

有限要素法による可撓性浮体の変形解析

Finite Element Analysis on Displacements of Flexible Floating Structures

鈴木康正*

Suzuki, Yasumasa

A numerical model is developed to calculate the vertical displacement of flexible floating structures. This model is based on the Finite Element Method (F.E.M.). In the case of displacement caused by static load, the results of F.E.M. agreed with those of strict solution. The movement in waves is also calculated by numerical integration of the equation of motion based on F.E.M.. Wave-exciting forces and wave making resistance forces upon elements are calculated from velocity potential.

Keywords: (flexible floating structure, Finite Element Method)

1. はじめに

現在では、さまざまな形態の浮遊式構造物が海洋開発に利用されている。一般に、浮体の構造形式は変形をしない剛体が多いが、変形をするものとして、浮遊式の橋梁、マリーナの小型船係留用の浮き栈橋、可撓性の浮き防波堤などがある。また、従来、剛構造物と仮定して解析をされてきた構造物の中にも、例えば浮体の長さに対して高さが低い扁平な構造物のような場合には、厳密には外力による変形を考慮すべきものもある。したがって、外力によって変形する浮遊式構造物の解析は、今後ますます重要になるものと考えられる。

変形を考慮した浮遊式構造物の解析は、変形を考慮する必要の無い剛体の場合に比べて、格段に複雑である。これは、浮体自身が変形することによって外力に抵抗する効果と、浮体の変形が周辺の流体に及ぼす影響を考慮する必要があるからである。波浪中の可撓性浮体についての理論計算としては、井島(1971)が水面に浮いた完全にflexibleな板による波の変形問題に対する速度ポテンシャルを求め、また鶴飼・日野(1971)が、一端を固定した弾性板の変位をポテンシャル理論を用いて解析的に求めた例がある。しかし、いずれも一般的な可撓性浮体に応用できるものではない。そこで本研究では、有限要素法の手法を用いて可撓性浮体の変形解析を行ったものである。

2. 可撓性浮体の静的曲げ変形解析

2. 1 釣合い方程式

浮体構造物としては、主として曲げ変形によって外力に抵抗するはり (beam) を仮定しており、したがって軸力は無視している。また、曲げ変形した浮体の変位は、鉛直方向変位によって表すことができると仮定している。

いま図-1のような2次元可撓性浮体および座標系を考える。水深 h 、浮体の長さ B 、吃水 d とし、静水面上に右向きに x 軸、浮体の中心を通り鉛直上方に z 軸をとる。また浮体は上下方向には自由に動けるような方法で係留されているものとする。

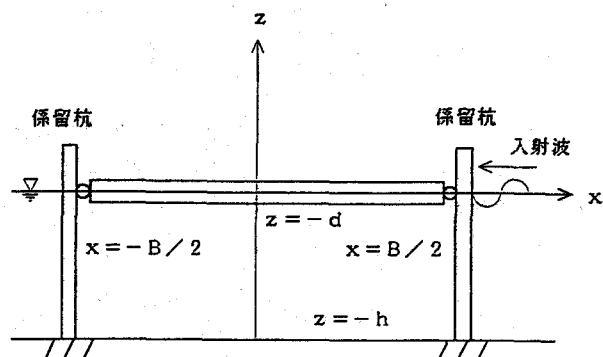


図-1 可撓性浮体および座標系

いま浮体構造物を長さ b の n 個の要素に分割

して考えると、浮体全体の鉛直方向の釣合い方程式は有限要素法のマトリックス表示によれば次のように表される。

$$\{F\} = [K]\{w\} + [B]\{w\} \quad (1)$$

ここで、 $[K]$: 浮体全体の剛性マトリックス

$[B]$: 浮体全体の静水圧的復原力の係数マトリックス

* 正会員 運輸省港湾技術研究所水工部波浪研究室長 (239 横須賀市長瀬3-1-1)

$\{w\}$: 全節点の z 方向の変位ベクトル

$\{F\}$: 全節点の z 方向の外力ベクトル

上式の $[K]\{w\}$ という項が、浮体自体が曲げ変形することによって抵抗する効果を表しているといえる。

2. 2 剛性マトリックス

図-2 に示すはり要素が、要素の局所座標の x 軸に沿って鉛直方向に働く分布荷重 $q_v(x)$ をうけて、たわみ変形する場合を考える。要素の局所座標系の原点を要素の左端にとる。要素の両端の節点を i および $i+1$ とし、節点の自由度をたわみと断面回転角とすると、要素の節点変位ベクトルは次のように4自由度となる。

$$\{w\}^e = [w_i \ w'_i \ w_{i+1} \ w'_{i+1}]^T \quad (2)$$

ここで、 w_i は鉛直方向変位を表し上方を正、 w'_i は断面回転角を表し反時計回りを正としている(図-3)。また、上添字の e は要素のベクトルであることを示し、下添字が節点番号を表している。記号 T は行列の転置を示している。

