

二成分合成波の非線形干渉に関する研究

Nonlinear Interactions of Two Components Composite Waves

富田孝史¹・岩田好一朗²・竹下伸治³・姜閔求⁴

Takashi Tomita, Koichiro Iwata, Shinji Takeshita and Yoon-Koo Kang

In this paper, the 3rd-order theory of the two components composite wave in the uniform depth is developed with considering the higher order modulation of wave frequency, and the nonlinear interaction of the wave is theoretically and experimentally discussed. As the relative depth is smaller, the wave steepness is larger, and the ratio of wavelengths of two fundamental waves in two components composite wave, n , becomes near 1, the nonlinearity is stronger. In particular, when n becomes near 1 like as 0.8 and the relative depth is larger, the bound waves with angular frequencies $2\sigma_1 - \sigma_2$ and $2\sigma_2 - \sigma_1$ (σ_1 and σ_2 are the angular frequencies of the fundamental waves) considered by 3rd-order wave theory cannot be ignored.

Keywords : two components composite wave, wave theory, nonlinear interaction

1. はじめに

不規則な海の波には、数多くの自由波成分とそれらの自己および相互の非線形干渉によって生成される拘束波成分が存在する。この非線形干渉の効果は、水深がある程度浅くなってくると、無視することができなくなる。本研究では、不規則波における非線形干渉効果を明らかにする基礎として、不規則波の中の2つの自由波を取り上げ、それらの自己および相互干渉効果を含んだ二成分合成波を対象にして、これまで充分な検討が加えられていない二成分合成波の非線形干渉効果を理論と水理実験の両面から考究する。

2. 二成分合成波の三次理論

一様水深域の非粘性、非圧縮性流体の非回転運動を対象にした場合、支配方程式は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 & ; -h \leq z \leq \eta & \dots (\text{基礎方程式}) \\ \eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_z &= 0 & ; z = \eta & \dots (\text{運動学的自由表面境界条件}) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta &= R & ; z = \eta & \dots (\text{力学的自由表面境界条件}) \\ \phi_z &= 0 & ; z = -h & \dots (\text{底面境界条件}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 ϕ は速度ポテンシャル、 η は水位変動、 h は静水深、 t は時間、 g は重力加速度、 R はベルヌーイ定数である。 x と z は、静水面上に原点をとったデカルト座標であり、それぞれ波の進行する向きを正にした水平座標、上向きを正とした鉛直座標である。また、下付き添字の x 、 z および t はそれぞれの変数による偏微分を表している。

一般的なストークス展開と同様に自由水面の境界条件を $z=0$ 周りにテーラー展開した上で、式(2)に示されるパラメータ α (一つの自由波の振幅)と β (もう一つの自由波の振幅)による摂動法を使用すると、式(1)を満足するような ϕ と η などが式(3)~(9)のように得られる。なお、本理論解析では、波数の代わりに角周波数 σ_A と σ_B (σ_A と σ_B はそれぞれ合成する前の2つの基本波(自由波とその自己干渉成分を含む波)の角周波数)を摂動展開した。また、以下において添字 a や b のついた諸量は2つの基本波の成分、添字 c のついた諸量は2つの自由波の相互干渉による成分を表している。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \alpha\phi_{a1} + \beta\phi_{b1} + \alpha^2\phi_{a2} + \alpha\beta\phi_{c1} + \beta^2\phi_{b2} + \alpha^3\phi_{a3} + \alpha^2\beta\phi_{c2} + \alpha\beta^2\phi_{c3} + \beta^3\phi_{b3} \\ \eta &= \alpha\eta_{a1} + \beta\eta_{b1} + \alpha^2\eta_{a2} + \alpha\beta\eta_{c1} + \beta^2\eta_{b2} + \alpha^3\eta_{a3} + \alpha^2\beta\eta_{c2} + \alpha\beta^2\eta_{c3} + \beta^3\eta_{b3} \\ \sigma_A &= \sigma_{A,0} + \alpha\sigma_{A,a1} + \beta\sigma_{A,b1} + \alpha^2\sigma_{A,a2} + \alpha\beta\sigma_{A,c1} + \beta^2\sigma_{A,b2} \\ \sigma_B &= \sigma_{B,0} + \alpha\sigma_{B,a1} + \beta\sigma_{B,b1} + \alpha^2\sigma_{B,a2} + \alpha\beta\sigma_{B,c1} + \beta^2\sigma_{B,b2} \\ R &= R_0 + \alpha R_{a1} + \beta R_{b1} + \alpha^2 R_{a2} + \alpha\beta R_{c1} + \beta^2 R_{b2} + \alpha^3 R_{a3} + \alpha^2\beta R_{c2} + \alpha\beta^2 R_{c3} + \beta^3 R_{b3} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ϕ_{a1} や η_{a1} などは次のようである。なお、次式中において $\theta_a = k_a x - \sigma_A t + \delta_a$ 、 $\theta_b = k_b x - \sigma_B t + \delta_b$ 、 $s = z + h$ であり、 k 、 σ および δ はそれぞれ波数、角周波数および初期位相角である。

¹正会員 名古屋大学助手 工学部土木工学科 (464-01 名古屋市千種区不老町)

