

変動水圧の地盤内伝播に関する考察

Propagation of Water Pressure Fluctuations in Aquifers

関口秀雄*・並河 努**・太田誠二***

Hideo Sekiguchi, Tutomu Namikawa and Seiji Ohta

ABSTRACT This paper deals with the propagation of water pressure fluctuations in aquifers, as a coupled stress-flow problem. A plane-strain formulation in terms of the method of finite elements is made, with due allowance for the compressibility of pore fluid. Closed-form solutions under simplified situations are given also to focus the importance of the drainage condition at the landward end of an aquifer. The predicted performances using those analytical means are shown to compare favourably with what were measured in the laboratory for a sandy aquifer subject to water pressure oscillations from 1.5 s to 205 s.

Keywords: aquifer; FEM; oscillatory pressure; phase lag

1. はじめに

潮汐や波浪に起因する変動水圧が地盤内を伝播する現象は、物理的に興味深いだけではなく、防災工学上からも重要である。臨海沖積低地に位置する河川堤防を例にとってみよう（図-1）。沖積粘土層の下位には通常、洪積砂礫層などの帯水層が分布しているが、それが海域に接続している場合は特に要注意である。なぜならば、潮位変動や高潮による変動水圧が帯水層中を伝播し、揚圧力として堤防法先の不安定化をもたらすおそれがあるからである。

波浪による変動水圧が問題となる状況も少なくない。混成式防波堤の安定性を念頭において描いたものが図-2である。捨石マウンドの港外側法先の安定にとっては、変動水圧による海底地盤の液状化の可能性は深刻である。また、ケーソンの滑動に対する安定性を論じるには、捨石マウンド内を伝播し、ケーソン底面に作用する変動水圧（揚圧力）の評価が欠かせない。慣用設計では図示したような三角形分布を採用しているが、このことは必ずしも自明のことではない。

本報文は、上記のように多岐にわたる変動水圧の伝播現象を統一的に取扱うための Framework構築を目指したものである。

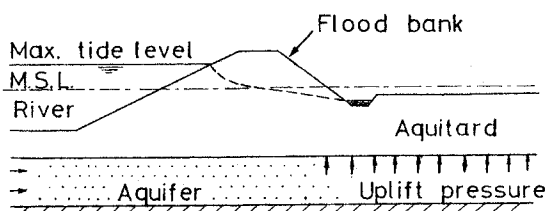


図-1 潮位変動による変動水圧の帯水層内伝播

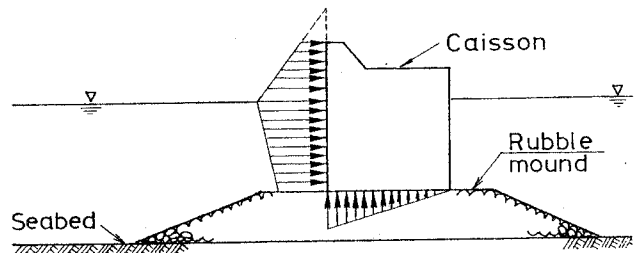


図-2 混成堤の安定性に及ぼす変動水圧の影響

2. 多次元応力-浸透連成解析の基礎

変動水圧の伝播現象は実際には、土の構造骨格と間隙流体の力学的相互作用の問題である。慣性抵抗が無視できるような状況では、応力-浸透連成問題といってもよい。その解析を行う際には、場の方程式として釣合方程式と間隙水の連続方程式（貯留方程式）が基礎となる。

本報文では、間隙水が微量な気泡を含み、その圧縮性が無視できないような状況を考える。釣合方程式の表現はこの場合にも、通常のものとはかわらない。注意を要するのは連続式の表現である。

間隙水の圧縮性を考慮すると、連続式は次のようになる。

$$\partial v / \partial t - n\beta \cdot \partial p_w / \partial t = - (k / \gamma_w) \nabla^2 p_w \quad (1)$$

* 正会員 京都大学工学部土木工学教室 (606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 (株)竹中工務店

*** 電源開発(株)

ここに、 v は土の構造骨格の体積ひずみ、 p_w は間隙水圧、 n は間隙率、 β^* は間隙水のマクロな意味の体積圧縮係数、 k は透水係数、 γ_w は間隙水の単位体積重量である。

