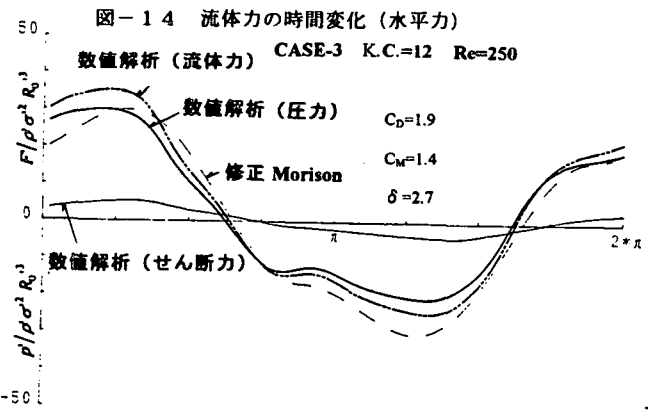
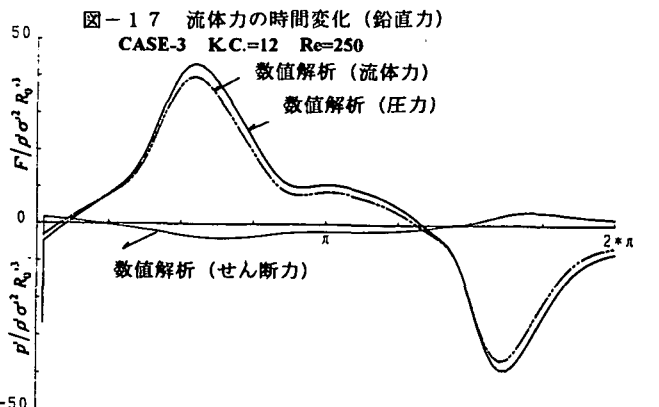


図-17 流体力の時間変化 (鉛直力)
CASE-3 K.C.=12 Re=250



まず、図-12~14の水平力の場合について見ると、 $K.C.=2$ で小さい場合はほとんどポテンシャル流ならびにMorison式の場合に一致することが分かる。また、 $K.C.=6$ になると剥離の影響により流体力の曲線にやや波打つ現象が見られ、さらに、 $K.C.=12$ の大きい場合には流体力の曲線全体に変動が見られポテンシャル流と位相にズレが生じる。また最大値が大きく突出するようになる。この傾向は鉛直力の図-15~17においても同様であるが、特に図-16 ($K.C.=6$)の場合、極大値が2ヶ所に現れる複雑な変動をする。このことは図-13を見て分かるように水平方向流速が正の最大値($t=\pi/2$)のとき剥離渦の影響により負圧が生じるため、ポテンシャル流の場合、水平圧力が零となるのに反して、正の流体力が発生する。このとき鉛直力は零に近いが、または負の値を示すこともある。さらに、位相が $t=3\pi/2$ の負の最大流速時においても同様の現象が現れるため鉛直力は振動した傾向を示すこととなる。また、 $K.C.=12$ の場合は剥離渦の影響が強く最大値が大きく突出するため、極大・極小値は1ヶ所づつとなっている。図-12~14の図中に描かれた破線は流体力の時間変化に位相のズレ δ を考慮したMorison式を適用して C_D , C_M を求め、その C_D , C_M の値を使用して再現した値を示したものである。波形の大略については適合しているが最大値まで適合させることは難しいと云える。

つぎに、水平ならびに鉛直方向の流体力を合成した値を $t=2\pi/8$ 毎にベクトル図で示し、Morison式による同様の値と比較してみると、各 $K.C.$ 数の場合、図-18, 19, 20のようになる。この場合に使用した C_D , C_M の値は流体力の時間変化のうち水平方向の場合のみに

ついてMorison式を適合させて求めた C_D , C_M の値(図-12~14に記載の値)である。図-18の $K.C.$ 数が小さい $K.C.=2$ (CASE-1)の場合は図-12, 15を見て分かるようにほとんどポテンシャル流に一致しているため図-18のベクトル図においても流体力の大きさおよび作用方向共に一致しているのが分かる。図-19の $K.C.=6$ (CASE-2)の場合は流体力の大きさにはあまり差異はないが剥離の影響が関係するため作用方向に若干差異が生ずるものと考えられる。さらに、 $K.C.=12$ (CASE-2)になると、流体力の大きさおよび作用方向共に違いが現れ、特に水平方向流速成分が最大時(B)および減速時(C)の差異が大きく、数値計算の方がMorison式の値より約2倍程度流体力は大きい値を示していると云える。

つぎに、図-21, 22, 23はCASE-2($K.C.=6$, $Re=250$)の場合について水平方向流速成分が加速時(A)ー最大時(B)ー減速時(C)の間をさらに細分化し(図下スケール参照)、位相が $t=2\pi/32$ 毎に図示した渦度、流れ関数、および圧力場のContours図である。図-21, 22より流れ方向に沿って剥離渦もまわることが分かり、この方向は流体力の作用方向(図-19)に一致していると云える。そしてこの作用方向はポテンシャル流の場合に反し、時計回りとなっているのが特徴である。このことは円柱表面に形成される剥離渦の影響による負圧が原因と考えられる。