²正会員 名古屋大学教授 工学部土木工学科

³正会員 NTT 東海支社 津支店

⁴学生員 名古屋大学大学院工学研究科

$$\left. \begin{aligned}
\phi_{a1} &= B_{a1} \cosh k_a s \sin \theta_a \\
\phi_{a2} &= B_{a2} \cosh 2k_a s \sin 2\theta_a \\
\phi_{a3} &= B_{a3} \cosh 3k_a s \sin 3\theta_a + B_{a4} \cosh k_a s \sin \theta_a \\
\phi_{b1} &= B_{b1} \cosh k_b s \sin \theta_b \\
\phi_{b2} &= B_{b2} \cosh 2k_b s \sin 2\theta_b \\
\phi_{b3} &= B_{b3} \cosh 3k_b s \sin 3\theta_b + B_{b4} \cosh k_b s \sin \theta_b \\
\phi_{c1} &= B_{c1} \cosh(k_a + k_b)s \sin(\theta_a + \theta_b) \\
&\quad + B_{c2} \cosh(k_a - k_b)s \sin(\theta_a - \theta_b) \\
\phi_{c2} &= B_{c3} \cosh(2k_a + k_b)s \sin(2\theta_a + \theta_b) \\
&\quad + B_{c4} \cosh(2k_a - k_b)s \sin(2\theta_a - \theta_b) \\
&\quad + B_{c5} \cosh k_b s \sin \theta_b \\
\phi_{c3} &= B_{c6} \cosh(2k_b + k_a)s \sin(2\theta_b + \theta_a) \\
&\quad + B_{c7} \cosh(2k_b - k_a)s \sin(2\theta_b - \theta_a) \\
&\quad + B_{c8} \cosh k_a s \sin \theta_a
\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned}
\eta_{a1} &= A_{a1} \cos \theta_a \\
\eta_{a2} &= A_{a2} \cos 2\theta_a \\
\eta_{a3} &= A_{a3} \cos 3\theta_a \\
\eta_{b1} &= A_{b1} \cos \theta_b \\
\eta_{b2} &= A_{b2} \cos 2\theta_b \\
\eta_{b3} &= A_{b3} \cos 3\theta_b \\
\eta_{c1} &= A_{c1} \cos(\theta_a + \theta_b) \\
&\quad + A_{c2} \cos(\theta_a - \theta_b) \\
\eta_{c2} &= A_{c3} \cos(2\theta_a + \theta_b) \\
&\quad + A_{c4} \cos(2\theta_a - \theta_b) \\
\eta_{c3} &= A_{c6} \cos(2\theta_b + \theta_a) \\
&\quad + A_{c7} \cos(2\theta_b - \theta_a)
\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A_{a1} と A_{b1} はともに 1 であり, B_{a1} , A_{a2} や $\sigma_{A,a1}$ などは以下のような $k_a h$ や $k_b h$ などの関数になる. なお, 下式において, $K_{ij} = ik_a + jk_b$, $K'_{ij} = ik_a - jk_b$, $C_{ij} = \cosh K_{ij}h$, $C'_{ij} = \cosh K'_{ij}h$, $S_{ij} = \sinh K_{ij}h$, $S'_{ij} = \sinh K'_{ij}h$, $T_{ij} = \tanh K_{ij}h$, $T'_{ij} = \tanh K'_{ij}h$, $q_a = \coth k_a h$, $q_b = \coth k_b h$, $F_{ij} = i\sigma_A + j\sigma_B$, $F'_{ij} = i\sigma_A - j\sigma_B$ を使用する.

$$\left. \begin{aligned}
B_{a1} &= A_{a1} F_{10} / K_{10} S_{10} \\
B_{a2} &= 3A_{a1}^2 F_{10} (q_a^4 - 1) / 8C_{20} \\
B_{a3} &= A_{a1}^3 F_{10} K_{10} (q_a^2 + 3)(9q_a^5 - 22q_a^3 + 13q_a) / 64C_{30} \\
B_{a4} &= -A_{a1}^3 F_{10} K_{10} (3q_a^5 + 8q_a^3 - 9q_a) / 16C_{10} \\
B_{b1} &= A_{b1} F_{01} / K_{01} S_{01} \\
B_{b2} &= 3A_{b1}^2 F_{01} (q_b^4 - 1) / 8C_{02} \\