また、要素に働く外力はすべて節点を通じてのみ伝達されるとして節点力を定義すると、節点変位に対応する節点力ベクトルは次のようになる。

$$\{F\}^e = [V_i \ M_i \ V_{i+1} \ M_{i+1}]^T \quad (3)$$

ここで、 V 、 M はそれぞれせん断力と曲げモーメントであり、図-3 のように符号を定める。

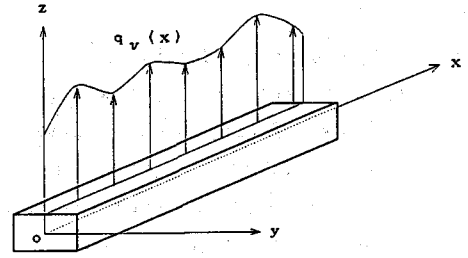


図-2 浮体の要素

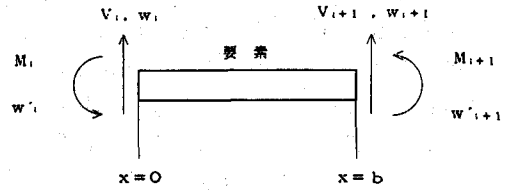


図-3 せん断力とモーメントの符号

節点変位と節点力には、要素に固有の係数マトリックス $[K]^e$ を仲立ちとして、次のような関係式が成り立つ。

$$\{F\}^e = [K]^e \{w\}^e \quad (4)$$

ここで、 $[K]^e$ は要素の剛性マトリックスであり、要素の曲げ剛性を EI とすると $[K]^e$ は次式で与えられる。

$$[K]^e = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

浮体全体の剛性マトリックスの合成は、各要素の合成マトリックスを、1) 各節点における変位の連続性、2) 各節点における力の釣り合い条件、を満足するように重ね合わせればよい。これを式で示せば次のようになる(マトリックスの各項の右上の添字は、浮体の要素番号を表す)。

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}+k_{11}^2 & k_{34}+k_{12}^2 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43}+k_{21}^2 & k_{44}+k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

2. 3 静水圧的復原力のマトリックス表示

要素に作用する単位幅当たりの静水圧的復原力は、浮体の鉛直変位 $w(x)$ に比例し、次式で表される。

$$q_s(x) = -\rho_w g w(x) \quad (7)$$

ここで、 $q_s(x)$: 静水圧的復原力

ρ_w : 流体の密度

g : 重力の加速度

いま、要素の局所座標 x における変位 $w(x)$ は、要素の節点変位を用いて次式のように表される。

$$w(x) = [C_1(x) \ C_2(x) \ C_3(x) \ C_4(x)] \{w\}^e \quad (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} C_1(x) &= 1 - b \left(\frac{x}{b} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{b} \right)^3, & C_2(x) &= b \left\{ \left(\frac{x}{b} \right) - 2 \left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{x}{b} \right)^3 \right\} \\ C_3(x) &= 3 \left(\frac{x}{b} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{b} \right)^3, & C_4(x) &= b \left\{ - \left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{x}{b} \right)^3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

静水圧的復原力は要素に沿って分布する荷重であるので、これと等価な節点荷重に置き換える必要がある。分布荷重と等価な節点力の算定式の誘導法は、有限要素法の文献に詳しいので、ここでは計算結果のみを示すこととする。

いま、次のようにおくと、

$$\left. \begin{aligned} Q_{s0} &= \int_0^b q_s(x) dx, & Q_{s1} &= \int_0^b x q_s(x) dx \\ Q_{s2} &= \int_0^b x^2 q_s(x) dx, & Q_{s3} &= \int_0^b x^3 q_s(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

静水圧的復原力と等価な節点力 $\{F_s\}^e$ は次式で求められる。

$$\{F_s\}^e = \begin{Bmatrix} V_{s,i} \\ M_{s,i} \\ V_{s,i+1} \\ M_{s,i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{b^2} & \frac{2}{b^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{b} & \frac{1}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & -\frac{2}{b^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{s0} \\ Q_{s1} \\ Q_{s2} \\ Q_{s3} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 $V_{s,i}$ 、 $M_{s,i}$ および $V_{s,i+1}$ 、 $M_{s,i+1}$ はそれぞれ節点 i ($x=0$) および節点 $i+1$ ($x=b$) における節点の等価せん断力および等価曲げモーメントである。

