

境界要素法による波動場解析における Doublet 形特異関数の境界上積分精度

Boundary integral with Doublet singular function in BEM

工藤 康一*・佐藤 幸雄**・浜中建一郎***

The Boundary Element Method (BEM) implemented by the Green's integral equation is used to solve wave field governed by the Laplace equation or the Helmholtz. When a singular function of Source type is used to induce the integral equation, the potential on the singular point is represented by the boundary integral. And when a singular function of potential is represented by the boundary integral.

Usually the former type of the integral equation is used in the normal problem of BEM. But in particular problems, wave field around thin structures or thin barriers, the latter type of the integral equation is useful. However the singularity of Doublet type singular function is very strong. Therefore for the Doublet type it is difficult to obtain necessary accuracy from the numerical boundary integral.

In the present paper, we investigate the accuracy of boundary integral with the trapezoidal rule and with the liner approximation for both the Source type and the Doublet type singular functions.

1. はじめに

境界要素法によってラプラス方程式やヘルツホルム方程式を解き、波動場を解析する際、グリーンの積分方程式が良く用いられる。その時用いられる特異関数は、所謂 Source 形の特異関数で積分方程式の境界上積分によって表されるのは、特異点の位置での速度ポテンシャルである。

それに対し、特異関数として所謂 Doublet 形のものを用いると、積分方程式の境界上積分によって表されるのは、特異点の位置での速度ポテンシャルの微係数となる。このタイプの積分方程式は境界要素法で、あまり多くは用いられてこなかったが、特定の問題に対しては、非常に有効であると考えられる。例えば、薄板・薄膜部材回りの波動場解析（先川他：1996）や panel 法（野村他：1996）。

一般に境界要素法を用いて波動場を解析するには、境界を微小セグメントで離散化し、セグメント上でのポテンシャルやその法線微分を未知数とする連立方程式に帰着させて解く。その時セグメント上のポテンシャルやその法線微分（場合によっては特異関数）の関数形を何らかの方法で近似し、未知数に対する係数としてのセグメント上の積分及び特異点を境界に近づけたときの極限としての主値積分を求めておく必要がある。その時の近似の中で最も簡単な方法は、ポテンシャルと特異関数の積をセグメントの中央点での値で代表させた台形則である。しかしながら、Doublet 形特異関数の特異性は Source 形のそれに比べ非常に強く、この方法では必要な精度は得られない（浜中他：1995）。そこで次の近似方法として考えられるのは、ポテンシャルとその法線微分は、セグメント上で線形変化するとし、特異関数は近似せず境界上の積分を求める方法である。

このことから本研究では、Source 形と Doublet 形の特異関数に対し、台形則と線形近似の二つの境界上積分につ

いて、その精度を調べることを目的とする。

2. 境界上積分の離散化と主値積分

以下、本研究では2次元空間で考える。

2. 1 Source 形特異関数の台形則

特異点が境界上にある時、積分方程式は、

$$\pi\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (1)$$

となる。ここで、特異関数 G は、以下のように表される。

$$G = \log r, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (2)$$

(1) を離散化すると、

$$\pi\phi_i = \sum_j (\phi_j \bar{E}_{ij} - E_{ij} \bar{\phi}_j), \quad \bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad (3)$$

$$\begin{cases} E_{ij} = \int_{\Delta S_j} \log r \, ds = \Delta S_j \log r_{ij} \\ \bar{E}_{ij} = \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \log r \, ds = (\nu \cdot \nabla \log r_{ij}) \Delta S_j \\ \quad = \left(\nu_x \frac{x-x_0}{r^2} + \nu_z \frac{z-z_0}{r^2} \right) \Delta S_j \\ E_{ii} = \left(\log \frac{\Delta S_i}{2} - 1 \right) \Delta S_i \\ \bar{E}_{ii} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 E_{ii} と $\bar{E}_{ii}$ は特異点 P を除いた主値積分で求めた。

2. 2 Source 形特異関数の線形近似

図1の様に i 節点でのポテンシャルを ϕ_i 、 i 番目のセグメントの両端の法線微分を $\bar{\phi}_{i-1}^{(i)}$ 、 $\bar{\phi}_i^{(i)}$ として、セグメント上で線形変化するとする。積分方程式は P 点を i 節点に位置させると (1) 式の左辺の π は α となり、

