

流れおよび水深の急変動を考慮した双曲型波動方程式

Time-Dependent Wave Equation considering Currents and Rapidly-Varying Bottom Topography

間瀬 肇*・榊原 弘**・三島豊秋**

Hajime Mase, Hiroshi Sakakibara and Toyoaki Mishima

A time-dependent wave equation is derived so as to take into account the effects of currents and rapidly-varying bottom topography, based on the variational principle governing irrotational fluid motion. The derived wave equation is reduced to the equation of Kirby (1984) if there is no rapidly-varying bottom undulations. Some numerical computations are done, by using the equation, under the condition of constant slope with a certain current field.

Keywords: time-dependent wave equation, mild slope equation, wave-current interaction, rapidly-varying bottom

1. はじめに

緩勾配方程式と同精度の精度を保ち、数値計算的に扱いやすくした非定常緩勾配方程式は、屈折、浅水変形、回折、反射、砕波を同時に取り扱うことができ、平面波浪場の計算手法の中で適用範囲の広いものである。この非定常緩勾配方程式は、伊藤・谷本 (1971) による数値波動解析法と方程式系は同じであり、西村ら (1983) および渡辺・丸山 (1984) によって広められた。本研究では、流れおよび緩勾配の仮定を満たさない水深の急変動の影響も考慮した、拡張型の非定常緩勾配方程式 (双曲型波動方程式) を誘導する。

2. 拡張型非定常緩勾配方程式 (双曲型波動方程式)

実水深 $h'(x)$ を、平均水深 $h(x)$ とそれからの急変動 $\delta(x)$ に分け、 $h'(x) = h(x) - \delta(x)$ のようにおく。波の Lagrangian は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} L &= \int_{-h'}^{\eta} p \, dz = -\rho \int_{-h'}^{\eta} \left\{ gz + \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} dz \\ &= -\rho \int_{-h}^{\eta} \left\{ gz + \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} dz + \rho \int_{-h}^{-h+\delta} \left\{ gz + \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} dz \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 p は波圧、 η は水位、 z は鉛直座標、 ρ は流体の密度、 g は重力加速度、 ϕ は速度ポテンシャル、 ∇ は3次元勾配ベクトルである。速度ポテンシャルを

$$\phi(x, z, t) = \int U \cdot dx + f(z) \bar{\phi}(x, t) \quad (2)$$

$$f(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3)$$

と表す。ここで、 U は流れの速度ベクトルである。式(2)を式(1)に代入して右辺第1項の積分を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} L_1 &= -\rho \left[\frac{1}{2} g \eta^2 + \bar{\phi}_t \eta f|_{z=0} + U \cdot \nabla_h \bar{\phi} \eta f|_{z=0} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 I \langle (\nabla_h f)^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\nabla_h \bar{\phi})^2 I \langle f^2 \rangle + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 I \langle f_z^2 \rangle + \bar{\phi} \nabla_h \bar{\phi} \cdot I \langle \nabla_h f f \rangle \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $I \langle f \rangle$ は f についての鉛直積分を表す。また、式(1)の右辺第2項の積分は次のようになる。

$$L_2 = \rho \left[\frac{1}{2} \bar{\phi}^2 \delta (\nabla_h f)^2 \Big|_{z=-h} + \frac{1}{2} (\nabla_h \bar{\phi})^2 \delta f^2 \Big|_{z=-h} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 \delta f_z^2 \Big|_{z=-h} + \bar{\phi} \nabla_h \bar{\phi} \cdot (\delta \nabla_h f f) \Big|_{z=-h} \right] \quad (5)$$

* 正会員 京都大学防災研究所 (〒611 宇治市五ヶ庄)

** 正会員 (株) ニュージェック

従って, Lagrangian は

$$L = L_1 + L_2 \quad (6)$$

で与えられる. L の η に関する変分は

$$\partial L / \partial \eta = 0 \quad (7)$$

であるから,

$$\ddot{\phi}_t + U \cdot \nabla_h \ddot{\phi} + g\eta = 0 \quad (8)$$

が得られる. また, L の $\ddot{\phi}$ に関する変分は

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{\phi}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_t} \right) - \nabla_h \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_h \ddot{\phi})} \right) = 0 \quad (9)$$

であるので,

$$\eta_t + U \cdot \nabla_h \eta + (\nabla_h \cdot U) \eta + \nabla_h \cdot \{ I \langle f^2 \rangle \nabla_h \ddot{\phi} \} - I \langle f_z^2 \rangle \ddot{\phi} - \frac{1}{\cosh^2 kh} \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \ddot{\phi}) = 0 \quad (10)$$