さて、式 (7) ~ (10) を式 (11) に代入して計算を行えば、 $\{F_s\}^e$ は要素の静水圧的復原力の係数マトリックス $[B]^e$ と $\{w\}^e$ との積として、次式のように表される。

$$\{F_s\}^e = [B]^e \{w\}^e \quad (12)$$

ここで、

$$[B]^e = \rho_w g b \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} b & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} b \\ \frac{1}{105} b^2 & \frac{13}{420} b & -\frac{1}{140} b^2 & \\ & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} b & \\ SYM. & & \frac{1}{105} b^2 & \end{bmatrix} \quad (13)$$

浮体全体の静水圧的復原力のマトリックス $[B]$ は、各要素のマトリックス $[B]^e$ を剛性マトリックスの場合の式 (6) と同じやりかたで重ね合わせればよい。

2. 4 静的曲げ変形の計算結果の検証

さて、上下方向に自由に変位できるように係留された浮体の場合には、釣合い方程式 (1) の左辺の節点外力 $\{F\}$ の項はすべて既知であるので、未知変位に関する連立方程式 (1) を解けば変位を求めることができる。

以上が有限要素法による可撓性浮体の静的曲げ変形解析法であるが、静水圧的復原力を弾性バネとみなせば、弾性支承上のはりの理論によって解析解を求めることができる。そこで、有限要素法による計算結果を解析解と比較することによって計算精度を検討した。

可撓性浮体の長さ $B = 400\text{ cm}$ 、曲げ剛性 $EI = 9.8 \times 10^8 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2$ とした。有限要素法は連続体である浮体を要素に分割して近似するので、要素数 n を変えて近似の度合いを検討した。

図-4は、浮体の中央に $4.9 \times 10^5 \text{ dyn}$ の集中荷重を載せたときの結果である。横軸は要素数 n 、縦軸は鉛直方向変位に対する有限要素法の解 w と解析解 w_0 との比である。○印は浮体の端E点の変位、●印は浮体中央C点の変位に対する比較を示している。この図から、浮体の中央に集中荷重が作用する場合には、浮体を4等分した有限要素法(F. E. M.)の計算結果は、解析解に対し誤差が2%以下であり、8分割すれば両者はほぼ一致することが判る。

次に、荷重が浮体の軸線方向に変化するときの精度について検討するために、三角形分布荷重が作用する場合を考え、解析的に解いた結果と、有限要素法による計算結果を比較したのが図-5である。浮体の力学的条件は集中荷重の場合と同じである。三角形分布荷重の浮体の右端における強度は $q = 9800 \text{ dyn}$ である。

この図から、三角形分布荷重の場合には、集中荷重の場合ほど要素数の増加による急速な精度の上昇はみられないが、10分割のときで誤差は1%以下となっていることが判る。

以上の結果より、計算結果の精度は浮体の分割数に依存するものの、有限要素法は可撓性浮体の静的変形問題の解析に有効な手法であることが確認された。

3. 可撓性浮体の波浪中動揺解析

可撓性浮体の場合には、浮体自身が曲げ変形することによって外力に抵抗する効果を考慮する必要がある。そのためには、可撓性浮体の変形を構造解析によって求めながら浮体としての運動を解析しなければならないが、流体からの分布荷重が作用する連続体である浮体の運動を厳密に解くことは困難である。そこで本報告では、浮体の静的曲げ変形解析に用いた有限要素法の手法を用いて可撓性浮体の波浪中の動揺解析をすることとした。

2次元可撓性浮体および座標系は図-1に示したとおりである。入射波は x 軸の負の方向へ進行するものとし、次式で表す。

$$\zeta = \frac{H}{2} \cos(kx + \sigma t) \tag{14}$$

ここで、 H は入射波高、 k は波数 ($=2\pi/L$ 、 L は波長)、 σ は円周波数 ($=2\pi/T$ 、 T は周期) である。

いま浮体を要素に分割して考えると、浮体全体の鉛直方向の運動方程式は有限要素法のマトリックス表示によれば次のように表される。

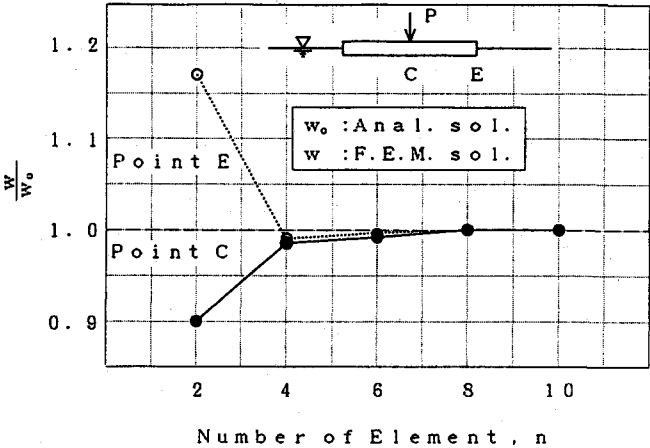


図-4 解析解とF. E. M. との比較 (集中荷重)