B_{b3} &= A_{b1}^3 F_{01} K_{01} (q_b^2 + 3)(9q_b^5 - 22q_b^3 + 13q_b) / 64C_{03} \\
B_{b4} &= -A_{b1}^3 F_{01} K_{01} (3q_b^5 + 8q_b^3 - 9q_b) / 16C_{01} \\
B_{c1} &= (F_{11} N_{c1} - gM_{c1}) / (F_{11}^2 - gK_{11} T_{11}) C_{11} \\
B_{c2} &= (F'_{11} N_{c2} - gM_{c2}) / (F_{11}^2 - gK'_{11} T'_{11}) C'_{11} \\
B_{c3} &= (F_{21} N_{c3} - gM_{c3}) / (F_{21}^2 - gK_{21} T_{21}) C_{21} \\
B_{c4} &= (F'_{21} N_{c4} - gM_{c4}) / (F_{21}^2 - gK'_{21} T'_{21}) C'_{21} \\
B_{c5} &= (F_{01} N_{c5} + gM_{c5}) / 2F_{01}^2 C_{01} \\
B_{c6} &= (F_{12} N_{c6} - gM_{c6}) / (F_{12}^2 - gK_{12} T_{12}) C_{12} \\
B_{c7} &= -(F'_{12} N_{c7} + gM_{c7}) / (F_{12}^2 - gK'_{12} T'_{12}) C'_{12} \\
B_{c8} &= (F_{10} N_{c8} + gM_{c8}) / 2F_{10}^2 C_{10}
\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{A,0} &= \sqrt{gK_{10} T_{10}} \\
\sigma_{A,a1} &= 0 \\
\sigma_{A,a2} &= A_{a1}^2 K_{10}^2 F_{10} (9q_a^4 - 10q_a^2 + 9) / 16 \\
\sigma_{A,b1} &= 0 \\
\sigma_{A,b2} &= (K_{10} T_{10} N_{c8} - F_{10} M_{c8}) / 2F_{10} A_{a1} \\
\sigma_{A,c1} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{B,0} &= \sqrt{gK_{01} T_{01}} \\
\sigma_{B,a1} &= 0 \\
\sigma_{B,a2} &= (K_{01} T_{01} N_{c5} - F_{01} M_{c5}) / 2F_{01} A_{b1} \\
\sigma_{B,b1} &= 0 \\
\sigma_{B,b2} &= A_{b1}^2 K_{01}^2 F_{01} (9q_b^4 - 10q_b^2 + 9) / 16 \\
\sigma_{B,c1} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned}
A_{a2} &= A_{a1}^2 K_{10} (3q_a^2 - q_a) / 4 \\
A_{a3} &= 3A_{a1}^3 K_{10}^2 (9q_a^6 - 3q_a^4 + 3q_a^2 - 1) / 64 \\
A_{b2} &= A_{b1}^2 K_{01} (3q_b^2 - q_b) / 4 \\
A_{b3} &= 3A_{b1}^3 K_{01}^2 (9q_b^6 - 3q_b^4 + 3q_b^2 - 1) / 64 \\
A_{c1} &= (K_{11} T_{11} N_{c1} - F_{11} M_{c1}) / (F_{11}^2 - gK_{11} T_{11}) \\
A_{c2} &= (K'_{11} T'_{11} N_{c2} - F'_{11} M_{c2}) / (F_{11}^2 - gK'_{11} T'_{11}) \\
A_{c3} &= (K_{21} T_{21} N_{c3} - F_{21} M_{c3}) / (F_{21}^2 - gK_{21} T_{21}) \\
A_{c4} &= (K'_{21} T'_{21} N_{c4} - F'_{21} M_{c4}) / (F_{21}^2 - gK'_{21} T'_{21}) \\
A_{c6} &= (K_{12} T_{12} N_{c6} - F_{12} M_{c6}) / (F_{12}^2 - gK_{12} T_{12}) \\
A_{c7} &= (K'_{12} T'_{12} N_{c7} + F'_{12} M_{c7}) / (F_{12}^2 - gK'_{12} T'_{12})
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned}
R_0 &= 0 \\
R_{a1} &= 0 \\
R_{a2} &= A_{a1}^2 F_{10}^2 (q_a^2 - 1) / 4 \\
R_{b1} &= 0 \\
R_{b2} &= A_{b1}^2 F_{01}^2 (q_b^2 - 1) / 4 \\
R_{c1} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに, 上式中の $M_{c1} \sim M_{c8}$ や $N_{c1} \sim N_{c8}$ は以下のである.