が得られる. 分散関係式は次のとおりである.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (11)$$

$$\sigma = \omega - k \cdot U \quad (12)$$

ここで, k は波数ベクトルの絶対値, ω は絶対角周波数, σ は固有角周波数である. ここで

$$I \langle f^2 \rangle = CC_g / g \quad (13)$$

$$I \langle f_z^2 \rangle = (\sigma^2 - k^2 CC_g) / g \quad (14)$$

の関係式を用いて (C は波速, C_g は群速度), 式(10) および式(8) を整理すると以下のようになる.

$$\frac{D\eta}{Dt} + (\nabla_h \cdot U) \eta + \nabla_h \cdot \{ (CC_g / g) \nabla_h \ddot{\phi} \} - \{ (\sigma^2 - k^2 CC_g) / g \} \ddot{\phi} - \frac{1}{\cosh^2 kh} \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \ddot{\phi}) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{D\ddot{\phi}}{Dt} + g\eta = 0 \quad (16)$$

ここで,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla_h \quad (17)$$

である. 式(15) および式(16) から η を消去すると

$$\frac{D^2 \ddot{\phi}}{Dt^2} + (\nabla_h \cdot U) \frac{D\ddot{\phi}}{Dt} - \nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \ddot{\phi}) + (\sigma^2 - k^2 CC_g) \ddot{\phi} + \frac{g}{\cosh^2 kh} \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \ddot{\phi}) = 0 \quad (18)$$

となる. 式(18)において左辺第5項がなければ Kirby (1984) の式になる.

平面波の関係式

$$\eta = a e^{i(kx - \omega t)} \quad (19)$$

$$\phi = -i \frac{ga}{\sigma} e^{i(kx - \omega t)} = -i \frac{g}{\sigma} \eta \quad (20)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = -i\sigma\eta \quad (21)$$

を用いて、式(15)の第4項の $\tilde{\phi}$ を η で書き直して整理すると、次式が得られる。

$$\frac{D\eta}{Dt} + (C/C_g) \left[(\nabla_h \cdot U)\eta + \nabla_h \cdot \left(\frac{CC_g}{g} \nabla_h \tilde{\phi} \right) - \frac{1}{\cosh^2 kh} \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \tilde{\phi}) \right] = 0 \quad (22)$$

次に、式(16)の ∇_h をとると

$$\frac{D}{Dt} (\nabla_h \tilde{\phi}) + (\nabla_h \tilde{\phi} \cdot \nabla_h) U + \nabla_h \tilde{\phi} \times \text{rot} U + g \nabla_h \eta = 0 \quad (23)$$

となる。 $\nabla_h \tilde{\phi} = u$ として、静水面における波の流速 u を用いると、式(22), (23) は次のようにかける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\eta}{Dt} + (C/C_g) \left[(\nabla_h \cdot U)\eta + \nabla_h \cdot \left(\frac{CC_g}{g} u \right) - \frac{1}{\cosh^2 kh} \nabla_h \cdot (\delta u) \right] &= 0 \\ \frac{Du}{Dt} + (u \cdot \nabla_h) U + u \times \text{rot} U + g \nabla_h \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式(24)が流れおよび水深の急変動を考慮した拡張型非定常緩勾配方程式（双曲型波動方程式）である。

3. 流れおよび水深の急変動がない場合の非定常緩勾配方程式

流れおよび水深の急変動がない場合、式(24)は以下のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{gn} \nabla_h \cdot (nC^2 u) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \nabla_h \eta = 0 \quad (26)$$

ここで、 $n = C_g / C$ である。式(25)および式(26)を水底から静水面まで積分すると、以下の式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{ghn} \nabla_h \cdot (nC^2 Q) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \nabla_h \eta = 0 \quad (28)$$

ただし、

$$Q = \int_{-h}^0 u \, dz \quad (29)$$

である。一方、西村ら(1983)の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n} \nabla_h \cdot (nQ) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C^2 \nabla_h \eta = 0 \quad (31)$$

で表され、渡辺・丸山(1984)の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \cdot Q = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{C^2}{n} \nabla_h (n\eta) = 0 \quad (33)$$

で表される。これらの式の形は少しづつ異なるが、基本的には同一である。

4. 数値計算例

計算例として x 方向に 1200m, y 方向に 800m の長方形領域の, y 方向には水深が変化しない

$$h(x, y) = 24 - x/50 \quad (34)$$

で表される, 勾配が 1/50 の一様勾配地形に

$$\left. \begin{aligned} U &= -0.0721 (1200 - x) F\left(\frac{1200 - x}{250}\right) F\left(\frac{y - 400}{25}\right) \\ V &= -1.8 \left\{ 2 - \left(\frac{1200 - x}{250}\right)^2 \right\} F\left(\frac{1200 - x}{250}\right) \int_0^{(y-400)/25} F(\alpha) d\alpha \\ F(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\alpha^2/2) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

