

円柱をよぎる振動流の数値解法

A numerical analysis of oscillating flow around a circular cylinder

浜中建一郎^{*}・勝岡洋一^{**}・佐藤幸雄^{***}

Ken-ichiro Hamanaka, Youichi Katsuoka and Yukio Sato

Abstract

Submerged pipe line structures have been recently proposed as a transport system. Several types are considered in this kind of structures. But, in this paper, we restrict our interest on a horizontal circular cylinder fixed by tension rigs and lifting buoyancy force in water. In order to estimate the force acting on the tension rigs under the influence of wave motion, we have to analyse the flow around the cylinder. But it seems difficult to solve this problem in purely analytical way when the flow has separations. In the present paper, a numerical method is developed to solve the oscillating flow around a cylinder with separations.

Keywords: numerical analysis, oscillating flow, circular cylinder, separation

1. はじめに

最近、海中の新しい輸送システムとしてパイプライン構造物が提案されてきている。それには、幾つかのタイプが考えられるが、ここでは、構造物の浮力と係留索によって水中に水平に係留された円柱を考える。波動場に於ける円柱及び係留索に働く力や構造物の動揺を判定するには、その周りの流れの様子を知る必要がある。今、円柱が底面及び水面から適当に離れて係留されているとすると、波動運動による円柱の周りの流れはほぼ水平振動流と考えて良い。このとき、円柱の周りに剥離が生じていない場合は解析解があるが、振動流の振幅が適当に大きくなると剥離の発生が予想され解析的な方法で解くことは困難である。このことから、本研究では、剥離を伴った円柱の周りの振動流を数値的に解析することを目的とする。

今、波が円柱に直角に進行するとし、断面2次元の流れを考える。用いる基礎方程式は渦度方程式及び流れ関数に対するポアソン方程式である。これらをひとつの座標が円柱表面を表す様円筒座標を用いた等角写像で変換する。さらに、渦度と流れ関数を回転方向にFourier級数で展開し、空間2次元の偏微分を、1次元のそれに帰着させる。このことは特に流れ関数に対するポアソン方程式を解く際、著しく計算時間を短縮させる。また、境界条件は円柱表面で流速は零、円柱から十分離れた所では流速は水平振動及び渦度は零を与える。数値計算は時間方向には前進差分、空間方向には中央差分を用いた有限差分法を用いる。

上記の方法により、円柱下流側に生ずる剥離渦及び振動流反転時に放出される渦塊が良く表現された。また、同程度のレイノルズ数を持つ定常流の可視化実験の結果と比較したところ、発生する剥離渦の規模は良く一致し、この解析方法の妥当性が確認された。圧力は、得られた流れ関数の値を用い、圧力に対するポアソン方程式を解くことにより求められる。

2. 基礎方程式と差分化

基礎方程式としてNavier-Stokesの式から出発する。今、流れを垂直2次元流とし X を水平軸、 Y を垂直方向軸とし、流れ関数を ϕ 、渦度を ω とすると、渦度方程式と流れ関数に対するポアソン方程式は

$$\omega_t = -\phi_y \omega_x + \phi_x \omega_y + \nu \Delta \omega \quad (1)$$

$$\Delta \phi = -\omega \quad (2)$$

と表される。

この (X, Y) 平面で、原点に中心を持ち、 Z 方向に伸びる円柱を考えた時、円柱の半径を R_0 として、そのまわりにある振動流を考える。流れの境界条件を有次元量で表す為に、全変量に"'"を付して表すと

*正員 北海道大学工学部土木工学科 (060 札幌市北区北13西8)

**正員 (株) 日輝

***正員 北見工業大学土木工学科

$$(i) \quad R' = R0' \text{ の時} \quad u' = v' = 0 \quad (3)$$

$$(ii) \quad R' = \infty \text{ の時} \quad v' = 0, \quad u' = \sigma' A' \sin \sigma' t', \quad \omega' = 0 \quad (4)$$

次に全ての変量を $R0', \sigma'$ を用いて無次元化すると

$$R = \frac{R'}{R0'}, \quad t = \sigma' t', \quad A = \frac{A'}{R0'}, \quad u = \frac{1}{\sigma' R0'} u', \quad v = \frac{1}{\sigma' R0'} v'$$

$$\phi = \frac{1}{\sigma' (R0')^2} \phi', \quad \omega = \frac{1}{\sigma'} \omega', \quad \nu = \frac{1}{\sigma' (R0')^2} \nu'$$

