

グリーンの公式を用いた構造物回りの波の3次元変形と力

3-dimensional wave deformation and force around a structure by green's theorem

金戸 俊道* ・ 加藤雅也** ・ 浜中建一郎***

Toshimichi Kaneto, Masaya Katou, Ken-ichiro Hamanaka

Wave diffraction and radiation around a structure are solved by Green's 3-dimensional theorem. We apply a boundary condition on virtual boundaries which wave diffraction and radiation are considered. This method reduce computational memory and time, since the virtual boundaries can be locate relatively close to the structure in this method.

We analyze the wave field passing over a submerged that plate and obtain the force and moment acting on the structure. the analytical results are compared with experimental data and good agreements are obtained

1. はじめに

構造物を過ぎる波の変形、及び構造物に働く力を解析する方法として、グリーンの公式を用いた方法がよく使われる。この方法はさらに、主要解を用いる方法と、グリーン関数を用いる方法に大別され、前者に関しては、断面2次元問題を例にとり種々検討が加えられている；折橋・浜中(1992)、折橋・浜中(1993)。

一方、3次元問題については、計算機のメモリーやコストの点から、グリーン関数を用いる方法が圧倒的に有利であると考えられているが、現在唯一知られているJohn (1978)によるグリーン関数は収束性に問題があり、その点を解決した修正グリーン関数が折橋・浜中(1994)によって提案されているものの、実際問題に対する適用に関しては現在研究中である。

このことから本研究では、構造物の回りの波の3次元変形問題を主要解をもちいて解く方法を検討することを目的とする。その際、構造物を取り囲む仮想境界面上での境界条件として、回折散乱波を考慮する方法、及びしない方法についての波の3次元変形を解く方法等について検討を加える。

2. グリーンの公式

3次元の時間的に振動するポテンシャル解を仮定する。

$$\Phi = \phi e^{-i\omega t} \quad \dots\dots(1)$$

全ての変量を周波数 σ と重力加速度 g で無次元化する。

$$(x, y) = (x', y') \sigma^2 / g$$

$$t = \sigma t'$$

$$\phi = \sigma^3 / g \phi'$$

$$k = g / \sigma^2 k'$$

$$\text{分散関係 } 1 = k \tanh k h$$

ここで記号 " ' " は有次元量を表す。

ポテンシャルの空間分布は、3次元ラプラス方程式を満たす。

$$\Delta \phi = 0 \quad \dots\dots(2)$$

領域内の点をP、境界上の点をQとし2点間の距離を r とすると、(2)式の主要解 $1/r$ を用いて、グリーンの公式から領域内のポテンシャルは

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS \quad \dots\dots(3)$$

n : 境界の外に向かう法単位ベクトル

P点が境界上にあるときは、 Q' で表すと、

$$\phi(Q') = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS \quad \dots\dots(4)$$

ただし、 $(\partial/\partial n)$ は、境界上で領域内から外側に向かう微分を表す。

* 学生会員 北海道大学大学院(札幌市北区北13条西8丁目)

** 正会員 東急建設(株)

*** 正会員 北海道東海大学工学部

P点を境界上にとり境界SをN個の微小面要素に分割し、離散化すると

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N \{E_{ij} \bar{\phi}_j - \bar{E}_{ij} \phi_j\} \quad \dots\dots (5)$$

ここで、記号“ $\bar{}$ ”はそのn方向の微係数を表す。 E_{ij} は主要解のj区間積分で、 $\bar{E}_{ij}$ は主要解の微係数の積分を表し、

$$i \neq j \quad E_{ij} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \Delta s_j, \quad \bar{E}_{ij} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Delta s_j \quad \dots\dots (6)$$

$$i = j \quad E_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[dx \log \frac{1 + \sin \{ \tan^{-1} (dy/dx) \}}{1 + \sin \{ \tan^{-1} (dy/dx) \}} + dy \log \frac{1 + \sin \{ \tan^{-1} (dx/dy) \}}{1 - \sin \{ \tan^{-1} (dx/dy) \}} \right], \quad \bar{E}_{ij} = 0 \quad \dots\dots (7)$$

