

境界要素法を用いた平面2次元波動場解析 における開境界条件の検討

Open boundary for horizontal 2-D wave analysis with boundary element method

野村圭司*・佐藤幸雄**・浜中建一郎***

Keiji Nomura, Yukio Sato and Ken-ichiro Hamanaka

The wave field governed by the Helmholtz equation with a constant depth and the linearized water surface condition can be solved with Boundary Integral Method implemented by the Green's integral equation. In this method, suitable boundary conditions should be established corresponding to the types of boundaries. The present paper proposes new boundary conditions for open boundary, partial reflection boundary and incident-absorbing boundary. These condition do not depend on the incident angle, the number of wave components and the types of waves (plane waves and cylindrical waves). Numerical results show the complete validity of these conditions.

1. はじめに

水深が一定で、自由水面での境界条件が線形化出来、全ての境界が鉛直面で構成されている場合の波動場の解析は、水平2次元の Helmholtz 方程式に帰着させ Green の積分方程式を用いた境界要素法により解くことが出来る。その際、種々のタイプの境界を考える必要がある。すなわち、完全反射境界、開境界、部分反射境界、入射・吸収境界である。これ等のうち、完全反射境界を除く、他の3つの境界に対しては、開境界条件を拡張して用いることが出来るため、妥当な開境界条件を与えることは非常に重要である。

従来開境界条件としては、特定の入射角を持つ一成分の平面波に対する条件が準用されてきた Isaacson et al (1990)、Chou et al (1993)。しかし、この条件では当然のことながら他の入射角、複数の成分波、円筒波には適用できない。それに対し、著者等は (Hamanaka: 1995, 浜中: 1995) 波の種類 (平面波、円筒波)、入射角、成分数によらず成立する開境界条件を提案し、円筒波に対し妥当な解を与えると同時に、部分反射境界条件に拡張した場合も妥当な解が得られることを示した。

本研究では始めに、従来の開境界条件を適用した場合、どのような見かけの反射波が発生するかを示す。次に境界要素法で扱う行列は密行列であることを考慮すると、未知数の数を低減させることは重要であることから、著者等の開境界条件を適用した場合の未知数の低減法を述べる。さらに任意の入射角を持つ平面波、複数の成分波に対しても妥当な解が得られることを示すと同時に、入射・吸収境界に適用して妥当な解が得られることを示す。

2. 基礎方程式と積分方程式

流体運動は非圧縮、非粘性、非回転と仮定する。今、波動場が時間的に周期的であると仮定すると、その速度ポテンシャルは

$$\hat{\Phi} = \text{Re} \{ \hat{\phi} e^{-i\hat{\omega}t} \} \quad : \quad \hat{\omega} \text{ は角周波数}$$

と表せる。

全ての変量を $\hat{\omega}$ と重力加速度 $\hat{g}$ とで無次元化すると

$$(x, y, z) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \hat{\omega}^2 / \hat{g} \quad , \quad (\eta, h) = (\hat{\eta}, \hat{h}) \hat{\omega}^2 / \hat{g}$$

$$t = \hat{\omega} \hat{t} \quad , \quad \hat{\phi} = \hat{\phi} \hat{\omega}^3 / \hat{g}^2$$

基礎方程式は3次元ラプラス方程式で、水面 ($z=0$) と底面 ($z=-h$) での境界条件と共に以下の様に表される。

* 学生員 北海道東海大学大学院

** 正員 北見工業大学工学部土木工学科

*** 正員 北海道東海大学工学部海洋開発工学科

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} &= \bar{\phi} \quad \text{on } z=0 \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } z=-h \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

さらに

$$\bar{\phi} = \phi(x, y) \cosh k(z+h)$$

として変数分離を行うと、以下の Helmholtz 方程式が得られる。

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (2)$$

ここで

$$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \quad , \quad k \tanh kh = 1$$

(2) 式の Helmholtz 方程式に対する Green の公式は

$$\int_V \left\{ \phi (\Delta G + k^2 G) - G (\Delta \phi + k^2 \phi) \right\} dv = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (3)$$

と表される。ここで V は考えている領域で、 S はその境界、 ν は境界上の外向法線を表す。(3) 式における関数 G として、(2) 式を満たし特異性を有する 0 次の第 1 種ハンケル関数

$$G = H_0^{(1)}(kr) \quad , \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (4)$$