となり (3), (4) 式は

$$(i) \quad R = 1 \text{ で} \quad \phi = u = v = 0 \quad (5)$$

$$(ii) \quad R = \infty \text{ で} \quad v = 0, \quad u = A \sin t, \quad \omega = 0 \quad (6)$$

次に、以下の様な等角写像を用いた座標変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} x &= e^r \cos \theta \\ y &= e^r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (7)$$

ここで、 $r=0$ で θ 軸が円柱の表面を表す。この (r, θ) 平面に基礎方程式を変換すると

$$\left. \begin{aligned} J \omega_t + (\omega_r \phi_\theta - \phi_r \omega_\theta) - \nu (\omega_{rr} + \omega_{\theta\theta}) &= 0 \\ J \omega &= -(\phi_{rr} + \phi_{\theta\theta}) \\ J &= e^{2r} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また境界条件は

$$(i) \quad r = 0 \text{ で} \quad \phi_r = \phi_\theta = 0 \quad (9)$$

$$(ii) \quad r = \infty \text{ で} \quad \phi_r = \phi_x \frac{\partial x}{\partial r} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial r} = (A e^r \sin t) \sin \theta \quad (10)$$

さらに円柱の表面近傍では、流速は急激に変化する為、表面近傍での差分メッシュを細かくする必要がある。
ここでは

$$r = r_T \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad (11)$$

で変換されると軸で等分割に差分化する。ただし、 $b > 1$ 。この変換では $0 \leq r \leq r_T$ が $0 \leq \zeta \leq 1$ に対応し、 b の値が大きい方が境界近傍を細かく分割する。(11) 式から

$$\frac{d\zeta}{dr} = \frac{e^b - 1}{b r_T} e^{-b\zeta} \equiv \zeta_1, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} = -b \zeta_1^2 \equiv \zeta_2$$

とする。

ϕ と ω を θ 軸にそって Fourier 級数に展開すると、(8) 式で表される基礎方程式は t と r 上の偏微分方程式に帰着する。これらの方程式を差分化すると、流れ関数は Gauss の消去法により数値的に解くことができる。
流れ関数と渦度を θ 軸に沿って Fourier 級数に展開すると

$$\phi = \sum_m f_m e^{im\theta}, \quad \omega = \sum_m g_m e^{im\theta} \quad (12)$$

また

$$\phi_\theta = \phi^{(im)} = \sum_m (im) f_m e^{im\theta} \quad (13)$$

として (8) 式を表すと

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= J^{-1} \zeta_1 (\omega^{(im)} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \phi^{(im)}) \\
&\quad + J^{-1} \nu (-\omega^{(m^2)} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}) \\
-Jg_m &= -m^2 f_m + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial f_m}{\partial \zeta}
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

また流れ関数に対する境界条件は

$$(i) \quad r = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{で} \quad f_m = 0, \quad \frac{\partial f_m}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

(ii) $r = r_T, \quad \zeta = 1$ で (10) 式 及び (12) 式より f_1 の $\sin \theta$ 成分について

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = Ae^r \sin t, \quad \frac{\partial f_m}{\partial r} = 0 \quad (m \neq 1) \quad (16)$$

さらに渦度方程式に関する境界条件は

$$r = r_T \quad \text{で} \quad \omega = 0 \quad (17)$$

また円柱表面では ϕ を $\zeta = 0$ の回りで Taylor 展開して

$$\phi(\Delta \zeta) = \phi + \Delta \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}$$

ただし $\zeta = 0$ で $\phi = \phi_\zeta = 0$, さらに

$$\begin{aligned}
\omega &= -J^{-1}(\phi_{rr} + \phi_{\theta\theta}) = -J^{-1}(\zeta_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}) \\
&= -J^{-1} \zeta_1^2 (-\frac{2\phi(\Delta \zeta)}{\Delta \zeta^2})
\end{aligned} \quad (18)$$

次に (14) 式で $\Delta \zeta$ に関して中央差分、 Δt に関して前進差分をとり、上の境界条件を用いて数値的に解くことができる。

3. 圧力方程式

この節では、2 節で求めた渦度と流れ関数の値から、円柱の周りの圧力を求める。運動方程式から加速度項を消去し、2 節と同様な無次元化を行うと

$$p_{xx} + p_{yy} = 2 \{ \phi_{xx} \phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 \} \quad (19)$$