* 学生員 北海道東海大学大学院

** 正員 北見工業大学工学部土木工学科

*** 正員 北海道東海大学工学部海洋開発工学科

$$-\phi_i^{(i+1)} \Delta S_{i+1} (\log \Delta S_{i+1} - 1) \quad (8)$$

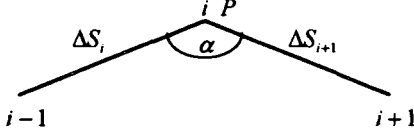


図 1

それを離散化すると、

$$\begin{aligned} \alpha \phi_i &= \sum_j \int_{\Delta S_j} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds = \sum_j (I_1^{(j)} - I_2^{(j)}) \\ &= \sum_j f^{(j)} \end{aligned} \quad (5)$$

$j \neq i$ and $j \neq i+1$ のとき、図 2 の局所座標を考え、その座標での P 点の座標を (ξ_0, η_0) とすると、

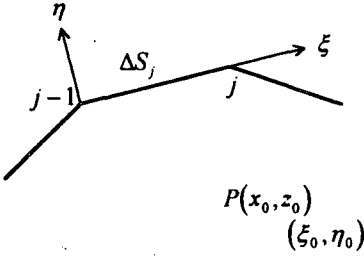


図 2

$$I_1^{(j)} = -\frac{\phi_A \eta_0}{2} (\log C_1 - \log C_2) - (\phi_A \xi_0 + \phi_B) \eta_0 I_B \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_2^{(j)} &= \frac{\bar{\phi}_A}{4} \left[C_1 \log C_2 - C_2 \log C_1 - (\Delta S_j - \xi_0)^2 + \xi_0^2 \right] \\ &+ \frac{\bar{\phi}_A \xi_0 + \bar{\phi}_B}{2} \left[(\Delta S_j - \xi_0) \log C_1 + \xi_0 \log C_2 \right. \\ &\quad \left. - 2\Delta S_j + 2\eta_0^2 I_B \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、

$$\phi_A = \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{\Delta S_j}, \quad \phi_B = \phi_{j-1}$$

$$\bar{\phi}_A = \frac{\bar{\phi}_j - \bar{\phi}_{j-1}}{\Delta S_j}, \quad \bar{\phi}_B = \bar{\phi}_{j-1}$$

$$\phi = \phi_A \xi + \phi_B, \quad \bar{\phi} = \bar{\phi}_A \xi + \bar{\phi}_B$$

$$C_1 = (\Delta S_j - \xi_0)^2 + \eta_0^2, \quad C_2 = \xi_0^2 + \eta_0^2$$

$$I_B = \frac{1}{|\eta_0|} \left(\tan^{-1} \frac{\Delta S_j - \xi_0}{|\eta_0|} - \tan^{-1} \frac{-\xi_0}{|\eta_0|} \right)$$

$j = i$ と $j = i+1$ のとき、

$j = i$ と $j = i+1$ 上の積分を合わせて、

$$\begin{aligned} I^{(i)} + I^{(i+1)} &= \frac{\bar{\phi}_i^{(i)} - \bar{\phi}_{i-1}^{(i)}}{2} \Delta S_i \left(\log \Delta S_i - \frac{1}{2} \right) \\ &- \bar{\phi}_i^{(i)} \Delta S_{i+1} (\log \Delta S_i - 1) \\ &- \frac{\bar{\phi}_{i+1}^{(i+1)} - \bar{\phi}_i^{(i+1)}}{2} \Delta S_i \left(\log \Delta S_{i+1} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

2. 3 Doublet 形特異関数の台形則

Source 形特異関数の特異点が領域内にある時、

$$2\pi \phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (9)$$

(9) を特異点の座標で微分すると、

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial x_0} = \int_S \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial \nu \partial x_0} - \frac{\partial G}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (10)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial z_0} = \int_S \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial \nu \partial z_0} - \frac{\partial G}{\partial z_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (11)$$

G として (2) を与えると、

$$\frac{\partial G}{\partial x_0} = -\frac{x - x_0}{r^2} \equiv D_1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_0} = -\frac{z - z_0}{r^2} \equiv D_2 \quad (13)$$