を用いると、(3) 式は

$$4i\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (5)$$

または

$$2i\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (6)$$

となる。ただし(5)式は特異点 $P(x_0, y_0)$ が領域内にあるときで、(6)式は特異点が境界上にあるときである。境界要素法では、(6)式を離散化して、境界上のポテンシャルに関する連立 1 次方程式として解き、得られた境界上のポテンシャルから(5)式により領域内の任意の位置でのポテンシャルが求められる。

なお(4)式のハンケル関数は特異点から充分離れた遠方境界では、特異点から離れる方向に進行する波動解となり、放射条件を満たしている。

3. 従来の境界条件とその問題点

(2) 式の Helmholtz 方程式を用いて、平面 2 次元波動場を解くには、種々の境界条件を考える必要がある。完全反射境界、開境界、部分反射境界、入射・吸収境界などである。このうち、完全反射境界に対する条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$$

として与えられ、問題はない。

これに対し、開境界条件としては従来、Isaacson et al (1990) や Chou et al (1993) に見られる様に、境界に対する特定の入射角を持つ入射波に対する条件式が準用されてきた。しかしながら、この条件式では、それ以外の入射波に対しては正確な条件を与えず、見かけの反射波が発生することが予想される。

一方著者等は(Hamamanaka:1995, 浜中:1995)、入射角に依存せず、入射波としては平面波でも円筒波でもよく、又複数の成分波に対しても成立するほぼ完全な開境界条件式を提案した。一般に、開境界条件は、従来の場合でも、著者等の場合でも、部分反射や入射・吸収条件にも拡張して用いられるため、妥当な開境界条件を与えることは特に重要である。

本節では、従来の開境界条件ではどのような見かけの反射波が発生するか解析的に示す。

Isaacson et al (1990) や Chou et al (1990) によれば、部分反射も含んだ開境界条件として

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = i\alpha k \phi \quad (7)$$

が与えられる。係数 α は入射角と反射率に依存し、直角入射で反射率零 (開境界) の場合は $\alpha = 1$ である。

(7) 式で与えられる開境界条件で発生する見かけの反射波を解くために図 1 の様に y 軸上に開境界を設け、 $x < 0$ の領域から入射する波を考える。入射波と見かけの反射波のポテンシャルを各々 ϕ_I 、 ϕ_R とすると

$$\phi = \phi_I + \phi_R = e^{i(k_x x + k_y y)} + a_R e^{i(-k_x x + k_y y + \delta)}$$

とあらわされる。境界 $x=0$ で、常に(7)式が成立するとすると

$$a_R e^{i\delta} = \frac{k_x - \alpha k}{k_x + \alpha k}$$

となる。また、 $k_x = k \cos \theta$ とすると

$$a_R e^{i\delta} = \frac{\cos \theta - \alpha}{\cos \theta + \alpha}$$

となり、さらに反射率を R とすると

$$R = |a_R e^{i\delta}| = \left| \frac{\cos \theta - \alpha}{\cos \theta + \alpha} \right| \quad (8)$$

と表される。

(8)式は反射率が係数 α と入射角 θ に依存していることを示す。図2は $\alpha=1$ のときの θ に対する R の値である。 $\theta=0$ の直角入射では反射率は零となり妥当な開境界条件を与えていることが分かるが、入射方向が境界に平行に近づくに従って反射率が大きくなることが分かる。

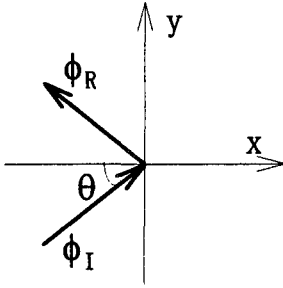


図1

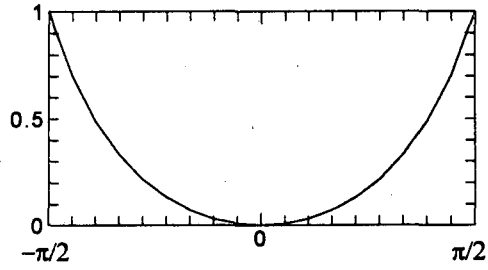


図2

この結果は5節で数値解によって確認される。

4. 著者等の開境界条件と離散化

Hamanaka (1995)、浜中(1995)によれば、開境界条件は

$$2i\phi(P) = \int_{S_0} G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds \quad (9)$$