ここで $p = p' / \{ \rho' (\sigma')^2 R_0 \}$

(19) 式において、静水圧は最後に加えることとし、今動水圧だけを考える。

円柱表面上の境界条件は

$$p_n = \nu \omega_s \quad (20)$$

ただし n は円柱表面に対し法線方向を表し、 s は接線方向を表す。

計算領域外週での境界条件は、 $u = A \sin t$ であるから

$$p_x = -A \cos t \quad \text{又は} \quad p = -A \cos t \cdot x \quad (21)$$

である。(19), (20), (21) 式に対し 2 節と同様 (7) 式で表される座標変換を行う。その時、

$r_x, r_y, \theta_x, \theta_y, r_{xx}, r_{yy}, \dots$ 等は (7) 式からもとまる。さらに (11) 式の座標変換を行った後、圧力 p も (12) 式の様に θ 方向に Fourier 級数に展開する。このことにより 2 次元のポアソン方程式 (19) 式が 1 次元のそれに退化する。最後に中央差分を用いて差分化し数値計算を実行する。

4. 計算例

表 1 はここで図示する計算例に対する計算条件である。M、N は θ 方向と r 方向の格子の数で、 N_T は 1 周期の分割数で $\Delta t = 2\pi / N_T$ である。いずれも静止状態から始めて 1 周期目だけの計算を行った。Re と S はレイノルズ数とストローハル数で、

$$Re = \frac{u_m R_0}{\nu} = \frac{A}{\nu}, \quad S = \frac{u_m T}{R_0} = 2\pi A$$

ただし u_m は振動流の最大流速、 T は周期である。

RUN	ν	A	b	r_T	M	N	N_T	周期	分割	CPU	Re	S
2	.1	4	1	2.7	64	40	3200	1	8	2'04	40	25
4	.2	4	1	2.7	64	40	3200	1	8	2'04	20	25
5	.01	.2	1	2.7	64	40	3200	1	8	2'04	20	1.25

表-1 ; Computational condition

図 1 は RUN-4 に対する渦度で、図 2 はそれに対する流れ関数である。図中 (a) - (h) は 1 周期間を 8 分割して順に並べたものである。前半の (a) - (c) では振動流は左から右にながれ (d) で止まり、(e) - (g) では反転して右から左に流れ (h) で止まる。剥離による自由せん断層と剥離の流線が対応しており、さらに各々半周期毎に発生した剥離渦が振動流の静止位相時に円柱から離れ、大きな渦塊を作ることが分かる。又この場合、ストローハル数は大きく、非常にゆっくりした振動流であるので同程度のレイノルズ数を持つ定常流の可視化写真と比べたところ同程度の剥離が発生していることが確かめられた。図 3 (Run 2) は図 1 と比べストローハル数は同じでレイノルズ数を大きくした場合で、剥離規模が大きくなっていることが分かる。又図 4 (Run 5) は図 1 に対しレイノルズ数を変えずストローハル数を小さくし (否定常性を大きく) した場合で、境界層が十分発達する前に流れが反転するため剥離が発生していない。図 5 は Run 4 に対する等圧線図である。太い実線は正の動水圧、細い実線は負の動水圧を表す。図中 (a) は振動流が左から右に流れ始め、(b) では最大流速となっており、このとき圧力勾配は零でなければならない。しかし円柱の周りでは強い圧力勾配が存在している。このことを確かめるため、ほぼ計算領域の全領域の等圧線を描いたのが図 6 である。図 5 と図 6 の (a) ~ (d) は同時点のものである。これによれば、確かに (b) の位相では円柱の近傍ではまだ強い圧力勾配が残っているものの、外周の振動流中では圧力勾配は零である。また (c) の位相では外周では圧力勾配が反転しているにも関わらず、円柱の近傍ではまだ右側が高圧である。

5. 考察

前節までで述べたように、今回提案した数値解析の方法で、振動流におかれた円柱の周りの剥離を伴った流れが再現されることが確かめられた。又得られた流れの場から圧力場が同時に求められた。円柱に働く力を知るためには流体とのせん断力も必要であるが、これも流れの場が求まっているから、ただちに得られるだろう。

今回は外側の境界条件として、完全水平振動流を与えたが、波動による水粒子の垂直運動が無視し得る場合は、外側境界条件として、ポテンシャル理論による波動解による流速を与えれば良い。また、円柱で波が部分反射をする場合は、あらかじめポテンシャル流れとして、部分的反射波動場を解析的に求めておき、それによる流速を与えればよい。底面の影響が無視出来ない場合は、このままでは適用出来ないが、円柱と底面を共に表す、適当な等角写像が見つかれば出来そうである。