で表される流れがある場合を取りあげた。

図-1 に式(35) で示した流れのベクトル図を示す。こうした流れの場においては, $y = 400\text{m}$ の線上で波向線が交差する。

実際の計算に当たっては, まず式(24) の第1式を若干変形し, 碎波によるエネルギー減衰項を以下のように導

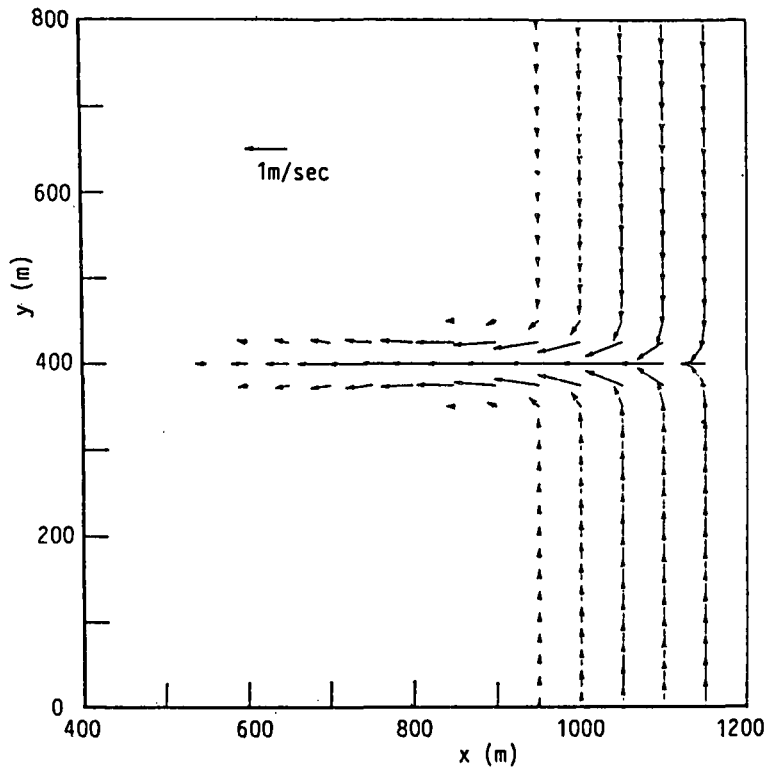


図-1 流れのベクトル図

入した。

$$\frac{D\eta}{Dt} + (C/C_g) \left[(\nabla_h \cdot U)\eta + \nabla_h \cdot \left(1 - \frac{g\delta}{CC_g} \text{sech}^2 kh \right) \frac{CC_g}{g} u \right] + W\eta = 0 \quad (37)$$