$$\begin{aligned}
M_{c1} &= -K_{11} (K_{01} A_{a1} B_{b1} C_{01} + K_{10} A_{b1} B_{a1} C_{10}) / 2 \\
M_{c2} &= -K'_{11} (K_{01} A_{a1} B_{b1} C_{01} + K_{10} A_{b1} B_{a1} C_{10}) / 2 \\
M_{c3} &= -K_{21} (K_{01} A_{a2} B_{b1} C_{01} + K_{10} A_{c1} B_{a1} C_{10} + K_{11} A_{a1} B_{c1} C_{11} + K_{20} A_{b1} B_{a2} C_{20}) \\
M_{c4} &= -K'_{21} (K_{01} A_{a2} B_{b1} C_{01} + K_{10} A_{c2} B_{a1} C_{10} + K'_{11} A_{a1} B_{c2} C'_{11} + K_{20} A_{b1} B_{a2} C_{20}) \\
&\quad + K_{01}^2 A_{a1}^2 B_{b1} S_{01} / 4 + K_{10}^2 A_{a1} A_{b1} B_{a1} S_{10} / 2 / 2 + K_{01}^2 A_{a1}^2 B_{b1} S_{01} / 4 + K_{10}^2 A_{a1} A_{b1} B_{a1} S_{10} / 2 / 2 \\
M_{c5} &= -K_{01} (K_{10} A_{c1} B_{a1} C_{10} + K_{10} A_{c2} B_{a1} C_{10} + K_{11} A_{a1} B_{c1} C_{11} \\
&\quad - K'_{11} A_{a1} B_{c2} C'_{11} + K_{10}^2 A_{a1} A_{b1} B_{a1} S_{10} + K_{01}^2 A_{a1}^2 B_{b1} S_{01} / 2) / 2 \\
M_{c6} &= -K_{12} (K_{10} A_{b2} B_{a1} C_{10} + K_{01} A_{c1} B_{b1} C_{01} + K_{11} A_{b1} B_{c1} C_{11} \\
&\quad + K_{02} A_{a1} B_{b2} C_{02} + K_{10}^2 A_{b1}^2 B_{a1} S_{10} / 4 + K_{01}^2 A_{b1} A_{a1} B_{b1} S_{01} / 2) / 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{c7} &= K'_{12}(K_{10}A_{b2}B_{a1}C_{10} + K_{01}A_{c2}B_{b1}C_{01} + K'_{11}A_{b1}B_{c2}C'_{11} \\
&\quad + K_{02}A_{a1}B_{b2}C_{02} + K_{10}^2A_{b1}^2B_{a1}S_{10}/4 + K_{01}^2A_{b1}A_{a1}B_{b1}S_{01}/2)/2 \\
M_{c8} &= -K_{10}(K_{01}A_{c1}B_{b1}C_{01} + K_{01}A_{c2}B_{b1}C_{01} + K_{11}A_{b1}B_{c1}C_{11} \\
&\quad - K'_{11}A_{b1}B_{c2}C'_{11} + K_{01}^2A_{b1}A_{a1}B_{b1}S_{01} + K_{10}^2A_{b1}^2B_{a1}S_{10}/2)/2 \\
N_{c1} &= (K_{10}K_{01}B_{a1}B_{b1}C'_{11} - F_{01}K_{01}A_{a1}B_{b1}S_{01} - F_{10}K_{10}A_{b1}B_{a1}S_{10})/2 \\
N_{c2} &= (K_{10}K_{01}B_{a1}B_{b1}C_{11} - F_{01}K_{01}A_{a1}B_{b1}S_{01} - F_{10}K_{10}A_{b1}B_{a1}S_{10})/2 \\
N_{c3} &= (2K_{10}K_{01}B_{a2}B_{b1}C'_{21} + K_{11}K_{10}B_{c1}B_{a1}C_{01} - F_{01}K_{01}A_{a2}B_{b1}S_{01} - F_{10}K_{10}A_{c1}B_{a1}S_{10} - 4F_{10}K_{10}A_{b1}B_{a2}S_{20} \\
&\quad - F_{11}K_{11}A_{a1}B_{c1}S_{11} + K'_{11}K_{10}K_{01}A_{a1}B_{a1}B_{b1}S'_{11}/2 - F_{01}K_{01}^2A_{a1}^2B_{b1}C_{01}/4 - F_{10}K_{10}^2A_{a1}A_{b1}B_{a1}C_{10}/2)/2 \\
N_{c4} &= (2K_{10}K_{01}B_{a2}B_{b1}C_{21} + K'_{11}K_{10}B_{c2}B_{a1}C_{01} - F_{01}K_{01}A_{a2}B_{b1}S_{01} - F_{10}K_{10}A_{c2}B_{a1}S_{10} - 4F_{10}K_{10}A_{b1}B_{a2}S_{20} \\
&\quad - F'_{11}K'_{11}A_{a1}B_{c2}S'_{11} + K_{11}K_{10}K_{01}A_{a1}B_{a1}B_{b1}S_{11}/2 - F_{01}K_{01}^2A_{a1}^2B_{b1}C_{01}/4 - F_{10}K_{10}^2A_{a1}A_{b1}B_{a1}C_{10}/2)/2 \\
N_{c5} &= \{K_{11}K_{10}B_{c1}B_{a1}C_{21} + K'_{11}K_{10}B_{c2}B_{a1}C'_{21} - F_{10}K_{10}A_{c1}B_{a1}S_{10} - F_{10}K_{10}A_{c2}B_{a1}S_{10} \\
&\quad - F_{11}K_{11}A_{a1}B_{c1}S_{11} - F'_{11}K'_{11}A_{a1}B_{c2}S'_{11} + K_{10}K_{01}A_{a1}B_{a1}B_{b1}(K_{10}S_{10}C_{01} + K_{01}C_{10}S_{01}) \\
&\quad + 2K_{10}^3A_{b1}B_{a1}^2S_{10}C_{10} - F_{01}K_{01}^2A_{a1}^2B_{b1}C_{01}/2 - F_{10}K_{10}^2A_{a1}A_{b1}B_{a1}C_{10}\}/2 \\
N_{c6} &= (2K_{01}K_{10}B_{b2}B_{a1}C'_{12} + K_{11}K_{01}B_{c1}B_{b1}C_{10} - F_{10}K_{10}A_{b2}B_{a1}S_{10} - F_{01}K_{01}A_{c1}B_{b1}S_{01} - 4F_{01}K_{01}A_{a1}B_{b2}S_{02} \\
&\quad - F_{11}K_{11}A_{b1}B_{c1}S_{11} + K'_{11}K_{01}K_{10}A_{b1}B_{b1}B_{a1}S'_{11}/2 - F_{10}K_{10}^2A_{b1}^2B_{a1}C_{10}/4 - F_{01}K_{01}^2A_{b1}A_{a1}B_{b1}C_{01}/2)/2 \\
N_{c7} &= (2K_{01}K_{10}B_{b2}B_{a1}C_{12} + K'_{11}K_{01}B_{c2}B_{b1}C_{10} - F_{10}K_{10}A_{b2}B_{a1}S_{10} - F_{01}K_{01}A_{c2}B_{b1}S_{01} - 4F_{01}K_{01}A_{a1}B_{b2}S_{02} \\
&\quad - F'_{11}K'_{11}A_{b1}B_{c2}S'_{11} + K_{11}K_{01}K_{10}A_{b1}B_{b1}B_{a1}S_{11}/2 - F_{10}K_{10}^2A_{b1}^2B_{a1}C_{10}/4 - F_{01}K_{01}^2A_{b1}A_{a1}B_{b1}C_{01}/2)/2 \\
N_{c8} &= \{K_{11}K_{01}B_{c1}B_{b1}C_{12} + K'_{11}K_{01}B_{c2}B_{b1}C'_{12} - F_{01}K_{01}A_{c1}B_{b1}S_{01} - F_{01}K_{01}A_{c2}B_{b1}S_{01} \\
&\quad - F_{11}K_{11}A_{b1}B_{c1}S_{11} - F'_{11}K'_{11}A_{b1}B_{c2}S'_{11} + K_{01}K_{10}A_{b1}B_{b1}B_{a1}(K_{01}S_{01}C_{10} + K_{10}C_{01}S_{10}) \\
&\quad + 2K_{01}^3A_{a1}B_{b1}^2S_{01}C_{01} - F_{10}K_{10}^2A_{b1}^2B_{a1}C_{10}/2 - F_{01}K_{01}^2A_{b1}A_{a1}B_{b1}C_{01}\}/2
\end{aligned}$$