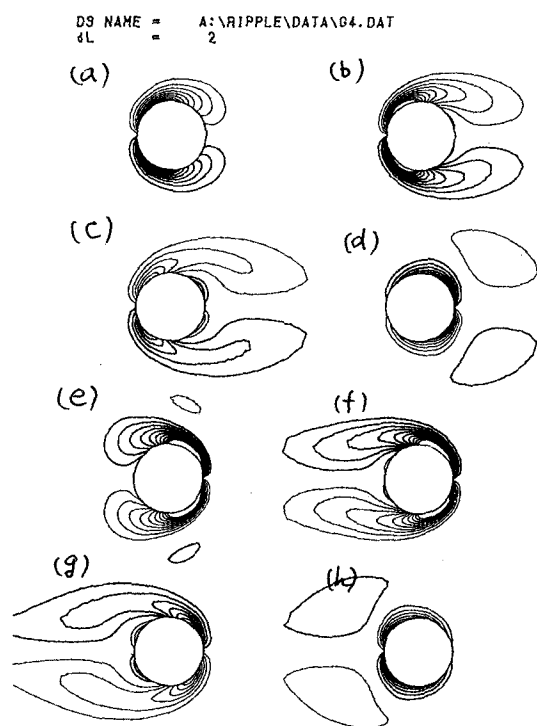


図1 渦度 ω (RUN-4) $\Delta\omega = 2$
Re = 20 , S = 25

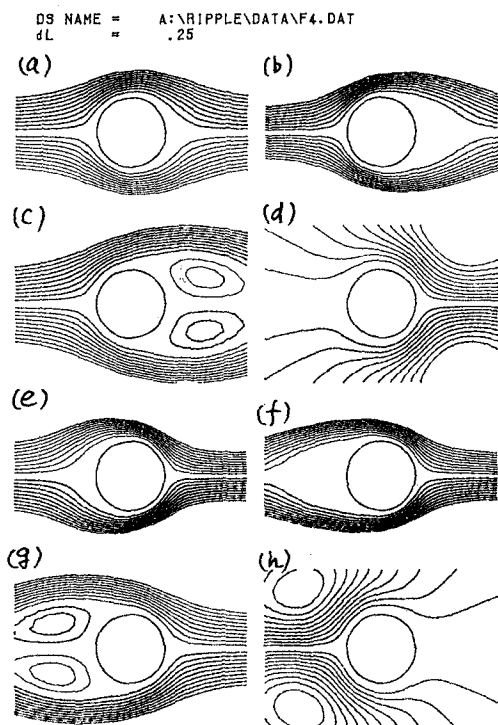


図2 流れ関数 ϕ (RUN-4) $\Delta\phi = 0.25$
Re = 20 , S = 25

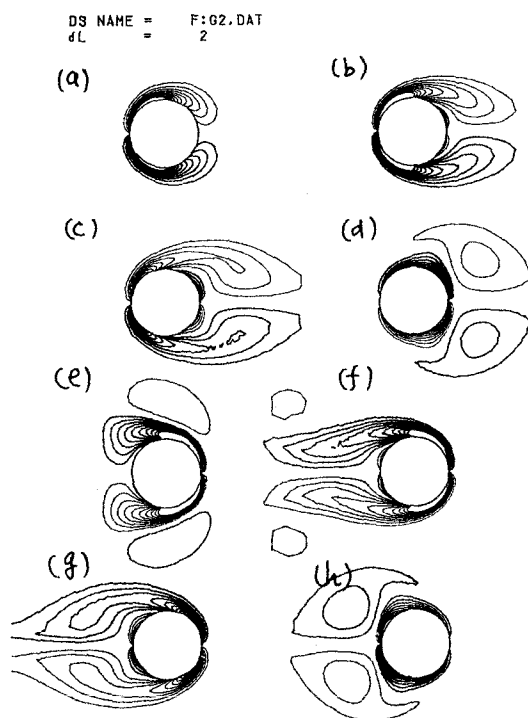


図3 渦度 ω (RUN-2) $\Delta\omega = 2$