最後に、種々の数値計算による流体力ー時間変化の曲線にMorison式を適合させて求めた C_D および C_M の値を $K.C.$ 数を横軸に取り Re 数をパラメータとしてプロットすると C_D については図-24、 C_M については図-25のようになる。図-24の C_D の値については Re 数によっ

図-18 流体力のベクトル図

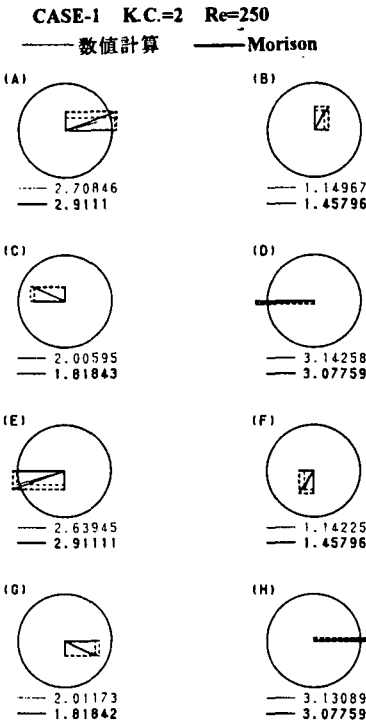


図-19 流体力のベクトル図

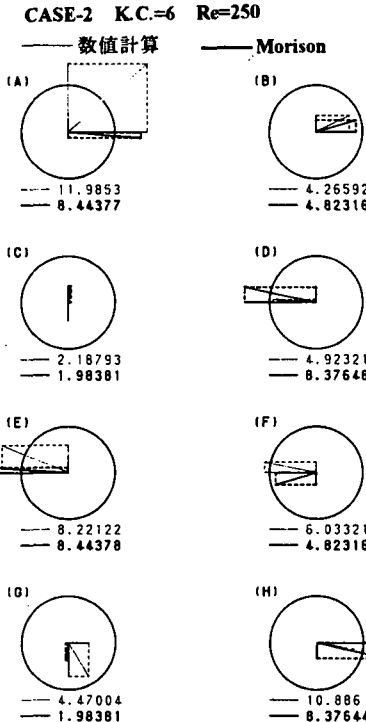


図-20 流体力のベクトル図

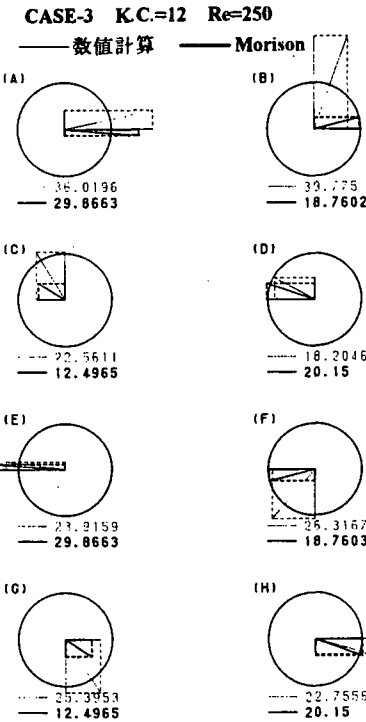


図-21 渦度のContours

CASE-2 K.C.=6 Re=250(位相 $t = \frac{10\pi}{32} \sim \frac{3}{4}\pi$)

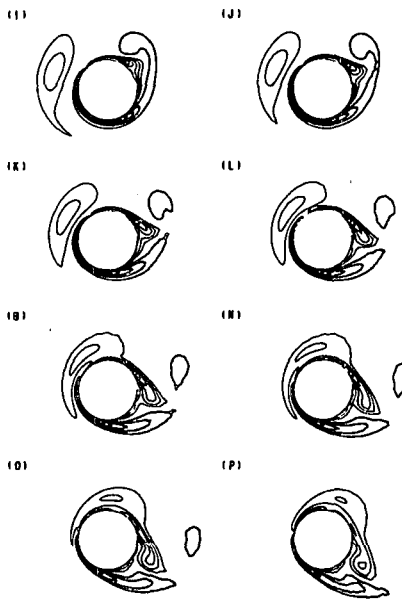


図-22 流れ関数のContours

CASE-2 K.C.=6 Re=250(位相 $t = \frac{10\pi}{32} \sim \frac{3}{4}\pi$)