つぎに, Goda and Abe[1968]を参考にして高次の角周波数の変化から波数の変化への変換を行った結果, 以下の3次近似までの k_a や k_b が得られた.

$$k_a = k_{a,0} \left(1 - \frac{2\alpha^2 \sigma_{A,a2}/\sigma_{A,0} + 2\beta^2 \sigma_{A,b2}/\sigma_{A,0}}{1 + k_{a,0}h(\coth k_{a,0}h - \tanh k_{a,0}h)} \right), \quad k_b = k_{b,0} \left(1 - \frac{2\alpha^2 \sigma_{B,a2}/\sigma_{B,0} + 2\beta^2 \sigma_{B,b2}/\sigma_{B,0}}{1 + k_{b,0}h(\coth k_{b,0}h - \tanh k_{b,0}h)} \right) \quad (10)$$

ここに, $k_{a,0}$ と $k_{b,0}$ は, それぞれ $\sigma_A^2 = gk_{a,0} \tanh k_{a,0}h$ と $\sigma_B^2 = gk_{b,0} \tanh k_{b,0}h$ を満足する1次の波数である.

さて, 二成分合成波の場合, 2つの自由波が共鳴干渉条件 $(2\sigma_A - \sigma_B)^2 = g(2k_a - k_b) \tanh(2k_a - k_b)h$ や $(2\sigma_B - \sigma_A)^2 = g(2k_b - k_a) \tanh(2k_b - k_a)h$ を満足するときには, 本理論解中の B_{c4} や A_{c4} , および B_{c7} や A_{c7} の分母が0になる. このような場合に対して, Longuet-Higgins[1962]を参考にして, 以下のように解を修正した.

- $(2\sigma_A - \sigma_B)^2 = g(2k_a - k_b) \tanh(2k_a - k_b)h$ が満足される場合

$$\left. \begin{aligned}
[\phi_{c2} \text{の第2項}] &= tB'_{c4} \cosh(2k_a - k_b)s \cos(2\theta_a - \theta_b) \\
[\eta_{c2} \text{の第2項}] &= tA'_{c4} \sin(2\theta_a - \theta_b) + A''_{c4} \cos(2\theta_a - \theta_b)
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
B'_{c4} &= (gM_{c4} - F'_{21}N_{c4})/2F'_{21}C'_{21} \\
A'_{c4} &= (F'_{21}N_{c4} - gM_{c4})/2gF'_{21} \\
A''_{c4} &= -(F'_{21}N_{c4} + gM_{c4})/2g
\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

- $(2\sigma_B - \sigma_A)^2 = g(2k_b - k_a) \tanh(2k_b - k_a)h$ が満足される場合

$$\left. \begin{aligned}
[\phi_{c3} \text{の第2項}] &= tB'_{c7} \cosh(2k_b - k_a)s \cos(2\theta_b - \theta_a) \\
[\eta_{c3} \text{の第2項}] &= tA'_{c7} \sin(2\theta_b - \theta_a) + A''_{c7} \cos(2\theta_b - \theta_a)
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned}
B'_{c7} &= -(gM_{c7} + F'_{12}N_{c7})/2F'_{12}C'_{12} \\
A'_{c7} &= (F'_{12}N_{c7} + gM_{c7})/2gF'_{12} \\
A''_{c7} &= (F'_{12}N_{c7} - gM_{c7})/2g
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. 水理実験

水理実験を名古屋大学工学部土木工学科の鉛直2次元造波水槽で行った. 静水深 h を30cmに固定して実験を行い, 二成分合成波の内の1つの基本波(以下 wave1 と称す)を $h/gT_1^2 = 0.02, 0.06, 0.09$ (T_1 は wave1 の周期), $H_1/gT_1^2 = 0.002 \sim 0.01$ (H_1 は wave1 の波高)の範囲で変化させた合計9種類とし, もう一方の基本波(wave2)の周期 T_2 と波高 H_2 を, それぞれ T_1 の0.5と0.9倍程度, H_1 の0.5, 1.0, 1.5倍程度になるようにした合計42種類の二成分合成波を対象にした. さらに, wave1 のみや wave2 のみの実験も行っている. 実験では, 水槽のほぼ中央辺りの水面の時間変動を40cmと60cmの間隔で設置した3本の電気容量式水位計により計測し, 同時に最も造波装置から離れた水位計の設置位置の静水面下10cm, 15cm, 25cmにおける水平と鉛直方向流速を電磁流速計で計測した. 多重反射波が混入する前の約20s間の波のデータを対象に, 20msで離散化した後, 波別解析やスペクトル解析した.

4. 結果とその考察

(1) 水位における2次や3次オーダーの最大振幅

3次理論により, 二成分合成波の1サイクル中に現れる水位の最大振幅 η_{max} に対する2次や3次オーダーのみの最大振幅の比 η_{2max}/η_{max} や η_{3max}/η_{max} を $H/g\bar{T}^2$ (H : 二成分合成波の1サイクル中の最大波高, $\bar{T}$: 二成分合成波の1サイクル中の平均周期)や $h/g\bar{T}^2$ と関連づけて図-1や図-2に2例示す. なお, 両図には, Π (合田の非線形パラメータ) = 0.03,

0.10, 0.15(岩垣[1987])を破線で, Micheの碎波限界を太実線で併記してある。図-1は $n(\equiv L_B/L_A$: L_A と L_B は二成分合成波を構成する周期の長い基本波の波長と短い基本波の波長) $=0.4$, $m(\equiv \beta/\alpha)=1.0$ であり, 図-2は $n=0.8$, $m=1.0$ である。図-1の場合には, h/gT^2 が小さくなり, H/gT^2 が大きくなるほど, η_{2max}/η_{max} や η_{3max}/η_{max} は大きくなり非線形性が増すことが認められる。この傾向は図示していないが $n=0.6$ の場合も同様であった。しかし, 2つの自由波の周期が近くなると, 図-2に代表的に示されるように $h/gT^2 \simeq 0.02 \sim 0.03$ を境として H/gT^2 の増大にともなう η_{3max}/η_{max} の特性に差が認められた。この $h/gT^2 \leq 0.02$ で H/gT^2 の増大とともに急速に η_{3max}/η_{max} が増大するのは, η_{2max}/η_{max} も増大していることから摂動法の適用限界に近くなったことによるものと理解できる。一方, $h/gT^2 \geq 0.03$ における η_{3max}/η_{max} の増大は, 図-3に示されるように h/gT_a^2 (T_a : 二成分合成波の内の周期の長い基本波の周期)の増加にともない他の高次項は無視できるくらい小さくなるのに対し $\alpha^2\beta A_{c4}$ や $\alpha\beta^2 A_{c6}$ の項は有意な大きさになることから, 相対的に水深が深くなると無視できなくなる $\alpha^2\beta A_{c4}$ や $\alpha\beta^2 A_{c6}$ の項の影響によるものであると考えられる。すなわち, n が1に近くなると, 拘束波としての $\alpha^2\beta A_{c4}$ や $\alpha\beta^2 A_{c6}$ の項が自由波の振幅 αA_{a1} や βA_{b1} と比べて無視できない大きさになり, これを考慮する理論としては3次以上のオーダーが必要になることを示唆している。