である。ここで Δs_j は分割面要素の面積。 dx と dy は微小面要素の各辺。

2. 1 散乱波を考慮しない方法

仮想境界が構造物から十分離れているとすると、散乱波は減衰し入射波だけとなる。

境界条件を考える。

底面と構造物表面

$$\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots (8)$$

自由水面

微小振幅の仮定を用いて

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi, \quad \bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi \quad \dots\dots (11)$$

仮想境界

入射波のポテンシャルは

$$\phi = e^{ikx} A(z) \quad \dots\dots (12)$$

$$\text{と表せる。ここで } A(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad \dots\dots (13)$$

従って、それぞれの境界で ϕ と $\bar{\phi}$ を求め、(5)式に代入すると底面、構造物、水面に配置される未知数 ϕ_i に対して連立一次方程式を構成し解くことができる。

2. 2 散乱波を考慮する方法

2. 1で示した散乱波を考慮しない方法では、仮想境界を散乱波が十分に減衰し、その影響が無くなる距離まで離さなければならず未知数の数が多くなる。そこで、散乱波を考慮に入れることにより境界を狭くとることができる。

まず、散乱波のポテンシャルを考える。

3次元ラプラス方程式

$$\Delta \phi = 0$$

を円柱座標表示すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots (14)$$

変数分離法を用いて

$$\phi = \phi_s(r, \theta) Z(z) \quad \dots\dots (15)$$

と表し、(15)式を(14)に代入すると

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - C Z = 0 \quad \dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} + C \phi_s = 0 \quad \dots\dots (17)$$

(16), (17)の2式が導かれる。ここで $C = k^2$ である。

水底での境界条件を満たすため

$$Z(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad \dots\dots (18)$$

水面での境界条件を満たすため

$$k \tanh kh = 1 \quad \dots\dots (19)$$

一方 ϕ_s を次のように仮定する。

$$\phi_s = \sum R_m(r) e^{im\theta}$$

これを(17)式に代入すると、それぞれの R_m に対し次式が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 R_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_m}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R_m = 0 \quad \dots\dots(20)$$

この式は、 m 次のBessel方程式でその一般解は

$$R_m(r) = C_m H_m^{(1)}(kr) + D_m H_m^{(2)}(kr) \quad \dots\dots(21)$$

である。ここで C_m, D_m は積分定数、 $H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$ は各々 m 次の第一種、第二種Hankel関数である。

Hankel関数は、 kr が十分大きいときは

$$H_m^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left\{i\left(kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad \dots\dots(22)$$

となり、はじめに $\phi = \phi e^{-it}$ と仮定していたから $H_m^{(1)}$ は外に広がる波、 $H_m^{(2)}$ は中心に集まる波を表し、ここでは(22)式だけが意味をもつ。

また、波動場に対称性がある場合は、 $e^{im\theta} = \cos m\theta + i \sin m\theta$ で必要なのは $\cos m\theta$ だけであるから、これらの結果より散乱波のポテンシャルは

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m(kr) \cos m\theta A(z) \quad \dots\dots(23)$$

(23)式をもちいてそれぞれの境界で $\phi, \bar{\phi}$ を求めて結果を(5)式に代入すると、底面、構造物、水面に配置される未知数 ϕ_i 、仮想境界上にとった選点の数だけある C_m に対して連立一次方程式を構成し解くことができる。

4. 結果

図1から5に、入射波を除いた散乱波の水面波形を示す。無次元水深は2.0、無次元波長は6.1、水平板の縦横の長さは4.0であり、厚さは0.4である。散乱波の発生の様子を見るため、図1から5まで没水深を0.8から1.6まで0.2ごとに变化させている。構造物が水面近くにある図1は散乱波が大きく発生しているが、没水深が深くなるに従って散乱波は小さくなり、本解析の妥当性を示していると言えよう。