で与えられる。ここで S_0 は開境界で、特異点 P は開境界上にある。

始めに(6)式の離散式を示す。境界を小さなセグメントで離散化し、通し番号を付け、ポテンシャルと特異関数はセグメントの中央点の値で代表させる。特異点が i 番目のセグメントにあるとすると(6)式は

$$2i\phi_i = \sum_j^S (\phi_j \bar{E}_{ij} - E_{ij} \bar{\phi}_j) \quad \cdot \quad \bar{\phi}_j = \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_j \quad (10)$$

ここで $i \neq j$ のとき

$$E_{ij} = \int_{\Delta S_j} G ds = G(x_j, y_j; x_i, y_i) \Delta S_j$$

$$\bar{E}_{ij} = \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \frac{\partial}{\partial \nu} G(x_j, y_j; x_i, y_i) \Delta S_j$$

$i = j$ のときは特異点を除いた主値積分から

$$E_{ij} = \Delta S_j + \frac{2i}{\pi} \left(\log \frac{k \Delta S_j}{4} - 1 + \gamma \right) \Delta S_j$$

$$\bar{E}_{ij} = 0$$

となる。

(9)式も同様に離散化すると以下となる。

$$2i\phi_j = \sum_p^{S_0} E_{jp} \bar{\phi}_p \quad (11)$$

開境界上では未知数はポテンシャルとその法線微分の両方であるから、(10)式に(11)式を連立させて解くことが出来る。しかしながら扱う行列は密行列であり、計算機容量を考慮すると、未知数の数を低減することは重要と思われる。従ってあらかじめ(11)式を(10)式に代入し未知数を半減させる。

開境界以外の境界を S_1 とし $S = S_0 + S_1$ とする。(11)式を(10)式に代入し整理する。

(10)式の特異点(左辺の i 番目)が S_1 上にあるときは

$$2i\phi_i = \sum_j \left(\sum_p \frac{1}{2i} E_{pj} \bar{E}_{ip} - E_{ij} \right) \bar{\phi}_j + \sum_j (\phi_j \bar{E}_{ij} - E_{ij} \bar{\phi}_j) \quad (12)$$

となる。

(10)式の特異点が開境界(S_0)上にあるときは左辺にも(11)式を代入し

$$\sum_j \left(\sum_p \frac{1}{2i} E_{pj} \bar{E}_{ip} - 2E_{ij} \right) \bar{\phi}_j + \sum_j (\phi_j \bar{E}_{ij} - E_{ij} \bar{\phi}_j) = 0 \quad (13)$$

となる。

部分反射境界に対しては反射率を R とすると(9)式の代わりに

$$\frac{2i}{1+R} \phi_i(P) = \int_{S_0} \frac{G}{1-R} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds \quad (14)$$

で与えられる。この境界でも未知数はポテンシャルとその法線微分の両方であるから、(11)式と同様に(14)式を離散化して連立させるか、(10)式に代入して(12)または(13)式と同様に整理すれば良い。

特異点が S_1 上の上のときは

$$2i\phi_i = \sum_j \left(\sum_p \frac{1}{2i} \frac{1+R}{1-R} E_{pj} \bar{E}_{ip} - E_{ij} \right) \bar{\phi}_j + \sum_j (\phi_j \bar{E}_{ij} - E_{ij} \bar{\phi}_j) \quad (15)$$

S_0 上の上のときは

$$\sum_j \left(\sum_p \frac{1}{2i} \frac{1+R}{1-R} E_{pj} \bar{E}_{ip} + \frac{2R}{1-R} E_{ij} \right) \bar{\phi}_j + \sum_j (\phi_j \bar{E}_{ij} - E_{ij} \bar{\phi}_j) = 0 \quad (16)$$

