

弾性浮体下の波の理論 ―波数の計算プログラムと算定図―

Wave Equation under Elastic Floating Body - Fortran Program and Figures for Wavenumber -

間瀬 肇*・渡邊英一*・宇都宮智昭*・沖 慎一郎**

Hajime Mase, Eichi Watanabe, Tomoaki Utsunomiya and Sin-ichiro Oki

Wave equation under an elastic floating body supported by springs over an arbitrary bottom topography are derived. By using this equation, under the condition of constant water depth, a Fortran program to obtain the dispersion relation is given, and some figures are shown for the ratio of the wavenumber of waves under an elastic floating body to that of free gravity waves.

Keywords: elastic floating body, interaction between structure and wave, mild slope wave equation

1. はじめに

波と弾性浮体との相互干渉の研究は、浮体空港に代表される超大型浮体の波浪応答や結氷海域での波浪の変形、氷板の変形、破壊といった研究の基礎となるものである。本研究は、任意海底地形における弾性浮体下の波浪の変形理論をもとに、波の波数を算定するための計算プログラムを開発し、算定図を提案するものである。ただし、ここで取り扱う理論は、弾性浮体が波の波長に比して非常に大きいか、あるいは比較的柔らかくてその運動は波に追随しやすく、弾性浮体の端部の境界条件の影響が支配的でない場合のものである。

2. 任意海底地形における弾性浮体下の波動方程式

任意海底地形における弾性浮体下の波動理論を導くに当たって、以下の仮定をおく。

- 1) 浮体を弾性体として、鉛直運動を考える。
- 2) 断面には曲げとせん断力が生じ、面内力は考えない。
- 3) ケーブル・アンカーは、分布弾性支持としてモデル化する。
- 4) 線形の運動および重力波を考える。
- 5) 対象とする問題の模式図を、図-1に示す。

理論の誘導は Kirby(1992)に従う。波の Lagrangian は、次式で与えられる。

$$L_w = \int_{-h}^{\eta} p \, dz = -\rho \int_{-h}^{\eta} \left\{ gz + \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} dz \quad (1)$$

ここで、 p は波圧、 h は水深、 η は水位、 z は鉛直座標、 ρ は流体の密度、 g は重力加速度、 ϕ は速度ポテンシャル、 ∇ は3次元勾配ベクトルである。速度ポテンシャルを

$$\phi = f(z) \bar{\phi}(x, y, t); \quad f(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (2)$$

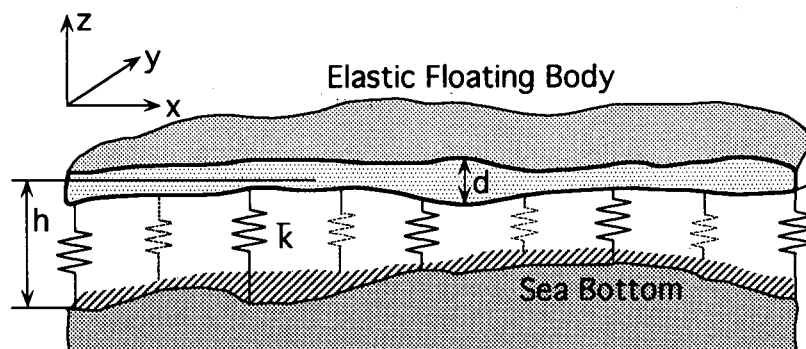


図-1 対象とする問題の模式図および座標系

* 正会員 京都大学工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** 学生会員 京都大学大学院

と表し、式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned}
 L_w = & \frac{1}{2} g \eta^2 - \frac{1}{2} g h^2 + \bar{\phi}_t \left(I\{f\} + \eta f \right)_{z=0} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 \left[I\{(\nabla_h f)^2\} + \eta (\nabla_h f)^2 \right]_{z=0} \\
 & + \frac{1}{2} (\nabla_h \bar{\phi})^2 \left[I\{f^2\} + \eta f^2 \right]_{z=0} \\
 & + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 \left[I\{f_z^2\} + \eta f_z^2 \right]_{z=0} + \bar{\phi} \nabla_h \bar{\phi} \cdot \left[I\{f \nabla_h f\} + \eta f \nabla_h f \right]_{z=0}
 \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここで、 ∇_h は 2 次元勾配ベクトル、 $I\{\text{function}\}$ は function を $z = -h$ から 0 まで積分することを意味する。式 (3) より、未知数の 2 次の量だけ残すと以下の式となる。

$$\begin{aligned}
 L_w = & \frac{1}{2} g \eta^2 + \bar{\phi}_t \eta f|_{z=0} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 I\{(\nabla_h f)^2\} \\
 & + \frac{1}{2} (\nabla_h \bar{\phi})^2 I\{f^2\} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 I\{f_z^2\} + \bar{\phi} \nabla_h \bar{\phi} \cdot I\{f \nabla_h f\}
 \end{aligned} \quad (4)$$