次に実験値との比較を示す。図6は用いた実験装置の概略図である。水路幅は80cmであり、実験に用いた水平板は幅20cm、30cm、40cm、50cmの正方形であり厚さは3.3cmである。図7から12に水平板に働く水平力(F_x)、垂直力(F_z)、分力計検査の位置でのモーメント(M_y)を示す。図中HWLは水深0.833m、没水深0.32m、LWLは水深0.667m、没水深0.15mである。横軸はすべて水平板の幅である。図10で $B=0.5$ mの時、実験値と解析値とに大きな違いが見られるが、これは板上で碎波していたためである。他の結果では実験値と解析値は良く一致しており本解析の妥当性を示している。

図13から15は構造物に働く F_x, F_z, M_y の入射波高による変化の様子を示す。HWL、LWLは図7から12の場合と同じであるが、水平板の幅は50cmで一定である。LWLの場合に比較的大きな差が見られるが、これは波長が構造物の幅に対し相対的に小さく散乱波が発生し易く、水路幅で振動する成分が無視出来なくなることや、剥離によるエネルギー損失が影響しているものと思われる。しかしながら、解析では水路幅の有限性を考慮していないにもかかわらず、大部分のケースで良い一致が見られたのは、用いた水平板の幅が比較的小さく、発生した散乱波が小さかったためと考えられる。図16は実験で用いた水平板のうち幅の最も大きな50cmの場合の散乱波の水面波形で、図17は入射波と散乱波の波形である。この場合、入射波の波高と水路側壁での散乱波の最大波高との比は0.14であり、側壁からの反射の影響は小さい事が分かる。

最後に、本研究における実験データは(社)マリノフォーラム21の[人工浮海底システムの開発]として実施したものの一部である事を併記し、関係各位に感謝の意を表します。

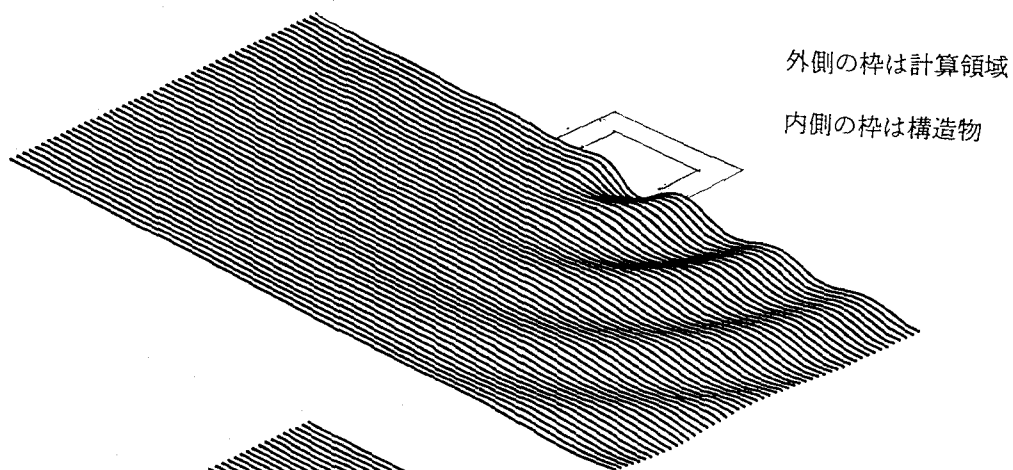


図1 散乱波の波形(没水深 0.8)