(2) 理論解中の未定パラメータの決定方法

本理論解は未定パラメータ α, β と δ_a, δ_b を含んでいるので, 実験結果と突き合わせるためにはこれらのパラメータを実験値から定める必要がある。そこで, まず実験と理論の水面波形の振幅スペクトルを使用した式(15)に定義する γ_a が最も小さくなるように α と β を決定した。つぎに, 式(16)に定義する γ_p が最も小さくなるように δ_a と δ_b を決定した。

$$\gamma_a = \sum_f (S_f(\alpha, \beta)^2 - \hat{S}_f^2)^2 \quad (15)$$

ここに, S_f や ψ_f は理論解中の周波数 f 成分の水面波形の振幅と位相角, $\hat{S}_f$ や $\hat{\psi}_f$ は実験から得られた周波数 f 成分の振幅と位相角である。

(3) 水位と流速の時間波形

図-4は, 二成分合成波の1サイクル間の水位 η , 水平方向流速 u および鉛直方向流速 w の時間波形を示した1例であり, それぞれの波形は実験で得られた1サイクル間の最大値(下付添字 $emax$)で無次元化してある。この図に示したケースは, 周期 $T_1=1.20s$, 波高 $H_1=4.0cm$ のwave1と $T_2=0.54s, H_2=4.1cm$ のwave2を合成したときの二成分合成波である。図中, ○印は実験値, 細実線は1次理論, 破線は2次理論, 太実線は3次理論を表しており, また $\bar{T}$ は二成分合成波の1サイクルあたりの平均周期である。水位や流速の時間波形の定性的な特性は, この図にも示されるように1次理論でも表現できるが, 例えば最大水位等の定量的な特性をより精度高く表現するには, 1次よりも2次や3次理論が必要になることが認められる。

さらに, 図-5に示される $T_1=0.71s, H_1=1.5cm$ のwave1と $T_2=0.64s, H_2=1.4cm$ のwave2から成る二成分合成波

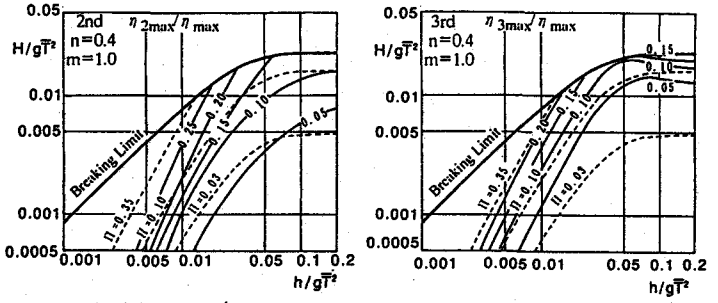


図-1 η_{2max}/η_{max} と η_{3max}/η_{max}
($n=0.4, m=1.0$ の場合)

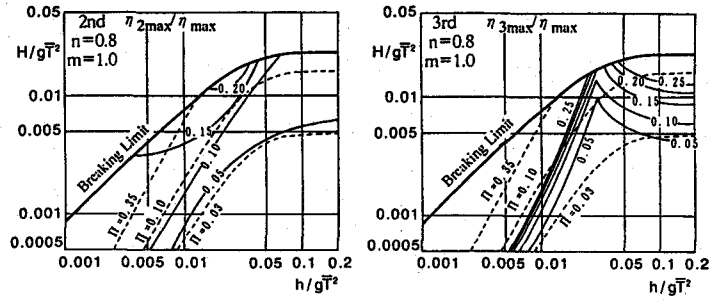
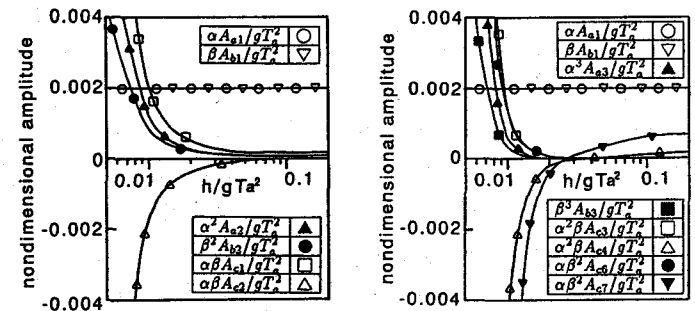


図-2 η_{2max}/η_{max} と η_{3max}/η_{max}
($n=0.8, m=1.0$ の場合)



(a) 1次と2次オーダーの成分波 (b) 1次と3次オーダーの成分波

図-3 各成分波の振幅の変化

($n=0.8, m=1.0, \alpha A_{a1}/gT_a^2=0.002$ の場合)

の場合には、実験波形の $t/\bar{T}=0.8$ と 8.8 程度に現れる最大水位を表すために 3 次理論が必要になっている。図-5 に示したケースは、後述する自由表面境界条件の満足度から決められる理論の適用範囲によると 2 次理論の適用範囲内になるが、振幅スペクトルの検討から $2\sigma_1 - \sigma_2$ や $2\sigma_2 - \sigma_1$ (σ_1 と σ_2 はそれぞれ wave1 と wave2 の角周波数) の角周波数となる拘束波成分が無視できないケースであった。そこで、(1) で述べた η_{3max}/η_{max} を調べてみると、 $n=0.8$, $m=0.9$, $h/g\bar{T}=0.06$, $H/g\bar{T}=0.007$ であったので η_{3max}/η_{max} は 0.1 程度になる。すなわちこのケースは、相対的に水深が深くなると無視できなくなる $2\sigma_1 - \sigma_2$ や $2\sigma_2 - \sigma_1$ の拘束波成分のために 3 次理論が必要になったと考えられる。さらに他の実験ケースにおいても、 $\eta_{3max}/\eta_{max} > 0.05$ の場合には図-5 と同様な傾向が認められたため、 $\eta_{3max}/\eta_{max} > 0.05$ が 3 次理論の適用範囲を決める条件の 1 つになると思われる。