弾性浮体のひずみエネルギーは、次式で表される。

$$U = \frac{D}{2} \left[(\nabla_h^2 \eta)^2 - 2(1-\nu)(\eta_{xx}\eta_{yy} - \eta_{xy}^2) \right] \quad (5)$$

ここで、 D は

$$D = \frac{E d^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

と表される曲げ剛性であり、 E はヤング率、 d は弾性浮体の厚さ、 ν はポアソン比である。一方、弾性浮体の運動エネルギーは次の式で与えられる。

$$K = \frac{1}{2} \rho' d \eta_t^2 \quad (7)$$

ここで、 ρ' は単位面積当たりの弾性浮体の平均密度である。係留ばねのポテンシャルエネルギーは、次のようである。

$$V = \frac{1}{2} \bar{k} \eta^2 \quad (8)$$

以上より、系全体の Lagrangian は

$$L = L_w + K - U - V \quad (9)$$

で表される。この Lagrangian は

$$L = L(\eta, \eta_t, \eta_{xx}, \eta_{yy}, \eta_{xy}, \nabla_h \eta, \nabla_h^2 \eta, \bar{\phi}, \bar{\phi}_t, \nabla_h \bar{\phi}) \quad (10)$$

の関数である。これを η で変分すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{yy}} \right) \\
 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{xy}} \right) - \nabla_h \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_h \eta)} \right) + \nabla_h^2 \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_h^2 \eta)} \right) = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

となる。これを実際に計算すると、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \left(g + \frac{\bar{k}}{\rho} \right) \eta + \frac{\rho'}{\rho} d \eta_{tt} + \nabla_h^2 \left(\frac{D}{\rho} \nabla_h^2 \eta \right) + \frac{1}{\rho} (2\gamma_{xy} \eta_{xy} - \gamma_{xx} \eta_{yy} - \gamma_{yy} \eta_{xx}) = 0 \quad (12)$$

ここで、

$$\gamma = D(1-\nu) \quad (13)$$

である。 $\bar{\phi}$ に関して変分をとれば,

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_t} \right) - \nabla_h \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_h \bar{\phi})} \right) = 0 \quad (14)$$

であり, これより

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \cdot [I\{f^2\} \nabla_h \bar{\phi}] - I\{f_z^2\} \bar{\phi} = 0 \quad (15)$$

が得られる. 式 (12) および式 (15) が, 弾性浮体下の重力波の変形を表す非定常緩勾配方程式である. 積分項は, 次の通りである.

$$I\{f^2\} = \frac{\tanh kh}{2k} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right); \quad I\{f_z^2\} = \frac{k \tanh kh}{2} \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (16)$$

式 (12) および式 (15) から速度ポテンシャル $\bar{\phi}$ を消去すると, 次式が得られる.

$$\eta_{tt} + \left\langle I\{f_z^2\} - \nabla_h \cdot [I\{f^2\} \nabla_h] \right\rangle \left[\left(g + \frac{\bar{k}}{\rho} \right) \eta + \frac{\rho'}{\rho} d\eta_{tt} + \nabla_h^2 \left(\frac{D}{\rho} \nabla_h^2 \eta \right) \right] = 0 \quad (17)$$

3. 弾性浮体下の波の波数

ここで, 一様水深場の平面波

$$\eta = a e^{i(kx - \omega t)} \quad (18)$$

を考える. 一様水深の場合, 式 (18) を式 (17) に代入すると, 以下の分散関係式が得られる.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \frac{1 + (\bar{k}/\rho g) + (Dk^4/\rho g)}{1 + (\rho'/\rho) d k \tanh kh} \quad (19)$$

浮体がない場合の分散関係式は, 以下の式で表される.

$$\omega^2 = gk_L \tanh(k_L h) \quad (20)$$

ここで, k_L は浮体がない場合の重力波の波数である. この波数で式 (19) の波数を無次元化すると, 以下のようになる.

$$\frac{(k/k_L) \tanh\{(k_L h)(k/k_L)\}}{\tanh(k_L h)} \times \frac{1 + (\bar{k}/\rho g) + (k_L h)^4 (D/\rho g h^4) (k/k_L)^4}{1 + (\rho' d/\rho h)(k_L h)(k/k_L) \tanh\{(k_L h)(k/k_L)\}} - 1 = 0 \quad (21)$$