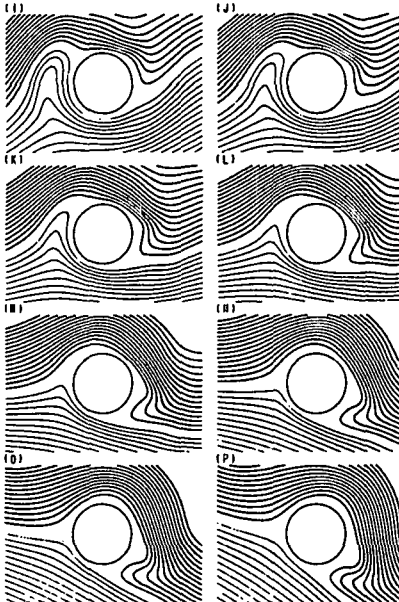


図-23 圧力場のContours

CASE-2 K.C.=6 Re=250(位相 $t = \frac{10\pi}{32} \sim \frac{3}{4}\pi$)

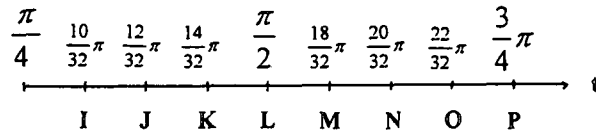
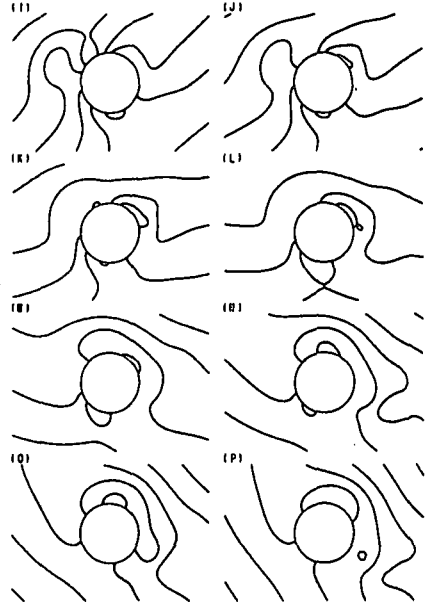


図-24 C_D の値

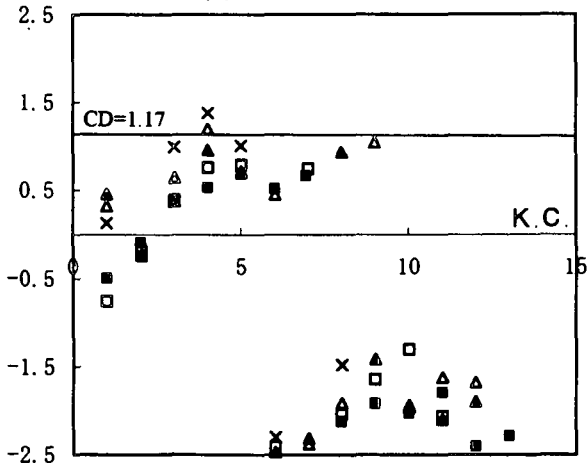
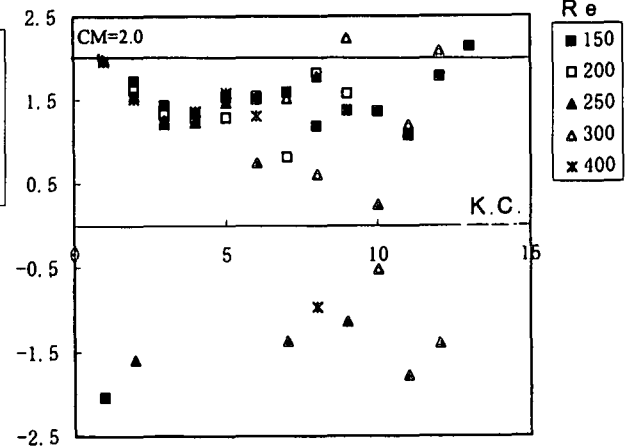


図-25 C_M の値



でも異なるが、大略 $K.C. < 5 \sim 6$ のとき $K.C.$ 数と共に増加する傾向があり、増田らの実験値($K.C.=2 \sim 5$ で $C_D=1.0 \sim 1.5$)にほぼ合致した値となっている。 $K.C. > 5 \sim 6$ の範囲では $C_D=-1.5 \sim -2.5$ 程度にグループ分けされる傾向が得られた。これらの C_D に対応した C_M の値は図-25より一部負側にプロットされた点はあるが全体的には $C_M=1.0 \sim 2.0$ 程度の値を示している。Stansbyは $K.C.$ 数が小さい場合について $K.C.=1 \sim 2$ で $C_M=1.0 \sim 2.0$ 程度の値を示しているが、本研究の場合も低い $K.C.$ 数においては同様の値が得られていると云える。

参考文献

- 1) 増田進弘・渡辺 晃・堀川清司 (1985) ; 波動場におかれた水平円柱に作用する波力と周辺流速場
土木学会第40回年次学術講演会講演概要集, pp.541~542
- 2) Stansby P.K.&Smith P.A. (1991) ; Viscous forces on a circular cylinder in orbital flow
at low Keulegan-Carpenter number, J.of Fluid Mech. vol.229,pp.159~171
- 3) 奥村慎也・佐藤幸雄・渡部靖憲 (1995) ; 波動場中の円柱のまわりの流れ構造について,海岸工学論文集第42巻,pp.831~835