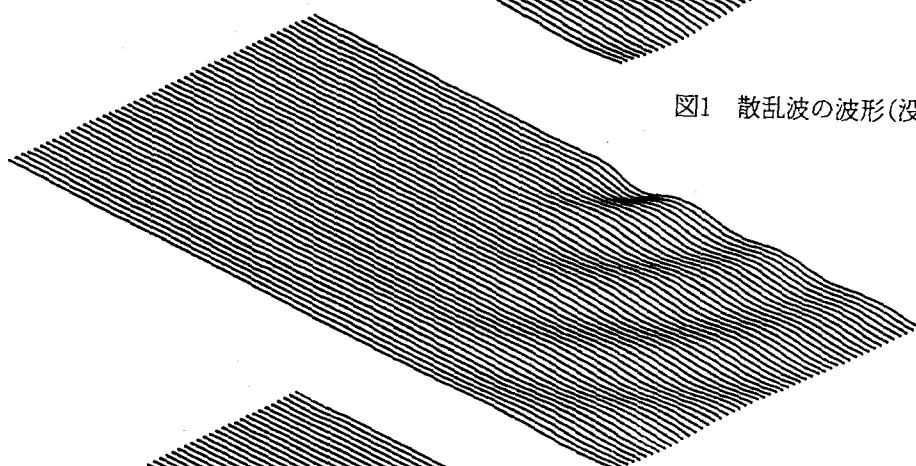


図2 散乱波の波形(没水深 1.0)

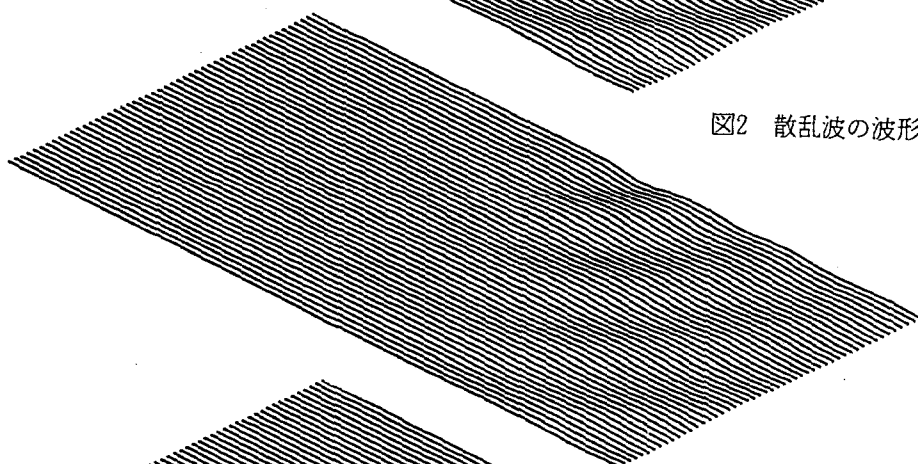


図3 散乱波の波形(没水深 1.2)

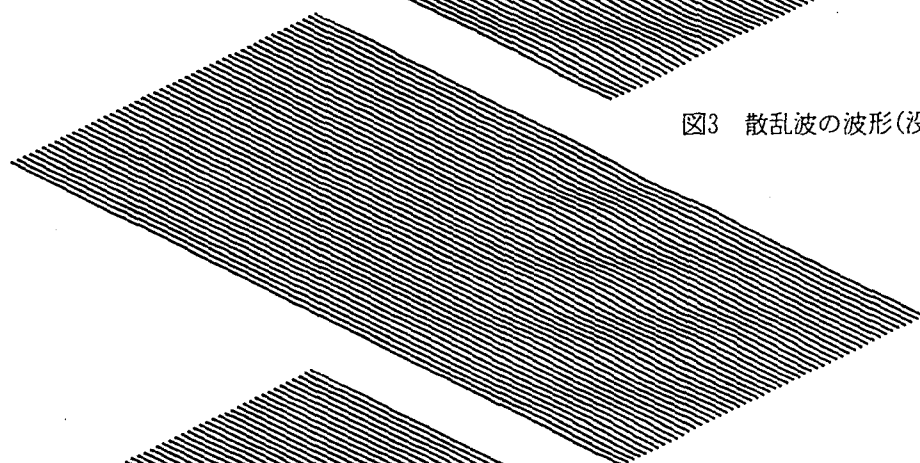


図4 散乱波の波形(没水深 1.4)