入射・吸収境界では、吸収すべき通過波のポテンシャルに開境界条件(9)式を適用すれば全く同様に扱うことが出来る。

5. 解析結果

従来の開境界条件と著者等の開境界条件を用いた場合の結果の違いを見るために、図3で示される領域を考える。EからDにむかってと、FからAに向かって半無限の完全反射堤があり、EFが開口部となっている。波は平面波で図の右下側から入射する。図中の破線AB、BC、CDは海域中に設けた人工的境界で、入射・吸収境界である。すなわち、この境界で入射波の条件を与えると同時に、領域内で反射してこの境界を通過する波に対しては開境界条件を与える。開口部では、従来の開境界条件を与えた場合と、著者等の開境界条件を与えた場合の二通りを解析した。吸収条件としては、開口部での違いが明確になるようにいずれの場合も著者等の開境界条件を与えた。

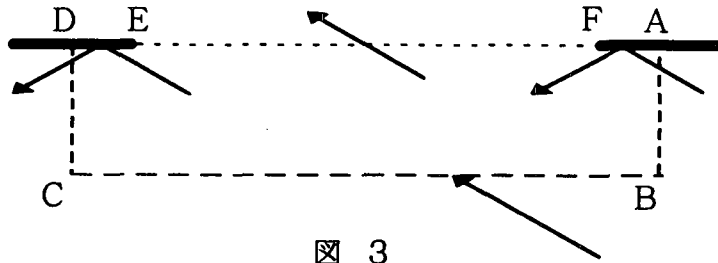


図 3

図4は入射角が零(開口部に対して直角入射)の場合で全波動場から入射波成分を差し引いた反射成分を表す。(a)が従来の開境界条件、(b)が著者等の開境界条件で、3節の解析から予想されるように、いずれの場合も見かけの反射波は発生していない。図5は入射角 $\theta = 60^\circ$ の場合で、従来の方法では開口部に見かけの反射波が現れる。図6は入射方向がさらに境界に平行に近づいた $\theta = 80^\circ$ の場合で、従来の方法ではさらに大きな見かけの反射波が発生している。いずれの場合も、著者等の方法では開口部から反射波は発生せず、妥当な解を与えている。図7は従来の方法で得られた開口部での反射波のポテンシャルで実線が実部を破線が虚部を示している。(a)は入射角 60° で、(b)は入射角 80° である。入射波の振幅は単位1