D_1, D_2 は Doublet 形特異関数で (10), (11) は以下のように Doublet 形特異関数に対する積分方程式となる。

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial x_0} = \int_S \left(\phi \frac{\partial D_1}{\partial \nu} - D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (14)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial z_0} = \int_S \left(\phi \frac{\partial D_2}{\partial \nu} - D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (15)$$

(14) を離散化する。(3) と同じ記号 $E, \bar{E}$ を用いて、

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial x_0} = \sum_j (\phi_j \bar{E}_j - E_j \bar{\phi}_j) \quad (16)$$

$j \neq i$ のとき、

$$\begin{cases} E_j = \int_{\Delta S_j} D_1 ds = D_{1j} \Delta S_j = -\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^2} \Delta S_j \\ \bar{E}_j = \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial \nu} D_1 ds = (\nu \cdot \nabla D_{1j}) \Delta S_j \end{cases} \quad (17)$$

$j = i$ のとき、

特異点を内部から i -segment 中央に近づけた極限を考える。図 3 の様に segment の x 軸からの角度を θ_i とすると、

$$\begin{cases} \int_{\Delta S_i} D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds = \pi \bar{\phi}_i \sin \theta_i \\ \int_{\Delta S_i} \phi \frac{\partial D_1}{\partial \nu} ds = -\frac{4\phi_i}{\Delta S_i} \sin \theta_i \end{cases} \quad (18)$$

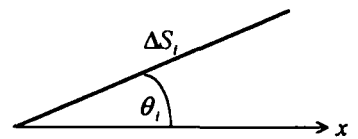


図 3

(15) を離散化する。

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial z_0} = \sum_j (\phi_j \bar{E}_j - E_j \bar{\phi}_j) \quad (19)$$

$j \neq i$ のとき、

$$\begin{cases} E_{ij} = -\frac{z_j - z_i}{r_{ij}^2} \Delta S_j \\ \bar{E}_{ij} = (\nu \cdot \nabla D_{2ij}) \Delta S_j \end{cases} \quad (20)$$

$j = i$ のとき、

$$\begin{cases} \int_{\Delta S_i} D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds = -\pi \bar{\phi}_i \cos \theta_i \\ \int_{\Delta S_i} \phi \frac{\partial D_2}{\partial \nu} ds = \frac{4\phi_i}{\Delta S_i} \cos \theta_i \end{cases} \quad (21)$$

ここで、

$$\begin{cases} \frac{\partial D_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x - x_0}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(x - x_0)^2}{r^4} \\ \frac{\partial D_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{x - x_0}{r^2} \right) = +\frac{2(x - x_0)(z - z_0)}{r^4} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial D_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{z - z_0}{r^2} \right) = +\frac{2(x - x_0)(z - z_0)}{r^4} \\ \frac{\partial D_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z - z_0}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(z - z_0)^2}{r^4} \end{cases} \quad (23)$$

2. 4 Doublet 形特異関数の線形近似

特異点 P は内部から i - 節点に近づいた極限で考える。

(7) 式で用いたのと同様、 ϕ と $\bar{\phi}$ は segment 上で線形変化するとする。

j - segment 上に図 4 のような局所座標をとり、その座標系での P 点の座標を (ξ_0, η_0) とする。 j - segment の x 軸とのなす角を θ_j とする。

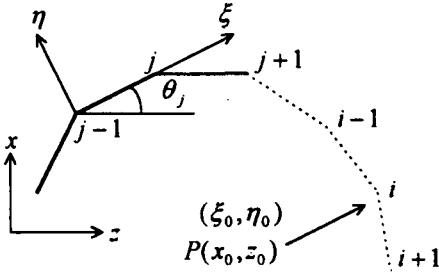


図 4

(10), (11) を離散化すると、

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial x_0} &= \sum_j \left[\cos \theta_j \int_{\Delta S_j} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} ds - \sin \theta_j \int_{\Delta S_j} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} ds \right] \\ &\quad - \sum_j \left[\cos \theta_j \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds - \sin \theta_j \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds \right] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial z_0} &= \sum_j \left[\sin \theta_j \int_{\Delta S_j} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} ds + \cos \theta_j \int_{\Delta S_j} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} ds \right] \end{aligned}$$

$$- \sum_j \left[\sin \theta_j \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds + \cos \theta_j \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds \right] \quad (25)$$