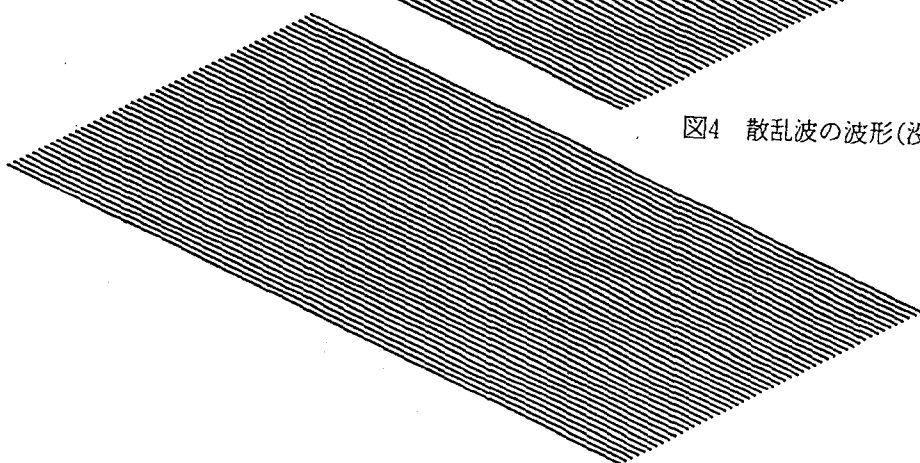


図5 散乱波の波形(没水深 1.6)

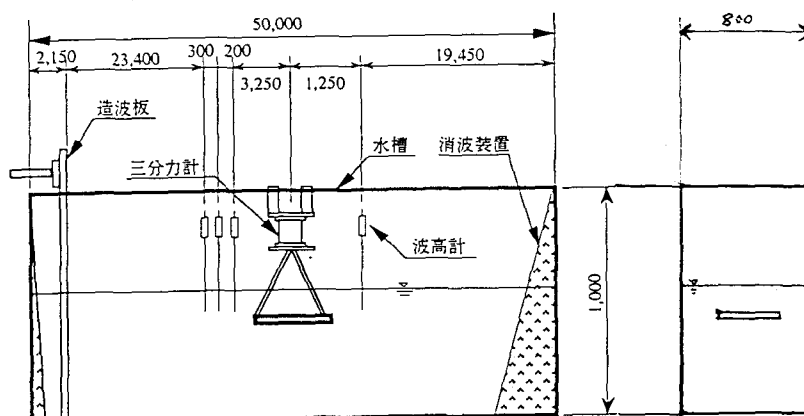


図6 実験装置

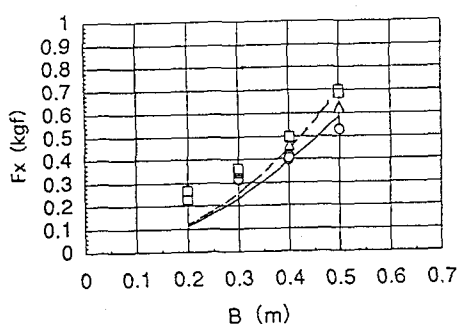


図7 構造物に働く水平方向の力(HWL)

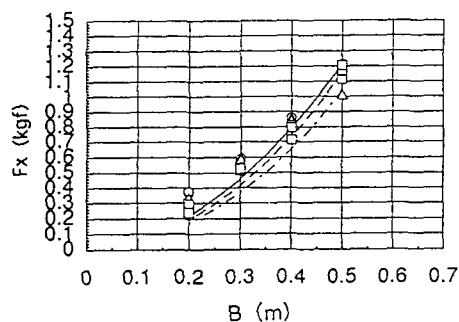


図8 構造物に働く水平方向の力(LWL)