飽和度 S_r の値が100 %に近い場合、間隙水のマクロな意味の体積圧縮係数 β^* は次のように表すことができる^{1), 2)}。

$$\beta^* = \beta + (1 - S_r)/(p_w)_{abs} = \beta + (1 - S_r)/(p_w + p_{atm}) . \quad (2)$$

ここに、 β は純水の体積圧縮係数、 $(p_w)_{abs}$ は間隙水圧の絶対圧表示、 p_{atm} は大気圧である。

後出の平面ひずみ有限要素解析では、釣合式と連続方程式の弱形式を求め、増分法による解析³⁾を行っている。同支配方程式を行列表示すると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & H \cdot \Delta t - I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u(j) \\ p_w(j) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta Q(j) + K_{12} \cdot p_w(j-1) \\ -I \cdot p_w(j-1) \end{Bmatrix} . \quad (3)$$

ここに、 Δt は時間増分、 $\Delta u(j)$ と $p_w(j)$ はそれぞれ、 j 番目の時間ステップにおける未知の節点変位増分と要素間隙水圧を表す。同時間ステップにおける外力増分が $\Delta Q(j)$ である。

間隙水の圧縮性の影響は行列 I として現れる。ちなみに、 $\beta^* = 0$ の場合が間隙水の圧縮性を無視した場合に相当するが、この場合には行列 I はゼロ行列になる。行列 H は、通常の透水行列である。土の構造骨格の構成関係は、クリープなどの時間依存性を無視すると、行列 K_{11} の表現の中に集約される。

3. 変動水圧の一次元伝播方程式と解の特性

変動水圧を受ける地盤の状況を極めて単純化すると、変動水圧の一次元伝播方程式を導くことができる。土質パラメータが定数の場合、"closed-form" の解を得ることができるので、問題の見通しをよくするには有用である。

(a) 変動水圧の一次元伝播方程式の誘導

地盤の変形は一次元的に生じると仮定する（図-3 参照）。この状況下では、土の構造骨格の応力-ひずみ関係を次のように表してよい。

$$dv/dt = m_v \cdot d\sigma'/dt . \quad (4)$$

ここに、 m_v は構造骨格の体積圧縮係数である。上式を式(1)に代入し、全応力が空間的に一定であると仮定すると、次のようになる。

$$\partial p_w / \partial t = C \cdot \partial^2 p_w / \partial x^2 + B^* \cdot df(t)/dt . \quad (5)$$

ここに、

$$C = k / [\gamma_w \cdot (m_v + n\beta^*)] \quad (6)$$

$$B^* = 1 / (1 + n\beta^*/m_v) . \quad (7)$$

式(5)中の関数 $f(t)$ は、地盤と外部水域の境界面に作用する水圧変動を表す既知関数である。

ここで、次のような変数変換を行う。

$$P(x, t) = p_w(x, t) - B^* \cdot f(t) . \quad (8)$$

その結果、式(5)は次に示すような熱伝導型偏微分方程式に帰着することがわかる。

$$\partial P / \partial t = C \cdot \partial^2 P / \partial x^2 . \quad (9)$$

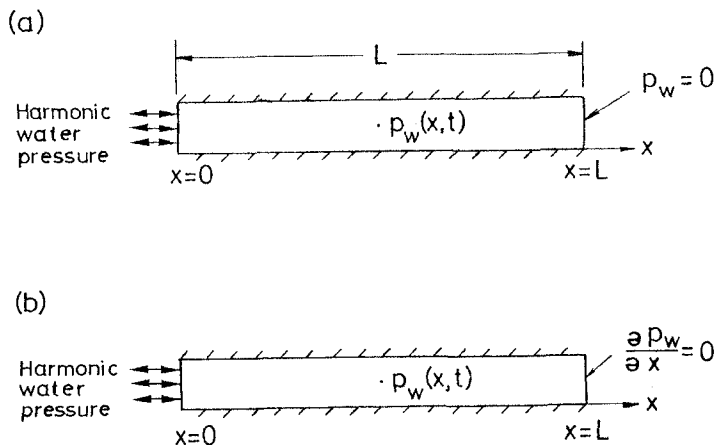


図-3 調和水圧変動を受ける一次元弾性地盤モデル

(b) 調和水圧変動に対する解とその特性

図-3に示すような一次元地盤モデルを考える。その左端は、外部水域との境界面である。ここでは、次のような調和水圧変動が同境界面に作用する場合を考える。

$$P(x, t) = (1 - B^*) \cdot f(t) \text{ on } x = 0. \quad (10)$$

ただし、 $f(t) = a \cdot \sin \omega t \cdot H(t)$ である。ここに、 $H(t)$ は Heaviside のステップ関数、 a は入力調和水圧変動の振幅、 ω は円振動数である。周期 T は $2\pi/\omega$ である。