$k/k_L = x$ とおくと, 式 (21) は

$$\frac{x \tanh\{(k_L h)x\}}{\tanh(k_L h)} \times \frac{1 + (\bar{k}/\rho g) + (k_L h)^4 (D/\rho g h^4) x^4}{1 + (\rho' d/\rho h)(k_L h)x \tanh\{(k_L h)x\}} - 1 = 0 \quad (22)$$

となるが, $\rho' d/\rho h$, $\bar{k}/\rho g$, $D/\rho g h^4$ を与えて x を求めることができる. 計算プログラム 図-2 に示す. プログラム中の SPRG は無次元平均ばね定数 $\bar{k}/\rho g$, STFF は無次元曲げ剛性 $D/\rho g h^4$ である. この計算プログラムを用いて

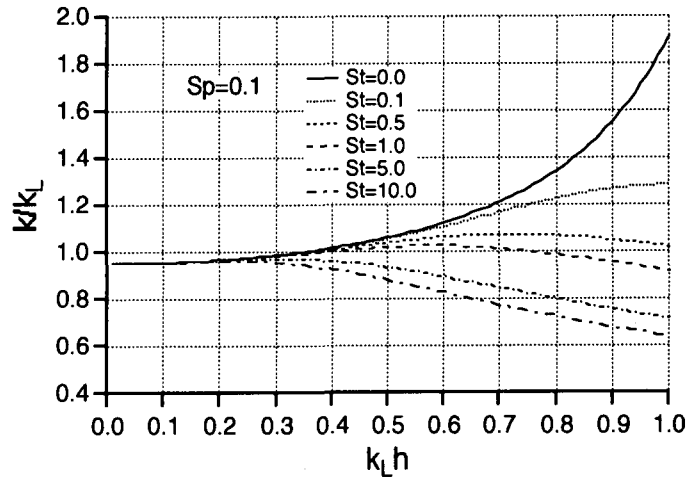
```

DIMENSION SPRG(6),STFF(6),AKLH(100)
DATA SPRG/0.0,0.1,0.5,1.0,5.0,10.0/
DATA STFF/0.0,0.1,0.5,1.0,5.0,10.0/
DATA DENS/0.9/
PARAMETER (EPS=1.0E-5)
EXTERNAL F

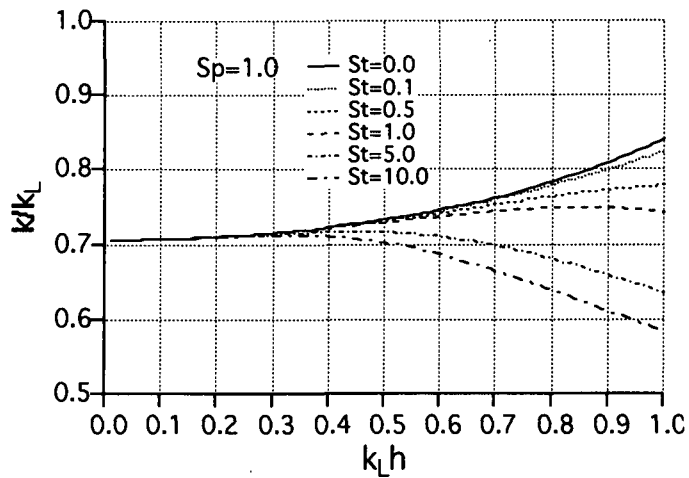
C
DO 1000 I=1,100
  AKLH(I)=FLOAT(I)*0.01
1000 CONTINUE
C
DO 1010 ISP=1,6
  DO 1020 IST=1,6
    WRITE(2,600) SPRG(ISP),STFF(IST)
600  FORMAT(/,' SPRING AND
* STIFFNESS',2F10.3)
C
DO 1030 IKH=1,100
C
  SP=SPRG(ISP)
  ST=STFF(IST)
  AKH=AKLH(IKH)
C
  A=5.0
  B=0.0
C
  Y=F(SP,ST,DENS,AKH,A)
10 CONTINUE
  XM=(A+B)/2.0
  IF(Y*F(SP,ST,DENS,AKH,XM).GT.0.0)
* THEN
    A=XM
  ELSE
    B=XM
  END IF
  IF(ABS(A-B).GE.EPS) GO TO 10
  X=(A+B)/2.0
C
  WRITE(2,601) AKH,X
601  FORMAT(2F10.3)
C
1030 CONTINUE
1020 CONTINUE
1010 CONTINUE
C
STOP
END
C
FUNCTION F(SPRG,STFF,DENS,AKLH,X)
F=(X*TANH(AKLH*X)/TANH(AKLH))
1 *(1.0+SPRG+STFF*AKLH**4*X**4)
2 /(1.0+DENS*AKLH*X*TANH(AKLH*X))-1.0
RETURN
END