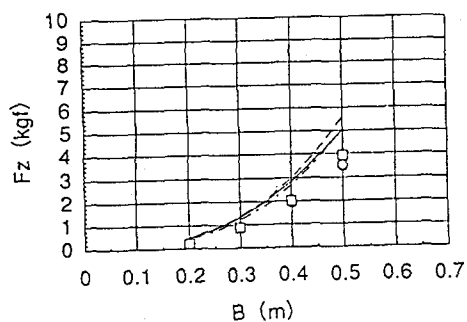


図9 構造物に働く垂直方向の力(HWL)

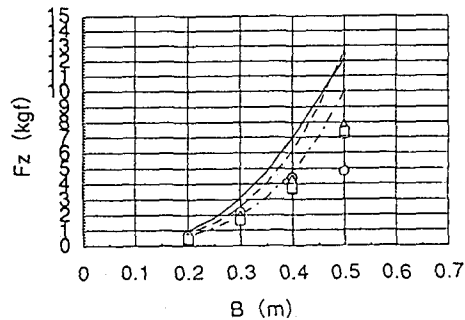


図10 構造物に働く垂直方向の力(LWL)

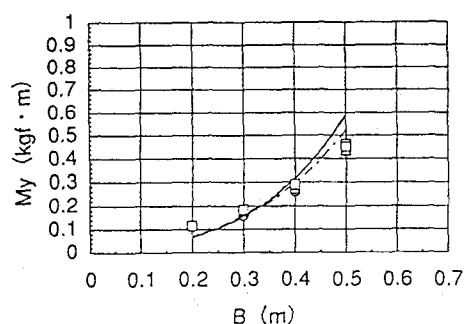


図11 構造物に働くモーメント(HWL)

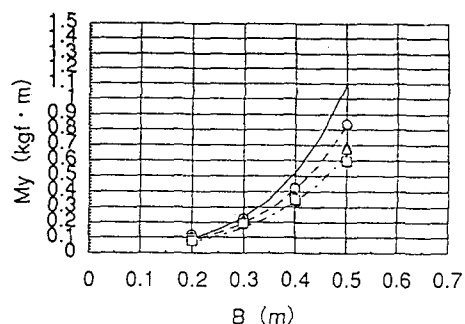
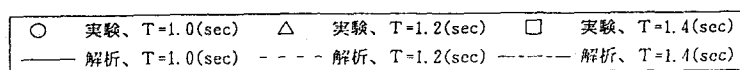


図12 構造物に働くモーメント(LWL)