ここでは、地盤モデルの右端（内陸側）の水理学的境界条件として次に示す2ケースを想定する。

ケース A: 水圧一定の排水境界（図-3(a)参照）

ケース B: 非排水境界（図-3(b)参照）

具体的には、ケース Aにおける内陸側の境界条件は次のようになる。

$$P(x, t) = -B^* \cdot f(t) \text{ on } x = L. \quad (11)$$

他方、ケース Bにおける右端の境界条件は次のとおりである。

$$\partial P / \partial x = 0 \text{ on } x = L. \quad (12)$$

ケース Aに対する解の具体的表現

境界条件(10)と(11)のもとで、微分方程式(9)をLaplace変換⁴⁾を利用して解く。それを式(8)の関係に留意して、間隙水圧 $p_w(x, t)$ に対する解として書き直すと、次のようになる（定常解のみを示す）。

$$p_w(x, t)/a = B^* \cdot \sin \omega t + Z_1 + \overline{Z_1}. \quad (13)$$

ここに、

$$Z_1 = \frac{1}{2}i \cdot \exp(i\omega t) \cdot [B^* \cdot \sinh \zeta x(1+i) - (1-B^*) \cdot \sinh \zeta (L-x)(1+i)] / \sinh \zeta L(1+i) \quad (14)$$

である。ただし、 i は虚数単位、 $\overline{Z_1}$ は Z_1 の共役複素数である。

式(14)中のパラメータ ζ は、波数に対応する特性パラメータである。その定義は次のとおりである。

$$\zeta = [\omega / (2C)]^{1/2}. \quad (15)$$

以上に求めた解の特徴を指摘しておく。

まず $B^* = 1$ の場合（すなわち間隙水が完全飽和の状態にある場合）にも、水圧変動の位相遅れが生じることに留意したい。この特性は、以下に述べるケース Bの応答と明瞭なコントラストをなすものである。

次に、 $\zeta \rightarrow 0$ における応答に着目する。これは、水圧変動のスピードに比べて圧密が十分に早く生じる状況に対応する。若干の演算の後に次の表現を得る。

$$\lim (Z_1 + \overline{Z_1}) = (-B^* + 1 - x/L) \cdot \sin \omega t. \quad (16)$$

したがって、式(13)の関係に留意すると、 $\zeta \rightarrow 0$ における間隙水圧応答は次のようになる。

$$p_w(x, t)/a = (1 - x/L) \cdot \sin \omega t. \quad (17)$$

すなわち、この $\zeta \rightarrow 0$ という特別の場合には、変動水圧の振幅は距離 x に比例して減少することがわかる。これは、図-2に関連して述べた“変動水圧の三角形分布”を意味している。また、この場合には位相シフトはゼロである。

ケース Bに対する解の具体的表現

境界条件(10)と(12)のもとで微分方程式(9)を解き、定常解のみを具体的に示すと、次のようになる。

$$p_w(x, t)/a = B^* \cdot \sin \omega t + (1 - B^*) \cdot (Z_2 + \overline{Z_2}). \quad (18)$$

ここに、

$$Z_2 = -\frac{1}{2}i \cdot \exp(i\omega t) \cdot \cosh \zeta (L-x)(1+i) / \cosh \zeta L(1+i) \quad (19)$$

である。また、 $\overline{Z_2}$ は Z_2 の共役複素数である。

式(18)において $B^* = 1$ とおくと、 $p_w(x, t)/a = \sin \omega t$ となる。すなわち、間隙水が完全に飽和している場合には振幅減衰と位相シフトはともに生じない。ただし、この結果は、あくまで地盤モデルの内陸側の境界条件が非排水境界の場合に限られる。

間隙水が完全に飽和している場合にも、地盤モデルの内陸側の水理学的境界条件によっては振幅減衰及び位相シフトが起こり得ることは、ケース Aに対する理論解からも明かである。

4. 平面ひずみ応力-浸透連成解析とそのキャリブレーション

筆者らが開発した平面ひずみ弾・粘塑性圧密解析プログラムは、式(3)の定式化に基づくものである。以下では、八木⁵⁾による変動水圧伝播実験に照らして実施したキャリブレーションの主要な結果を報告する。