(4) 理論の適用範囲

水位変動に関する理論の適用範囲を運動学的および力学的自由表面境界条件の満足度と上述した $\eta_{3max}/\eta_{max} = 0.05$ という指標から検討する。

2 つの自由表面境界条件の満足度に基づく理論の適用範囲は、次式に示される厳密な運動学的および力学的自由表面条件に 1 次、2 次、3 次理論解をそれぞれ代入したときに得られる誤差 ϵ_k と ϵ_d の 1 サイクル間の時間変動の rms 値がそれぞれ 0.02 以下になるような最小オーダーの近似理論を運動学的条件と力学的条件に対してそれぞれ求め、同じ計算条件において 2 つの境界条件から得られる理論のオーダーを比較して高次となる理論の次数を採用することにより得た。なお、 0.02 という基準値は予備計算から二成分合成波の平均周期と 1 サイクル間の最大波高をもつ深海域の単一進行波に関する 1 次理論の適用限界が $\Pi = 0.03$ に概ね一致するときの値である。

$$\epsilon_k = (\eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_z) / C' \quad (17)$$

$$\epsilon_d = \left\{ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta - R \right\} / gH' \quad (18)$$

ここに、 C' と H' は二成分合成波の 2 つの基本波の内の波形勾配の大きな波の波速と波高である。

図-6 から図-8 は、上述した 2 つの自由表面境界条件の満足度から得られた 1 次、2 次、3 次理論の適用範囲をそれぞれ ①, ②, ③ で示し、さらに水位の時間波形において 1 次、2 次、3 次理論が実験波形を最もよく表現する実験ケースを ●, ▲, ■ 印で表したものである。また $n=0.8$ となる図-7 と図-8 には $\eta_{3max}/\eta_{max} = 0.05$ となる場合を実線で併記している。

$n=0.3$ の図-6 に代表的に示されるように n が小さい場合には、数少ない実験ケースを基にした検討ではあるが、水位変動に関しては上述した自由表面境界条件の満足度から適当であるとされる次数の理論により水位波形は充分予測可能になることが認められる。一方、 $n=0.8$ となる図-7 や図-8 の場合には、自由表面条件から求めた 2 次理論の適用範囲の中に時間波形における実験と理論の比較から 3 次理論が必要になるケースが $h/g\bar{T}^2 = 0.02$ (同図 (a)) と 0.07 (同図 (a) と (b)) に存在している。この同図 (a) の $h/g\bar{T}^2 = 0.02$ の場合は、2 次理論と 3 次理論の適用範囲の遷移的な領域であると理解できるが、 $h/g\bar{T}^2 = 0.07$ の場合は、前述したように 3 次理論以上において考慮される $2\sigma_1 - \sigma_2$ や $2\sigma_2 - \sigma_1$ の角周波数になる

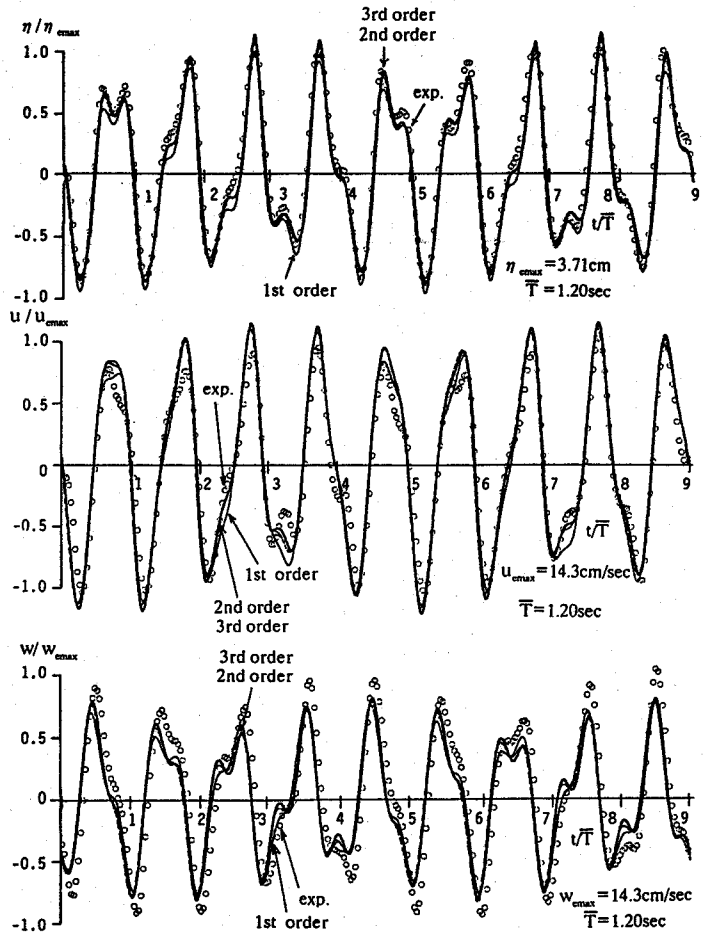


図-4 η , u , w の時間波形
(wave1 : $T_1 = 1.20s$, $H_1 = 4.0cm$)
(wave2 : $T_2 = 0.54s$, $H_2 = 4.1cm$)

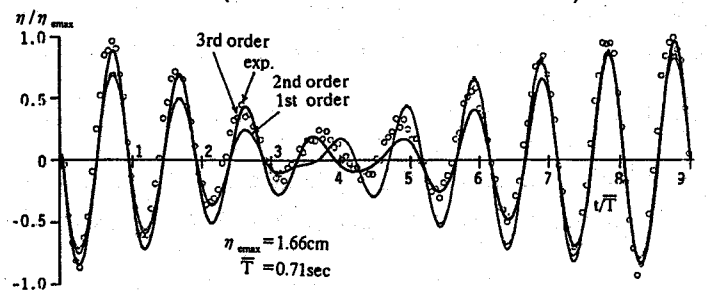


図-5 η の時間波形
(wave1 : $T_1 = 0.71s$, $H_1 = 1.5cm$)
(wave2 : $T_2 = 0.64s$, $H_2 = 1.4cm$)