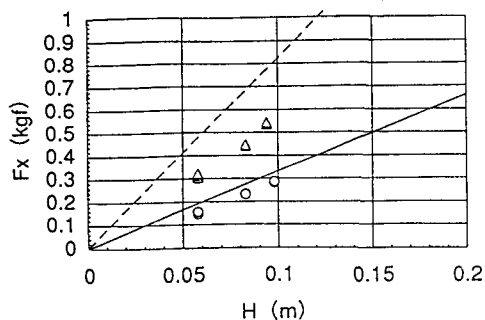


図13 波高変化に対する水平方向の力

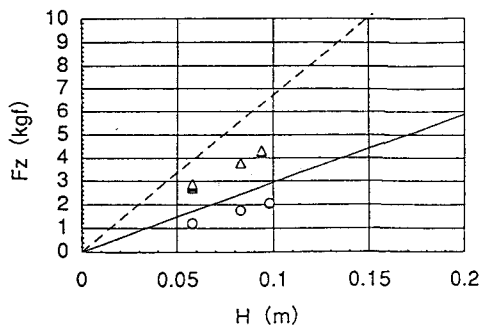


図14 波高変化に対する垂直方向の力

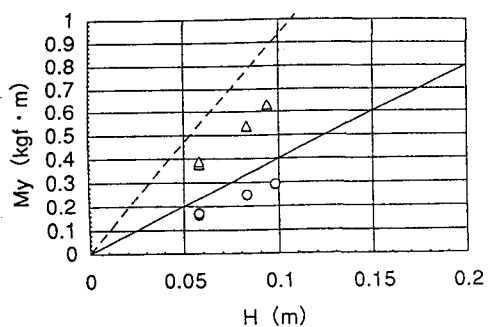


図15 波高変化に対するモーメント

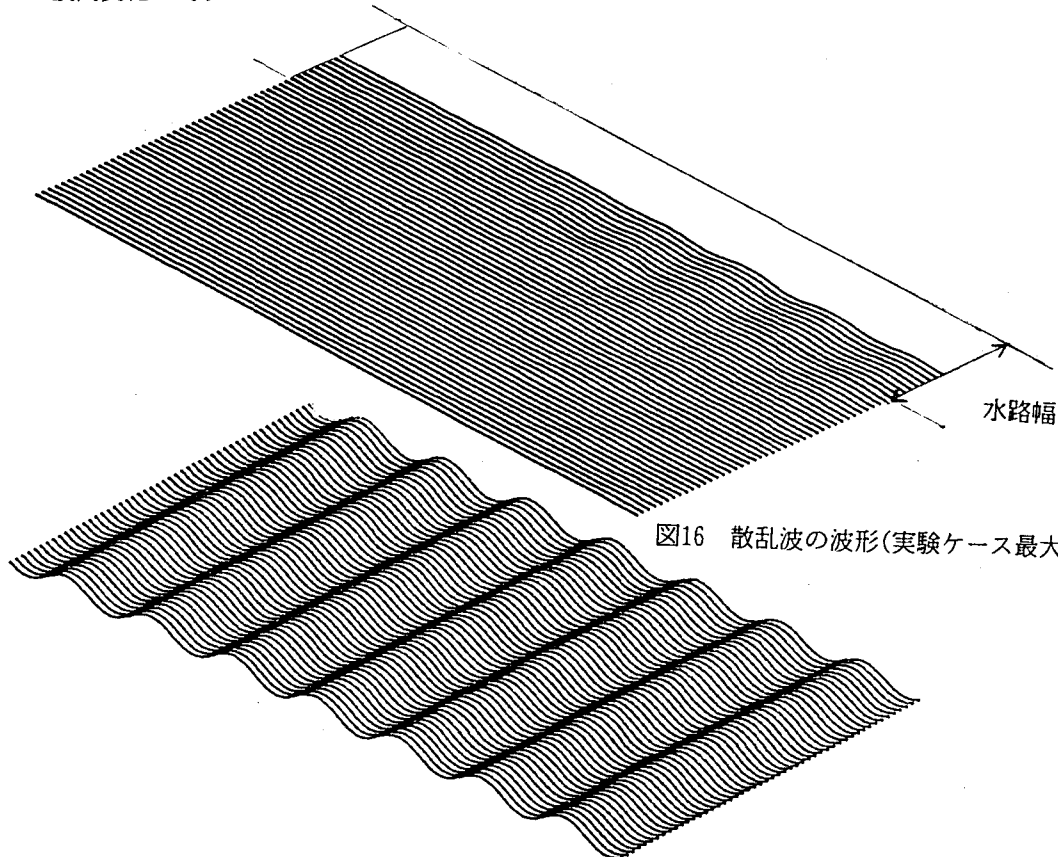
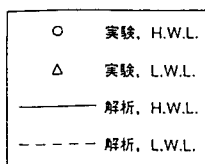


図16 散乱波の波形(実験ケース最大B=50cm)

図17 入射波と散乱波の波形(実験ケース最大B=50cm)

参考文献

折橋・浜中(1992): 没水形水平構造物をよぎる波, 土木学会道支部論文報告集, 第49号、頁697~700

折橋・浜中(1993): グリーンの公式を用いた没水形構造物を過ぎる波の解析
第48回土木学会年講, 頁792~793

折橋・浜中(1994): 水中構造物を過ぎる波, 土木学会道支部論文報告集、第50号

John, F. (1950) : On the motion of floating bodies II. simple harmonic motion, Comm. Pure Appl. Math vol13, 45-101