(a) 八木(1971)による変動水圧伝播実験の特徴

当実験のセットアップを図-4に示す。砂層(厚さ20cm)の両端は、真鍮製の金網を介して外部水域と連絡している。調和水圧変動の入力は、水を満たしたタンクを上下することにより水面変動を生じさせ、結果として調和水圧変動を発生させる方式である。その振幅 a は 2.2 kPa に固定されている。周期 T は、最長 205 s から最短 1.5 s までの7種類である。

特徴的なことは、帯水砂層の“内陸側”の境界 ($x = L = 389$ cm) が水圧一定の排水境界になっていることである。すなわち本地盤の状況は、3節で議論したケース A の状況に対応する。

当砂層は水中落下法で作成されている。この方法によると、微量ではあるが空気が砂粒の落下とともに連行されるために、地盤を完全に飽和させることは難しい。筆者らの経験⁶⁾によると、飽和度 $S_r = 99$ %程度になることが多い。

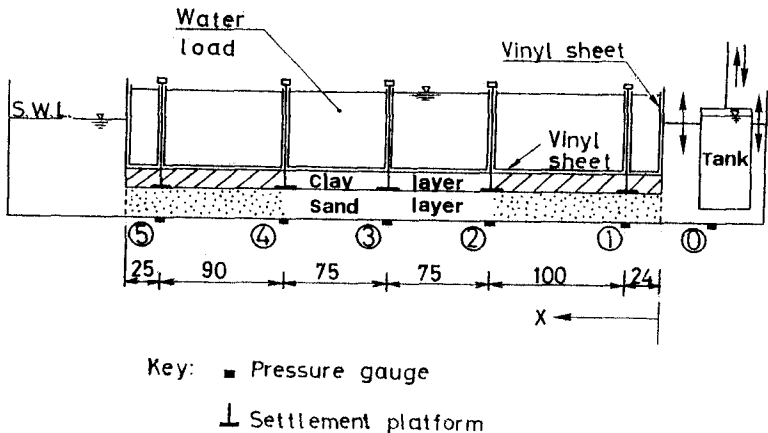


図-4 変動水圧伝播実験装置(八木, 1971)

(b) 解析条件

解析は増分法による。時間増分 Δt としては $T/40$ を採用した。設定した境界条件は図-5に示すとおりである。砂層の両側端は排水境界、それ以外は非排水境界である。地盤モデルの両側面における水平変位をゼロに拘束しているのは、実験地盤が土槽内に造成されていることによる。実験では、粘土層の上位に不透水性バッグを介して水荷重 (2 kPa) が作用している。解析では、これを表面分布鉛直荷重として取扱っている。

解析に用いた砂層に対する力学パラメータを表-1にまとめておく。有効応力表示のポアソン比 ν' の値は仮定した値である。それ以外は、八木論文中の報告による。透水係数の値が大きいのは、この砂が粗砂にあたるためである。ちなみに、有効径 D_{10} の値は 0.33 mm と報じられている。

実験結果を紹介する前に、砂層の飽和度 $S_r = 100$ % を仮定した場合の解析例を示しておく(図-6)。ここに、入力変動水圧の周期は 1.5 s である。波形としては、計測地点 1~4 に対応する変動水圧波形を示してある。同図より飽和砂層においても、先に議論した“内陸側”の排水境界の存在によって、顕著な振幅減衰と位相遅れのみられることが明かである。

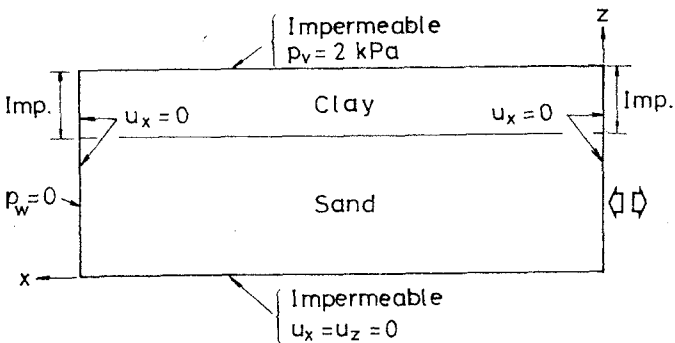


図-5 解析に採用した境界条件

表-1 解析に用いた砂の力学定数

間隙率	n	39.4%
透水係数	k	0.001 m/s
せん断剛性	$G^{(1)}$	4975 kPa
ポアソン比	ν'	0.333

$$^{(1)} G = (1 - 2\nu') / [2(1 - \nu')m_v]$$
$$m_v = 5.1 \times 10^{-5} \text{ in (kPa)}^{-1}$$