ここで, W はエネルギー減衰率をエネルギーで除したもので, 次元の場合

$$\partial(EC_g)/\partial x = -WE \quad (38)$$

で表される W である。碎波によるエネルギー減衰率は Dally and Dean (1985) により提案されたものを用いた。

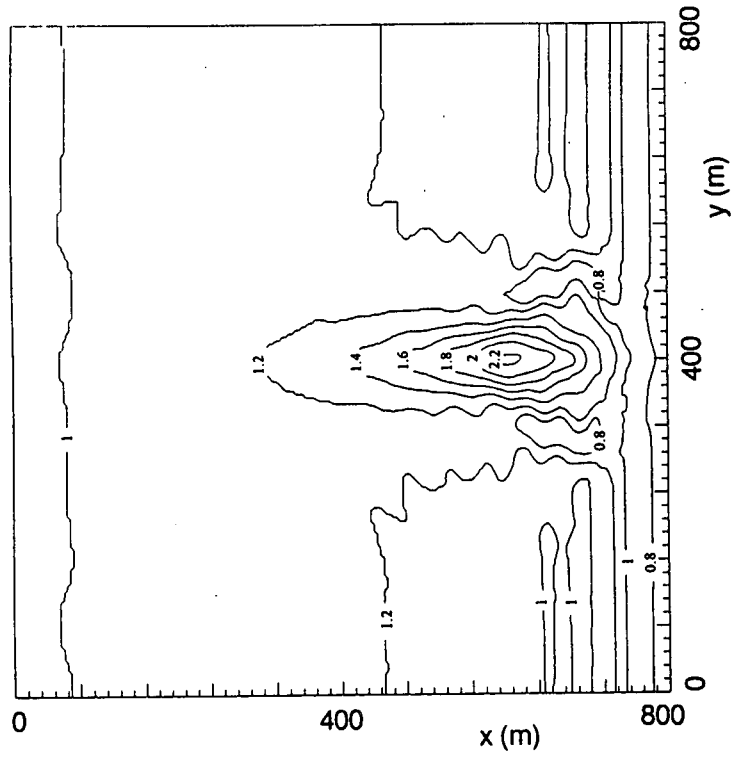
次に, 以下のような関係式

$$\eta = \hat{\eta} \exp(-i\alpha x), \quad u = \hat{u} \exp(-i\alpha x) \quad (39)$$

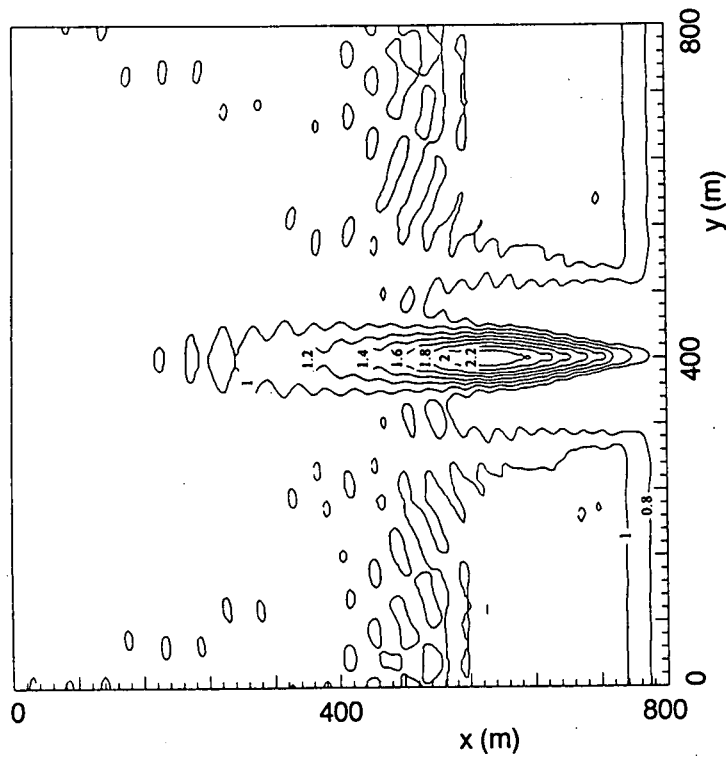
を用いて, 数値計算に用いる式系は

$$\frac{D\hat{\eta}}{Dt} + (C/C_g) \left[(\nabla_h \cdot U) \hat{\eta} + \nabla_h \cdot \left(1 - \frac{g\delta}{CC_g} \text{sech}^2 kh \right) \frac{CC_g}{g} \hat{u} \right] + (W - i\omega) \hat{\eta} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \nabla_h (U \cdot \hat{u}) + g \nabla_h \hat{\eta} - i\omega \hat{u} = 0 \quad (41)$$



(b) 入射波周期 12 秒



(b) 入射波周期 8 秒

図-2 波浪変形の計算結果

とした。こうすることで空間メッシュを広くすることができる。

図-2 (a) および (b) は入射波の波高が 1 m で、周期がそれぞれ 12 秒と 8 秒の場合の計算結果であり、波高の等高線を示したものである。水深の減少と流れによる屈折により、 $y = 400\text{m}$ の測線上で波高の増大が見られる。ある程度波高が大きくなると、碎波が生じ波高が減少する。

5. 結び

ここで導いた双曲型波動方程式は線形の規則波に対するものであるが、少しの修正で非線形性および広い周波数帯をもつ波に拡張することが可能である。さらに別の条件を取り上げて数値計算例を検討するとともに、理論の拡張を図りたい。

参考文献

- 伊藤喜行・谷本勝利 (1971) : 数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—, 第18回海岸工学講演会論文集, pp.67-70.
- 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸 (1983) : 直接積分による波の場の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp.123-127.
- 渡辺 晃・丸山康樹 (1984) : 屈折・回折・碎波減衰を含む波浪場の数値解析法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp.103-107.
- Dally, W.R. and Dean, R.G. (1985): Wave height variation across beaches of arbitrary profile, Jour. Geophys. Res., Vol.90, No.C6, pp.11917-11927.
- Kirby, J.T. (1984) : A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, JGR, Vol.89, No.C1, pp.745-747.