$j \neq i$ and $j \neq i+1$ のとき

(24), (25) 式に現れる必要な積分は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{\Delta S_j} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} ds \\ &= \frac{(\phi_A \Delta S_j - \phi_B) \eta_0}{C_1} - \frac{\phi_B \eta_0}{C_2} - \phi_A \eta_0 I_B \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= \int_{\Delta S_j} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} ds = -\frac{\phi_A}{2} (\log C_1 - \log C_2) \\ &\quad + \frac{(\phi_A \Delta S_j + \phi_B)(\Delta S_j - \xi_0)}{C_1} + \frac{\phi_B \xi_0}{C_2} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} I_{23} &= \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds = -\bar{\phi}_A \Delta S_j \\ &\quad - \frac{1}{2} (\bar{\phi}_A \xi_0 + \bar{\phi}_B) (\log C_1 - \log C_2) + \bar{\phi}_A \eta_0^2 I_B \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} I_{24} &= \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds = \frac{\bar{\phi}_A \eta_0}{2} (\log C_1 - \log C_2) \\ &\quad + (\bar{\phi}_A \xi_0 + \bar{\phi}_B) \eta_0 I_B \end{aligned} \quad (29)$$

$j = i$ と $j = i+1$ のとき

特異点 P を i - 節点に近づけると上の積分 (26) から (28) 式は発散する。従って、 i - segment と $i+1$ - segment 上の積分を合わせて考慮し、 $P \rightarrow i$ の極限を考えると、(24) 式の右辺は、

$$\begin{aligned} I_{x4} &= \cos \theta_i (\bar{\phi}_i^{(i)} - \bar{\phi}_{i-1}^{(i)} - \bar{\phi}_i^{(i)} \log \Delta S_i) \\ &\quad - \sin \theta_i \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta S_i} \log \Delta S_i + \frac{\phi_{i-1}}{\Delta S_i} \right) \\ &\quad + \cos \theta_{i+1} (\bar{\phi}_{i+1}^{(i+1)} - \bar{\phi}_i^{(i+1)} + \bar{\phi}_i^{(i+1)} \log \Delta S_{i+1}) \\ &\quad - \sin \theta_{i+1} \left(-\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta S_{i+1}} \log \Delta S_{i+1} + \frac{\phi_{i+1}}{\Delta S_{i+1}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \beta_i \end{aligned} \quad (30)$$

(25) 式の右辺は、

$$\begin{aligned} I_{z4} &= \sin \theta_i (\bar{\phi}_i^{(i)} - \bar{\phi}_{i-1}^{(i)} - \bar{\phi}_i^{(i)} \log \Delta S_i) \\ &\quad + \cos \theta_i \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta S_i} \log \Delta S_i + \frac{\phi_{i-1}}{\Delta S_i} \right) \\ &\quad + \sin \theta_{i+1} (\bar{\phi}_{i+1}^{(i+1)} - \bar{\phi}_i^{(i+1)} + \bar{\phi}_i^{(i+1)} \log \Delta S_{i+1}) \\ &\quad + \cos \theta_{i+1} \left(-\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta S_{i+1}} \log \Delta S_{i+1} + \frac{\phi_{i+1}}{\Delta S_{i+1}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_i \beta_i \end{aligned} \quad (31)$$

以上まとめると、(24) 及び (25) の右辺に $I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}$ を代入し、(24) には I_{x4} を、(25) には I_{z4} を加えれば良い。

3. 数値計算による積分精度

本節では、前節までで述べた各々の場合について、具体的なポテンシャルの場合と、領域を与え、離散化した境界上積分を実行し、境界上でのポテンシャルやその微係数がどの程度再現するかを検討する。