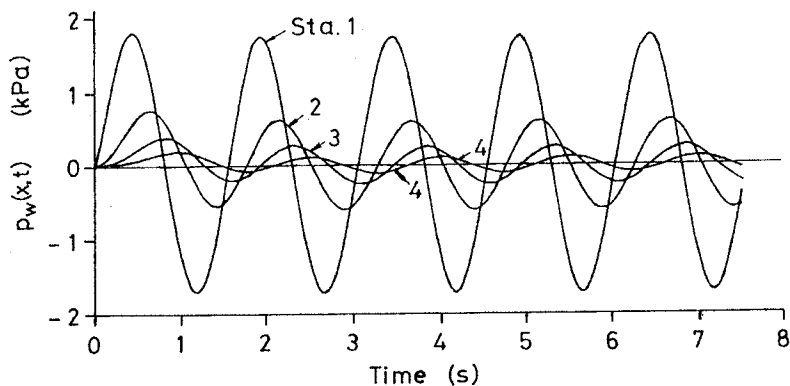


図-6 解析による変動水圧波形の例 ($S_r = 100\%$)

(c) 解析結果と実験結果の比較

結論的には、砂層の飽和度 S_r として99 %を仮定した場合の解析結果が、最もよく実験結果とフィットした。図-7は砂層の底部における変動水圧の振幅減衰特性をまとめたものである(凡例については表-2参照)。周期 $T=205$ sと 120 sでは、式(17)のパターンの成立していることがわかる。実際、位相遅れも観測されていない。

なお、解析の方では若干の位相遅れがみられるが、これは時間増分を $T/40$ (位相角にして 9°)を採用したためである(図-8)。

変動水圧周期が5 s以下になると、変動水圧の伝播パターンは上述の場合とは著しく異なる。すなわち、振幅減衰曲線は下に凸な曲線となる(図-7)。そして、その傾向は周期の減少とともに強調される。これに対応して位相遅れも顕著になる(図-8)。同一周期のもとでは、位相遅れ角が変動水圧の入力点からの距離 x に応じて増加することが明かである。

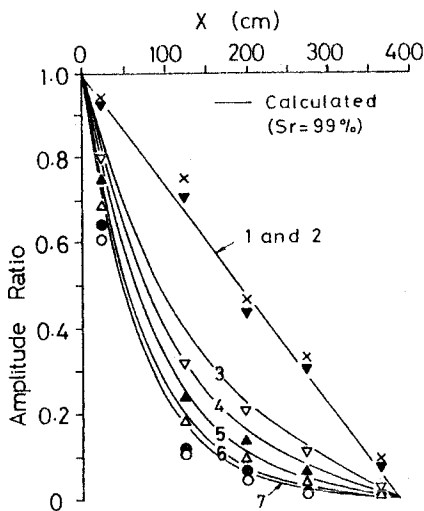


図-7 変動水圧の振幅特性

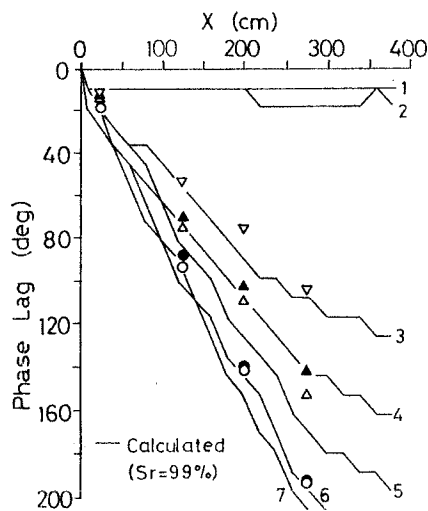


図-8 変動水圧の位相特性

表-2 解析結果と実験結果の凡例

T (s)	Anal. No.	Exp. Symbol	T (s)	Anal. No.	Exp. Symbol
205	1	x	2.4	5	△
120	2	▼	1.75	6	●
5.0	3	▽	1.5	7	○
3.35	4	▲			