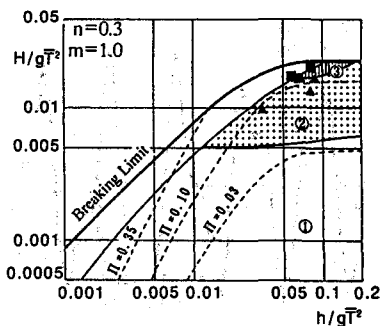


図-6 理論の適用範囲
($n=0.3$, $m=1.0$ の場合)

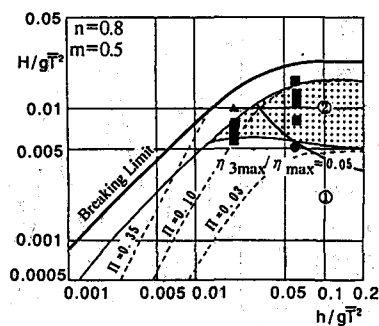


図-7 理論の適用範囲
($n=0.8$, $m=0.5$ の場合)

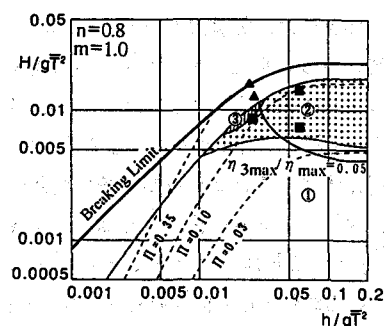


図-8 理論の適用範囲
($n=0.8$, $m=1.0$ の場合)

拘束波の影響により自由表面境界条件から得られる2次理論の適用範囲の中に3次理論が必要になるケースが現れている。この2次理論の適用範囲の中に現れる3次理論の必要なケースも、 $2\sigma_1 - \sigma_2$ や $2\sigma_2 - \sigma_1$ の角周波数になる拘束波の影響を考慮した $\eta_{3max}/\eta_{max} \geq 0.05$ (図中 $\eta_{3max}/\eta_{max} = 0.05$ よりも上の領域) では3次理論が必要になるという条件を加えることにより3次理論が必要になることが表現できる。すなわち、3次理論の適用範囲を示すためには、 n が0.8のように1に近くなると、自由表面境界条件の満足度の他に $\eta_{3max}/\eta_{max} \geq 0.05$ という条件を考慮する必要があることが指摘できよう。

(5) 共鳴干渉条件を満足する場合の水位の時間波形

図-9 は、前述した共鳴干渉条件をほぼ満足する $T_1 = 0.60s$, $H_1 = 1.6cm$ の wave1 と $T_2 = 0.54s$, $H_2 = 2.5cm$ の wave2 を合成させた場合の造波板から $x/gT^2 = 3.9$ 離れた位置における水位の時間波形を示したものである。この図に示した理論波形は式(11)から(14)に示される共鳴干渉波成分を考慮したものである。このケースの場合、共鳴干渉条件をほぼ満足するので $2\sigma_1 - \sigma_2$ や $2\sigma_2 - \sigma_1$ の角周波数になる成分波がかなり大きくなり、共鳴干渉波を考慮しない3次理論では最大波高さえも実験値に合わせることができなかったが、共鳴干渉波成分を考慮することにより実験波形をよく再現できるようになった。しかし、共鳴干渉波を考慮した場合の本理論はエネルギー保存の面で問題点が残されている。

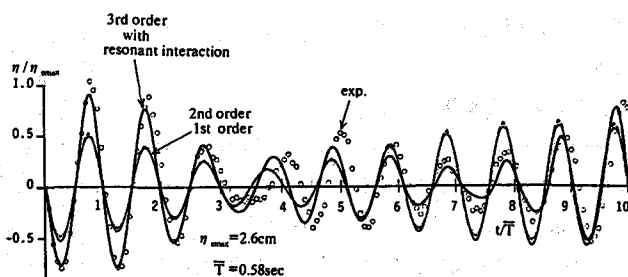


図-9 共鳴干渉条件をほぼ満足する場合の η の時間波形

5. おわりに

本研究で得られた主要な結論は以下のようにまとめられる。

- (1) 一様水深域における二成分合成波の3次近似理論を周波数の変化を考慮してストークス展開に基づいて新たに誘導した。
- (2) 水深波長比 h/gT^2 が小さく、波形勾配 H/gT^2 が大きな場合ほど非線形干渉にともなう拘束波成分が増大する。さらに、二成分合成波の2つの基本波の波長比 n が大きくなるほど拘束波成分は増大する。
- (3) n が0.8のように1に近い場合に $h/gT^2 \geq 0.03$ と相対的に水深が深くなると、多くの拘束波成分は微量になるが、3次以上の理論で考慮できる $2\sigma_1 - \sigma_2$ や $2\sigma_2 - \sigma_1$ の角周波数になる拘束波の影響が無視できなくなる。
- (4) 水位や流速の時間波形における実験と理論の比較から、本理論解の妥当性と必要性を明らかにした。また、水理実験において2つの自由波が共鳴干渉条件をほぼ満足する場合には共鳴干渉波が発生した。
- (5) 理論の適用範囲を自由表面境界条件の満足度や $2\sigma_1 - \sigma_2$ や $2\sigma_2 - \sigma_1$ の角周波数になる拘束波の影響を考慮するために導入した $\eta_{3max}/\eta_{max} \geq 0.05$ という条件により明らかにした。

参考文献

- (1) 岩垣雄一(1987): 最新海岸工学, 森北出版, 250p.
- (2) Goda, Y. and Abe, Y. (1968): Apparent Coefficient of Partial Reflection of Finite Amplitude Waves, Rep. of the Port and Harbour Research Inst., Vol.7, No.3, pp.2-58.
- (3) Longuet-Higgins, M.S. (1962): Resonant Interactions between Two Trains of Gravity Waves, J. of Fluid Mech. Vol.12, pp.321-336.