全場合に共通して与えたポテンシャルは、
$$\phi = a \cos x \cosh z \tag{32}$$

で、図5のような矩形の領域を考える。ここで、
 $l_x = 3, \quad l_z = 2$
とする。

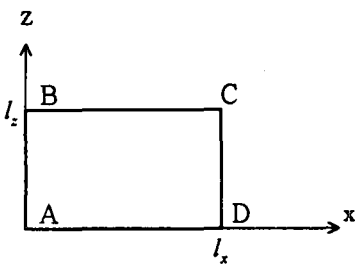


図5. 計算領域

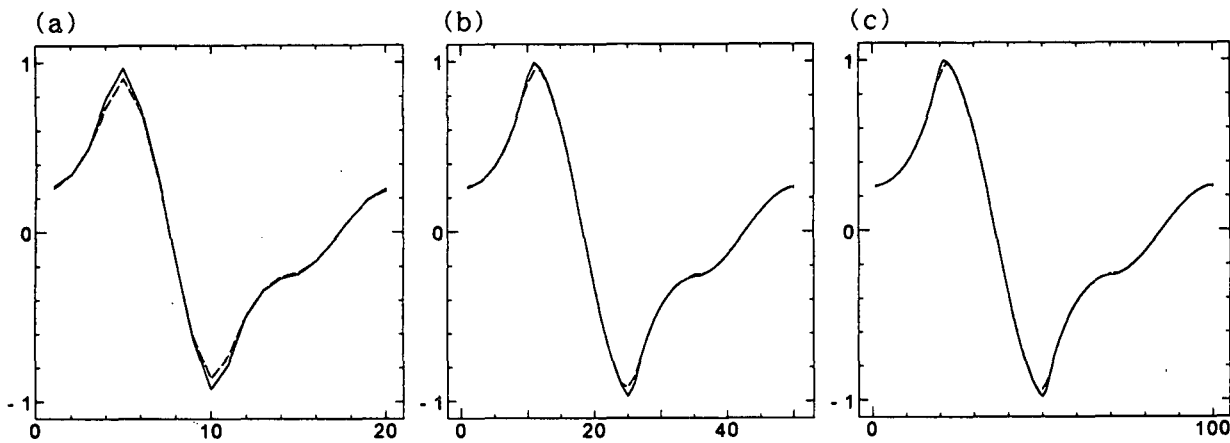


図6. Source 形特異関数—台形則

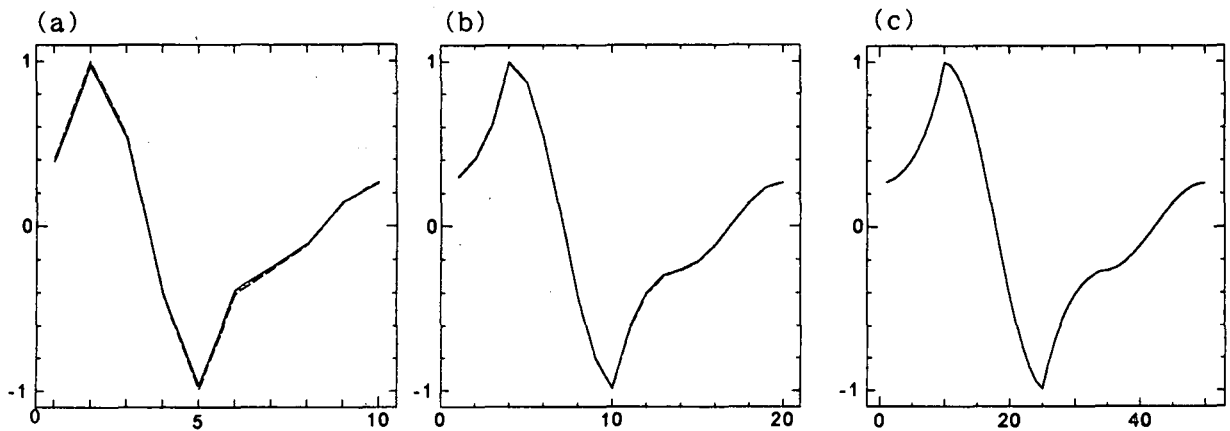


図7. Source 形特異関数—線形近似

図6は Source 形特異関数に対する台形則で (3) 式により求めた結果である。境界上積分から求めた境界上のポテンシャルを、境界ABCDの順に並べて示している。横軸は segment 番号で右端の数が segment の総数 (分割数) を