Re = 40 , S = 25

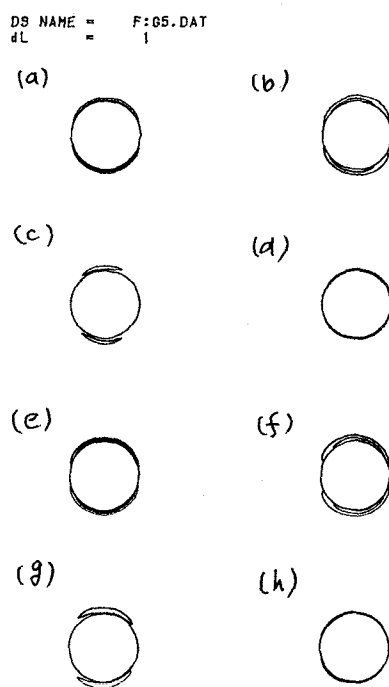


図4 渦度 ω (RUN-5) $\Delta\omega = 1$
Re = 20 , S = 1.25

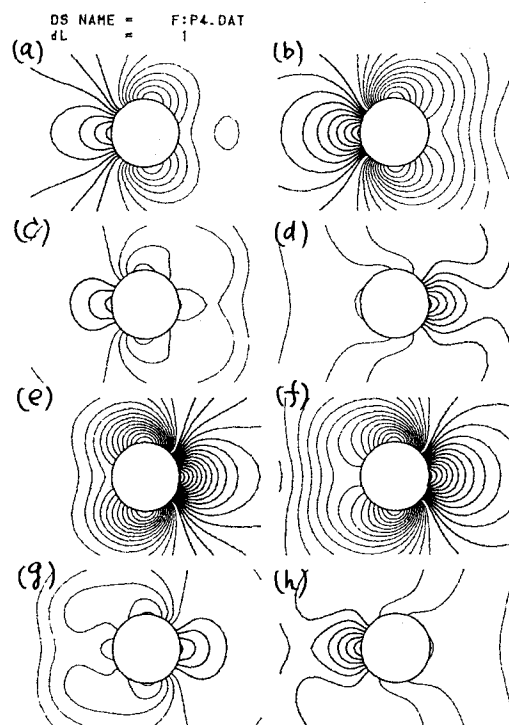


图5 等压线(RUN-4) $\Delta p = 1$
圆柱近傍

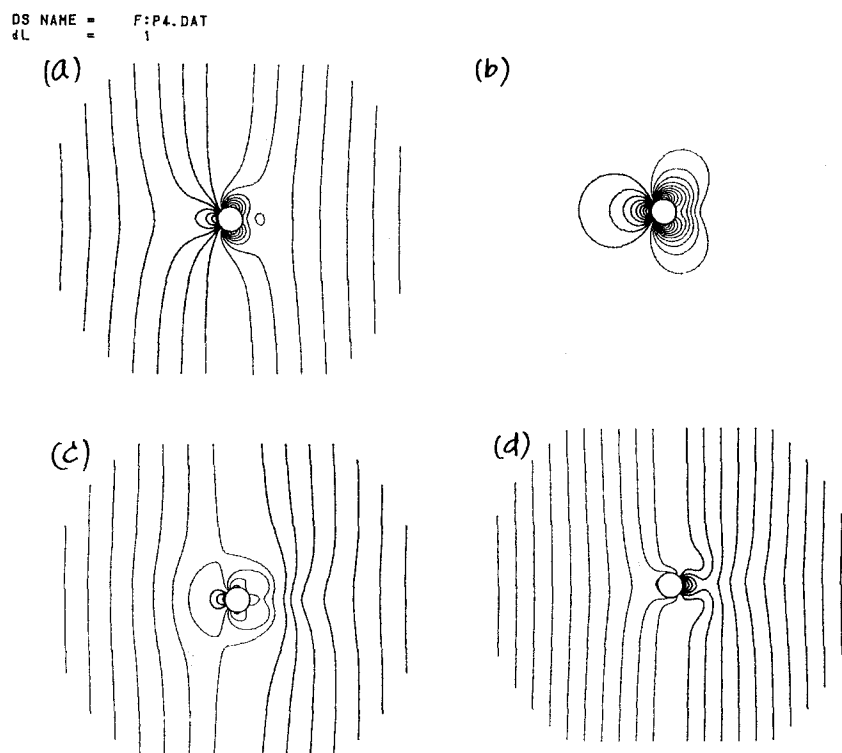


图6 等压线(RUN-4) $\Delta p = 1$
圆柱外周