```

図-2 弾性体浮体下の波の波数を求める計算プログラム



(a) 無次元バネ定数を 10 として無次元曲げ剛性をパラメーターとした場合



(b) 無次元バネ定数を 1 として無次元曲げ剛性をパラメーターとした場合

図-3 微小振幅表面重力波の波数で無次元化した弾性浮体下の波数の算定図

計算した波数の算定図を図-3に示す。(a)および(b)図は、無次元平均バネ定数がある値に固定し、弾性浮体の無次元曲げ剛性を6種類に変え、無次元水深に対して、弾性浮体がない場合の波数 k_L で無次元化した波数を示したものであり、(c)および(d)図は、弾性浮体の無次元曲げ剛性がある値に固定し、無次元平均ばね定数を6種類に変えた場合のそれである。

これらの図より、弾性浮体下の波の波数は、条件により、波がない場合の波数に比べて大きくなる場合と小さくなる場合があることが見て取れる。

浮体がない場合の分散関係は式(20)で与えられるが、それを書き直すと

$$(k_L h) \tanh(k_L h) - \omega^2 h / g = 0 \quad (23)$$

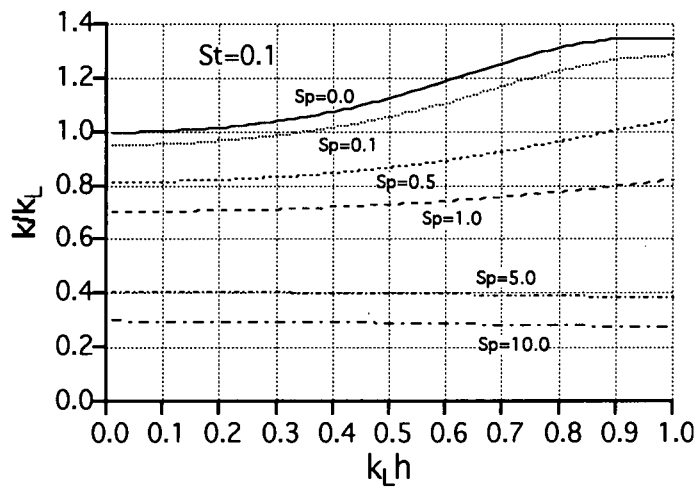
である。 $k_L h = x$ とおけば

$$x \tanh x - \omega^2 h / g = 0 \quad (24)$$

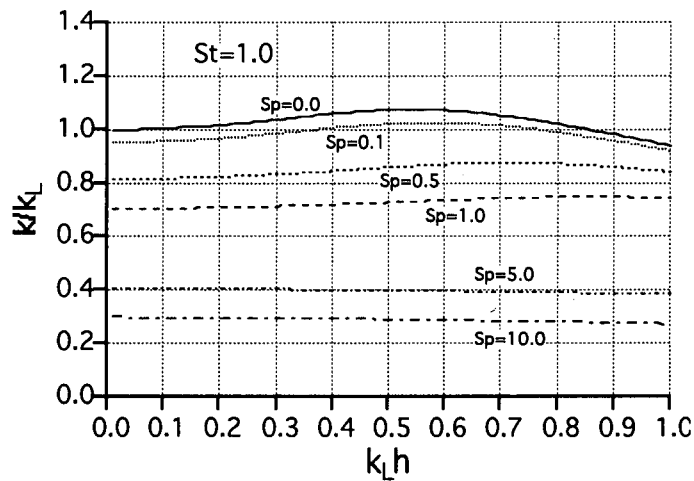
となるが、この x をとくプログラムは、式(22)と式(24)を見比べてわかるように、プログラムを若干書き換えるだけでよい。

4. あとがき

本研究は、弾性浮体が波の波長に比べて非常に大きいか、あるいは比較的柔らかくてその運動は波に追従しやすく、弾性浮体の端部の境界条件の影響が支配的でない場合の、任意海底地形における弾性浮体下の波浪の変形理論を導き、波の波数を算定するための計算プログラムと算定図を提案したものである。波数を算定する場合にこの計算プログラムおよび算定図は非常に便利である。



(c) 無次元曲げ剛性を 0.1 として無次元バネ定数をパラメータとした場合



(d) 無次元曲げ剛性を 1 として無次元バネ定数をパラメータとした場合

図-3 (つづき)

謝 辞

本研究は、住友金属工業（株）の奨学寄付金による研究の一部であることを付記して、ここに謝意を表する。

参考文献

Kirby, J.T. (1992): Water waves in variable depth under continuous sea ice, Proc. 2nd Int. Offshore and Polar Eng. Conf., ISOPE, pp.70-76.