(d) 応力分布に関する考察

解析結果によると、変動水圧の伝播に応じて砂層内部の応力状態はかなり複雑な変化を示す。ここでは、周期 $T=5$ s の場合を例としてとりあげる（図-9）。砂層の飽和度は上記と同様に 99 % である。図-9 (a) は、4 周期目の水圧変動終了時点の変動水圧 p_w 、水平有効応力増分及び水平全応力増分の空間波形を示している。負の残留水圧 p_w に対応して、水平有効応力の増分 $\Delta \sigma'_x$ は正になっている。

上記よりも位相が $\pi/2$ 進んだ時点の応力分布を図-9 (b) に示す。これは、入力の水圧変動 p_w が正のピークに達した時点に対応する。変動水圧（揚圧力）の分布は、いわゆる三角形分布とはかなり異なっている。また、水圧変動の作用点から $x = 200$ cm の領域では、水平有効応力の増分 $\Delta \sigma'_x$ が負になっているのは興味深い。このことは、地盤の安定性にとっては不利な方向といえる。

図-9 (a), (b) の結果によると、水平全応力増分 $\Delta \sigma_x$ は x 方向には一定となっていない。すなわち、2 節で議論した一次元水圧伝播方程式の前提は必ずしも成立しないので、その実際への適用にあたっては注意が必要である。

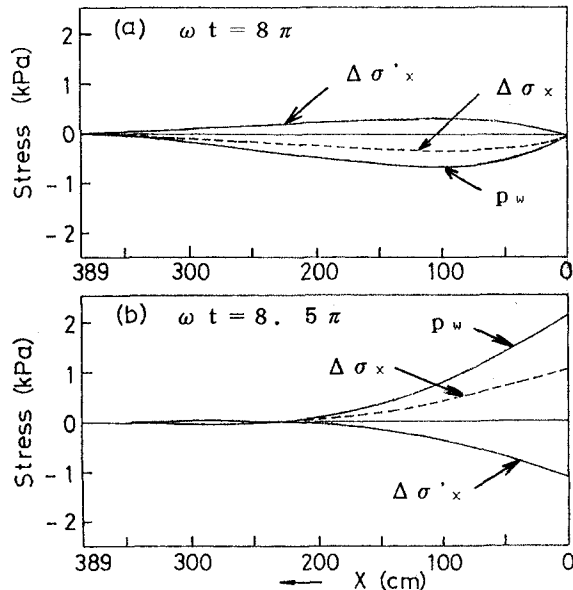


図-9 解析による応力の空間波形

5. まとめ

(1) 帯水層における変動水圧の伝播特性は、その内陸側の水理境界条件によっても様相を異にする。内陸側端部が非排水境界であるときには、帯水層が不飽和である場合に限って、水圧変動の位相遅れが生じる。一方、内陸側端部が排水境界であるときには、帯水層が完全に飽和していても水圧変動の位相シフトは生じる。

(2) 図-4 に示す帯水砂層はその内陸側境界が排水境界であるため、かなり大きな位相シフトが生じる。ただし、実測された位相遅れと振幅減衰特性を本解析で再現するには、帯水砂層の飽和度を 99 % と仮定する必要がある。当砂地盤は、「水中落下法」によって造成されており、微量の空気が砂粒の落下にともなって連行されたと考えると、上記の結果は物理的にも十分納得しうる。

参考文献

- 1) Verruijt, A. (1969). "Elastic storage of aquifers." In: Flow through Porous Media (R.J.M. de Wiest ed.), Academic Press, pp. 331-376.
- 2) Barends, F.B.J. (1980). Nonlinearity in Groundwater Flow. LGM Part 21, No. 1, Delft Soil Mechanics Laboratory.
- 3) 柴田徹・関口秀雄(1980). 「盛土基礎地盤の弾・粘塑性挙動解析と破壊予測」、土木学会論文報告集、301号、pp. 93-104.
- 4) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. (1959). Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press, Oxford, pp. 297-352.
- 5) 八木則男(1971). 「被圧帯水層における地下水伝播に関する一実験」、京都大学防災研究所年報、14号 B, pp. 643-653.
- 6) 関口秀雄・並河努(1991). 「波浪による海底地盤応答：遠心模型実験の意義と留意点」、第26回土質工学研究発表会、2分冊の2、pp. 1259-1262.