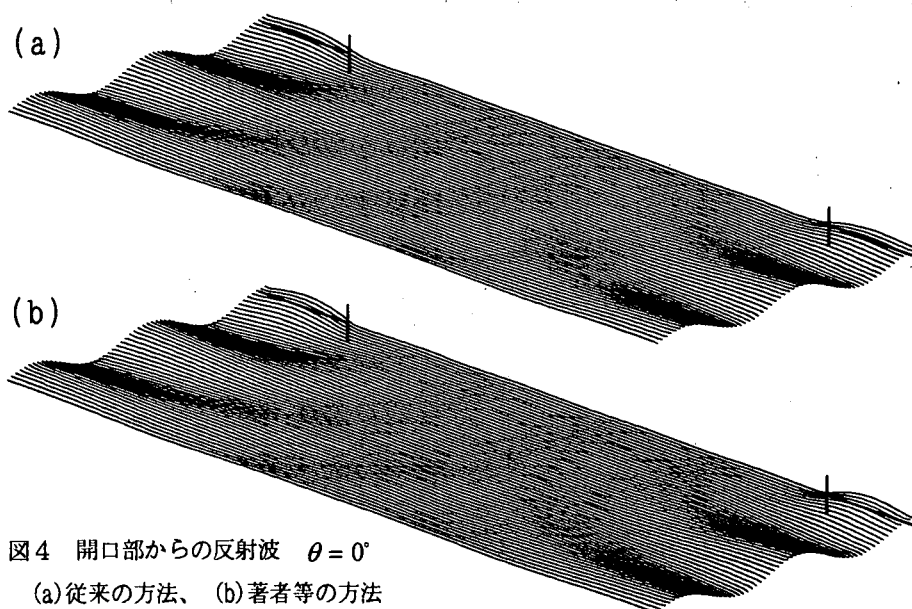


図4 開口部からの反射波 $\theta = 0^\circ$
(a)従来の方法、(b)著者等の方法

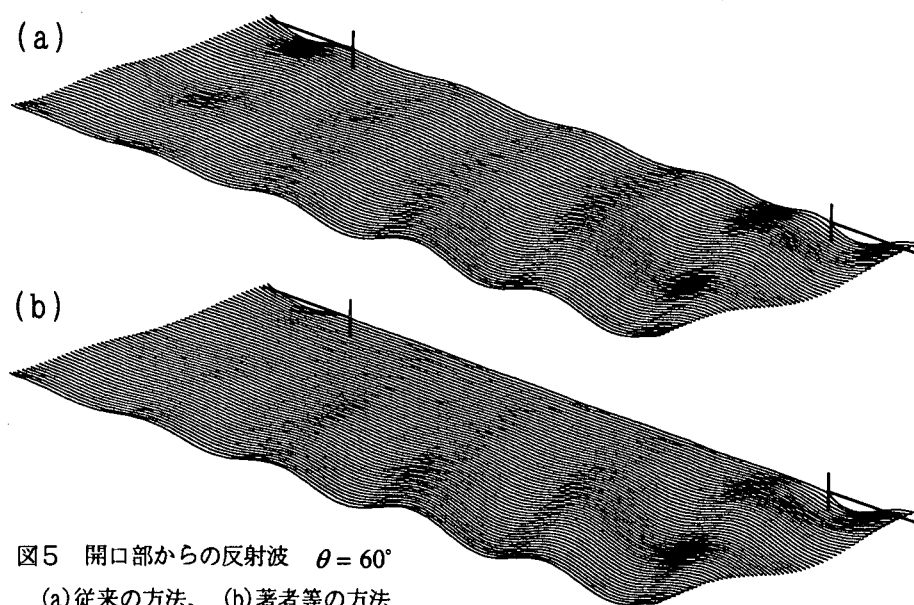


図5 開口部からの反射波 $\theta = 60^\circ$
(a)従来の方法、(b)著者等の方法

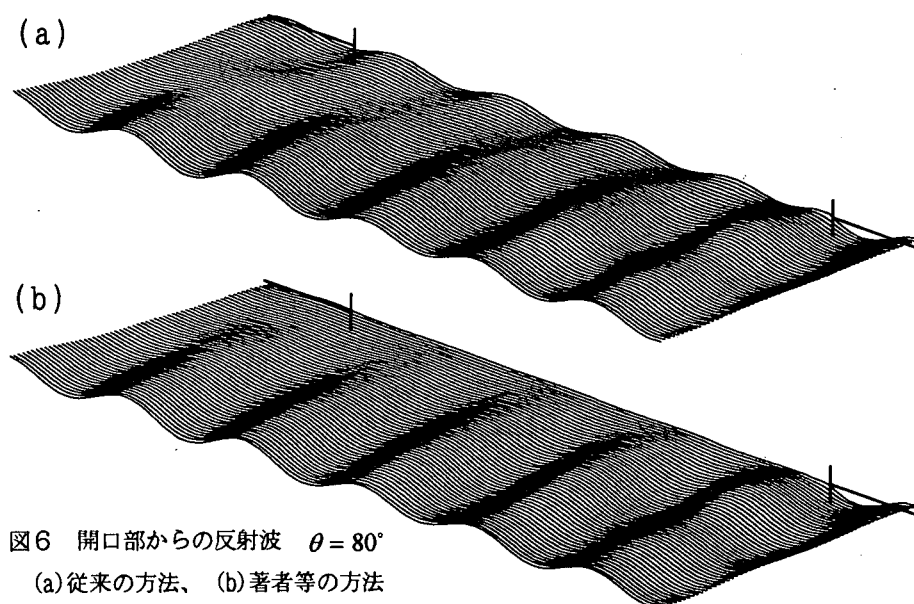


図6 開口部からの反射波 $\theta = 80^\circ$
(a)従来の方法、(b)著者等の方法

で与えたから、この結果は3節の解析結果である図2にはほぼ一致している。

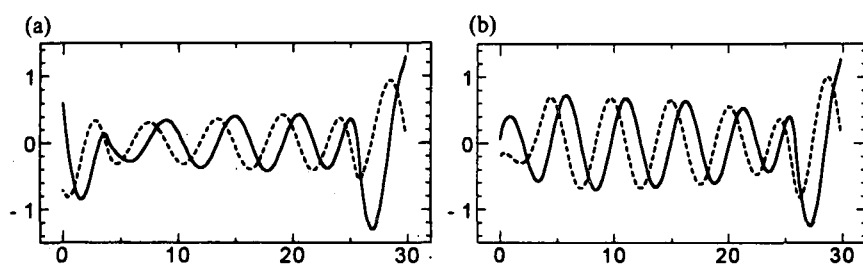


図7 従来の方法による開口部の反射波のポテンシャル

(a) $\theta = 60^\circ$

(b) $\theta = 80^\circ$

図8は入射角 80° と -30° の二つの成分はを与えた場合で、この場合も著者等の方法では見かけの反射波は現れず、妥当な結果となっている。

また、入射・吸収境界でも見かけの反射波は発生しておらず、吸収条件とし開境界条件が正常に機能していることが分かる。

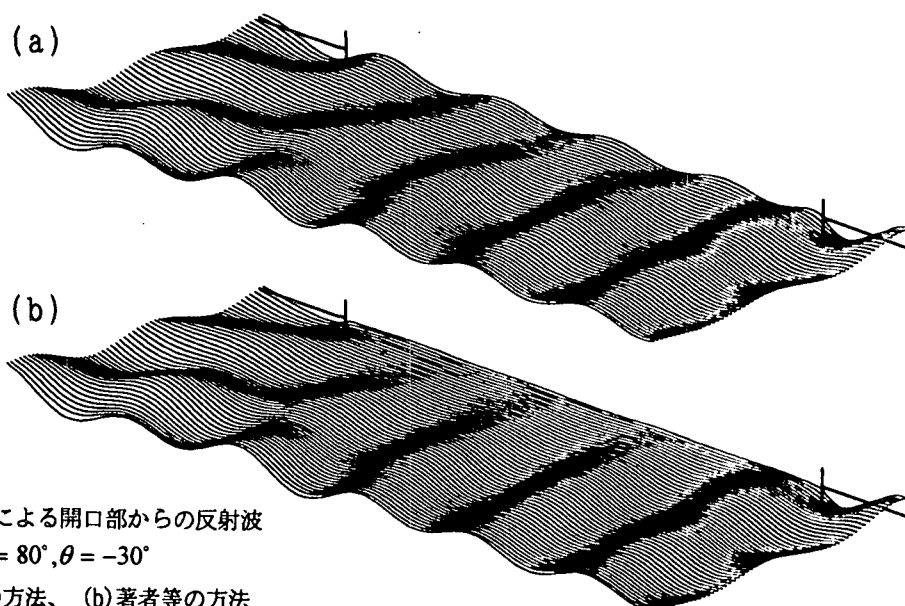


図8 2成分による開口部からの反射波

$\theta = 80^\circ, \theta = -30^\circ$

(a)従来の方法、(b)著者等の方法

あとがき

Greenの積分方程式を用いた境界要素法による波動場解析における種々の境界条件を検討した。

開境界条件は部分反射境界や入射・吸収境界の条件に拡張して用いられるため、妥当な開境界条件式を与えることは特に重要である。

従来の開境界条件は特定の入射角の波に対する条件を準用しているため、他の入射角の波に対しては見かけの反射波が発生する。この見かけの反射波の反射率を解析的に求め、さらに数値解により確かめた。

著者等が提案した開境界条件は円筒波に対しても、また部分反射境界に拡張しても妥当な解が得られることは既に報告されているが(浜中:1995)、本研究ではさらに、任意の入射角を持った平面波や複数の成分を持つ波に対しても妥当な解を得ることが数値解により示された。また同時に入射・吸収境界に対しても妥当な解が得られることが示された。

参考文献

Isaacson, M. and S. Qu (1990): Wave in harbour with partially reflecting boundaries, Coastal Engg., vol.14, pp.193-214

Chou, C.R. and W.Y. Han (1993): Wave induced oscillations in harbours with dissipating quays, Coastal Engg. Japan, vol.36, No.1, pp.1-23

Hamanaka, K. (1995): Fundamental solution and boundary condition on oscillation in harbours of arbitrary geometry, 12th Australasian Coastal and Ocean Engg. Conf., pp.163-168

浜中建一郎 (1995): グリーンの公式を用いた静穏度解析における種々の境界条件について、海岸工学論文集、第42巻(2)、pp.996-1000