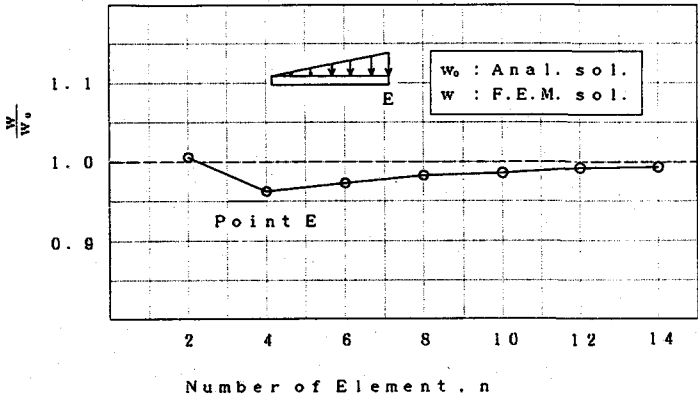


図-5 解析解とF. E. M. との比較 (三角形分布荷重)

$$([M]+[M_a])\{\ddot{w}\} + [C]\{\dot{w}\} + ([K]+[B])\{w\} = \{F\} \quad (15)$$

ここで、 $[M]$: 浮体全体の質量マトリックス
 $[M_a]$: 浮体全体の付加質量マトリックス
 $[C]$: 浮体全体の減衰係数マトリックス
 $[K]$: 浮体全体の剛性マトリックス
 $[B]$: 浮体全体の静水圧的復原力の係数マトリックス
 $\{F\}$: 全節点の z 方向の波浪外力ベクトル
 $\{w\}$: 全節点の z 方向の変位ベクトル

浮体が運動しているときは、質量と加速度の積に負号をつけたものとして慣性力を導入すれば、問題を静的なものに置き換えることができる (d' Alembert の原理)。今考えている浮体ははり構造をしており、質量は要素全体に分布しているので、慣性力は分布荷重と同じような効果を及ぼすことになる。したがって、静水圧的復原力と同様の計算により、要素の質量マトリックス $[M]^e$ は、次式で表される。

$$[M]^e = \rho_B b \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210}b & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}b \\ & \frac{1}{105}b^2 & \frac{13}{420}b & -\frac{1}{140}b^2 \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}b \\ \text{SYM.} & & & \frac{1}{105}b^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 ρ_B は浮体の密度である。浮体全体の質量マトリックスは、剛性マトリックスの合成と同じようにして求めることができる。

さて、式 (15) の付加質量マトリックス $[M_a]$ および減衰係数マトリックス $[C]$ は、浮体が静水中で強制振動したときに流体から受ける造波抵抗力から計算される。また、波浪外力ベクトル $\{F\}$ は、浮体が固定されていたときの波浪強制力から計算される。これらの流体力の計算には、いずれも速度ポテンシャルを求める必要があるが、浮体を要素に分割して流体力を考えていることから、井島 (1971) によるポテンシャル接続法によった。これは、流体域を境界条件の異なる領域ごとに鉛直面で分割し、各領域における境界条件および連続条件を満足するように速度ポテンシャルを求めるものである。したがって、造波抵抗力および波浪強制力を計算するときの速度ポテンシャルは、浮体表面における異なる運動学的境界条件によって求められることになる。

なお、浮体の運動に対しては、運動振幅に対し非線形な減衰力の影響を考慮する必要がある場合があるが、非線形項を何らかの方法によって線形化すれば、式 (15) のような形におきかえることができるので、ここでは非線形項を含まない運動方程式の解法についてのべる。

さて、式 (15) を解析的に解くことは困難であるので、ここでは Newmark 法による直接時間積分法によって解くこととした。この方法は、加速度と速度が、時刻 t_0 と $t_1 = t_0 + \Delta t$ との間で直線的に変化するものと仮定する。すると式 (15) は、次式のように変形される。

$$\left\{ \frac{4}{(\Delta t)^2} ([M]+[M_a]) + \frac{2}{\Delta t} [C] + [K] + [B] \right\} \{w\}_1 = \{F\}_1 + [M]\{a\}_0 + \{b\}_0 \quad (17)$$