表している。実線が与えたポテンシャルで破線が数値解である。この図によれば、分割数の増加に従って精度は上がるが、4隅 (コーナー) での精度は辺上に比べいつも悪い。このことは台形則を用いる場合に注意する必要があるだ

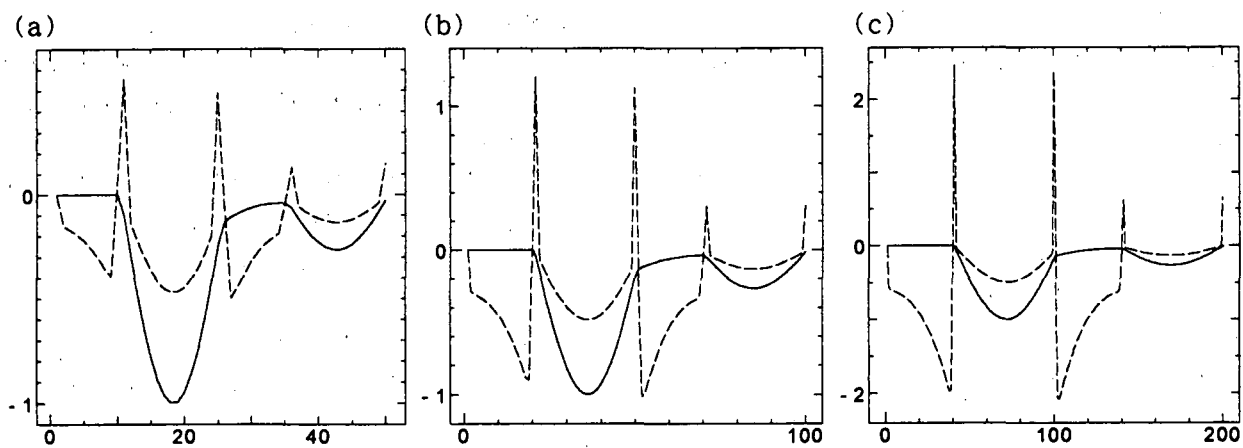


図8. Doublet 形特異関数—台形則 (x 微係数)

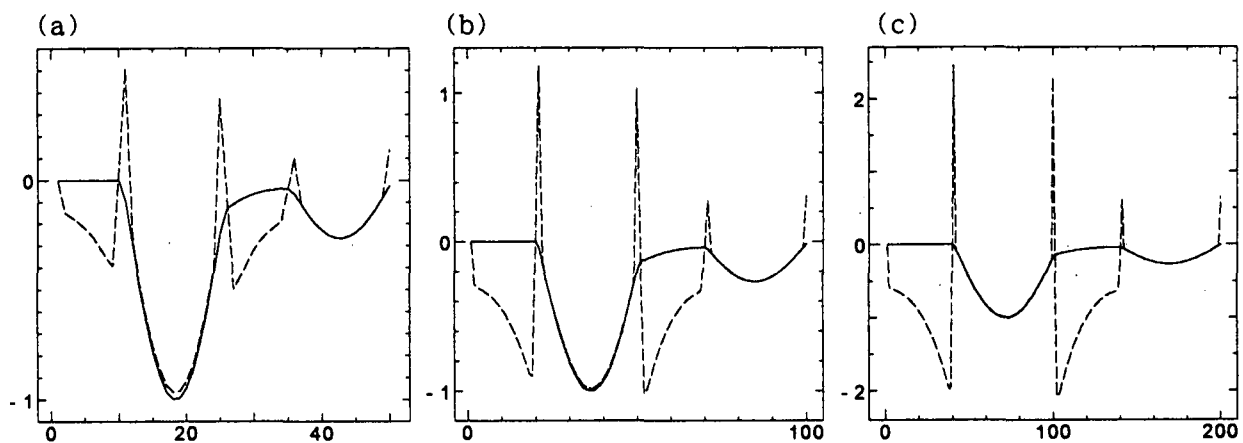


図9. Doublet 形特異関数—台形則の2次近似 (x 微係数)