ここで、 $\{w\}_1$ および $\{F\}_1$ は $t = t_1$ における節点変位と節点波浪外力、また $\{a\}_0$ および $\{b\}_0$ は次式で表されるように、 $t = t_0$ における変位ベクトル $\{w\}_0$ から計算される。

$$\begin{aligned} \{a\}_0 &= \{\ddot{w}\}_0 + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{w}\}_0 + \frac{4}{(\Delta t)^2} \{w\}_0 \\ \{b\}_0 &= \{\dot{w}\}_0 + \frac{2}{\Delta t} \{w\}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

式 (17) の各項のうち $\{w\}_1$ 以外はすべて既知量であるので、これを解けば $t = t_1$ における変位を求めることができる。このような計算を繰り返せば、浮体運動の時系列を計算することができる。この方法は、計算の安定性がよく、振幅の計算結果の精度が高いが、 Δt を大きくすると周期が真の値に比べて長く計算されるという性質がある。検討の結果、 Δt は入射波周期の $1/100$ とすることとした。

図-6 は、水深 $h = 5$ m の海域に係留された、幅 $B = 10$ m、吃水 $d = 15$ cm、曲げ剛性 $EI = 9.8$

$\times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ の可撓性浮体の波浪中の運動の時間変化の計算結果である。入射波の波高 $H = 50 \text{ cm}$ 、周期 $T = 3.2 \text{ s}$ である。なお、計算では浮体の運動速度の2乗に比例する非線形減衰力を考慮しているが、それを線形力に置き換えている。また、浮体を10の要素に分割しており、図-6は各要素の中央点の変位を x 軸のマイナス側から順に上から下へ並べて示した。それぞれの図の縦軸は $\pm 25 \text{ cm}$ の範囲の鉛直変位、また、横軸は $t = 0 \text{ s}$ から10周期($= 32 \text{ s}$)の間の時間を示している。この図から、浮体の運動は3周期後にはほぼ定常状態に達していること、浮体の位置により運動の振幅や位相に差があることが判る。

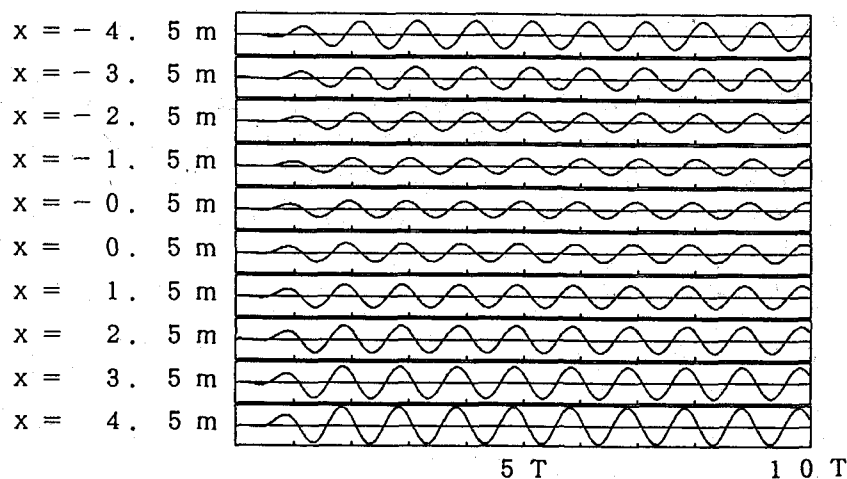


図-6 可撓性浮体の波浪中の動揺、変形の時系列

4. おわりに

有限要素法によって、可撓性浮体の変形を解析する方法について検討した。静的な荷重による静的変形問題については解析解と比較し、計算精度が高いことを確認した。また、波浪中の浮体動揺も本方法で解析できることを示した。今後は、3次元浮体の変形問題、不規則波中の浮体動揺等についても検討をおこなう必要がある。

なお、運輸省港湾技術研究所水工部波浪研究室の河合弘泰技官、冨田康大技官および松森孝弘技官の各氏には、図面の作成等で協力して頂いた。ここに、感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 井島武士(1971)：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用、1971年度水工学に関する夏期研修会講義集、B-1-1-31。
- 鶴飼恵三・日野幹雄(1971)：水面上の弾性板の波による振動、Technical Report, No.10, Dep. of Civil Eng. Tokyo Inst. of Technology, pp.213-223.