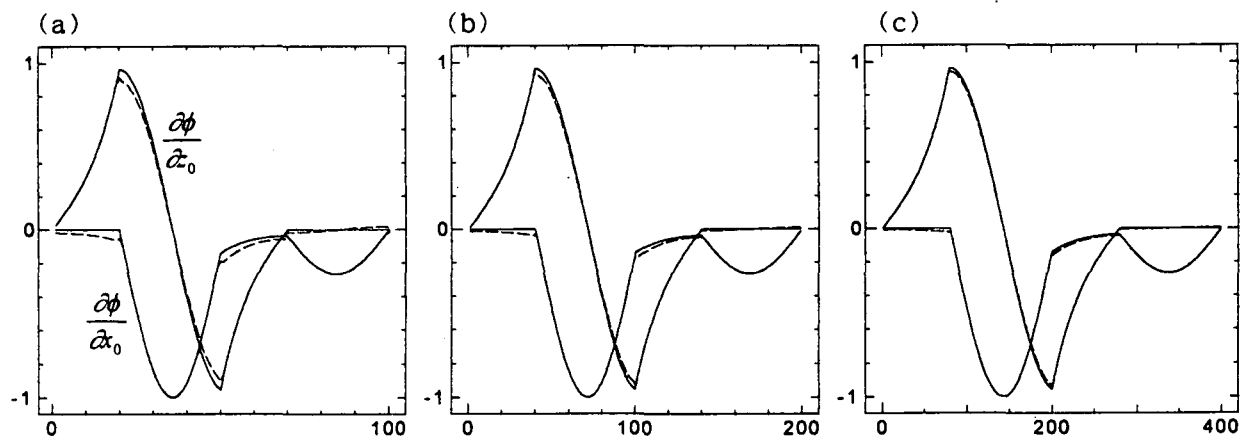


図10. Doublet 形特異関数—線形近似

ろう。

図7は(5)式で求めた Source 形の線形近似である。この場合の精度は非常に良く、又コーナーで精度が落ちることもない。

図8は(16)式から求めた Doublet 形の台形則である。図は x 方向の微係数を示している。この場合の数値解の精度は非常に悪く、分割数を増やしても改善されない。

そこで、特異点の位置する segment 上で、ポテンシャルを特異点の回りで Taylor 展開し、第2項まで考慮して主値積分を求めて数値積分をしたのが図9である。これによれば、 x 軸に平行な境界上では良く再現される様になるが、他の境界では改善されていない。図には示さないが、第3項まで考慮しても傾向は変わらない。又、 z 方向の微係数に対する積分方程式(19)式の場合も同様である。

図10は(24)、(25)式から求めた Doublet 形の線形近似である。この場合の数値解の再現性は良く、又、分割数の増加に従って精度も良くなっている。

4. あとがき

境界要素法で用いられる積分方程式の境界上数値積分の精度について、Source 形特異関数と Doublet 形特異関数の各々に対し、台形則を適用した場合と線形近似を用いた場合を検討した。

Source 形の台形則では、分割数の増加に従って精度は上がるものの、コーナーでの精度は辺上に比べに悪い。又、Source 形の線形近似での精度はコーナーでも辺上でも非常に良い。

Doublet 形の台形則は精度が悪く、応用には適さない。

Doublet 形の線形近似では、再現性は良く、分割数の増加に従って精度も上がっている。しかしながら、必要な精度を得るには分割数をかなり多くとる必要がある。従って、具体的な波動場解析に応用するには、さらに精度の良い曲線近似(Spline 関数等)を考える必要があるだろう。しかし、たとえ曲線近似を用いても、部分的曲線であるから本研究で示した方法が用いられるだろう。又、物理的に折れ曲がった境界(例えば、水面と斜面との交点)でも本研究で示された方法が用いられる。

参 考 文 献

- 1) 先川・佐藤・浜中(1996) : グリーン関数を用いたフレキシブシート回りの波動場解析—断面2次元及び3次元、海洋開発論文集、印刷中
- 2) 野村・脇坂・渡部・浜中(1996) : panel 法による波動場解析、土木学会道支部論文報告集、第52号(B)、pp.248-251
- 3) 浜中・橋本(1995) : 薄板・薄膜部材を持つ構造物による波の変形、土木学会道支部論文報告集、第51号(B)、pp.292 - 297