

遠心力場における水面波の造波とその適用

京都大学防災研究所 正会員 関口秀雄
University of Cambridge Ryan Phillips

1. はじめに

本報文では、ドラム型遠心力载荷装置を用いた水面波実験と、それに対応する理論的検討について述べる。

本研究で用いたドラム型遠心力载荷装置の最大の特徴は、円周方向に連続的なモデル海底地盤および水面を設定できることにある。すなわち、側方境界での重複反射の影響を受けることなく、円周方向への波動伝播過程を詳しく調べ得るところに大きなメリットがある。

以下では、回転軸に垂直な平面内における二次元水面波を対象とする（図-1 参照）。

2. 回転流体における重力波の伝播理論

一定の角速度 Ω のもとで、鉛直軸(z 軸)まわりに一様回転しているドラム内の自由水面に乱れを与えると、それは水面波（重力波）として伝播する。ここでは、遠心加速度が重力加速度よりも十分に大きい状況を対象とし、回転軸に垂直な面内における水面波の円周方向への伝播問題を考える。ただし、微小振幅の定常進行波を対象とする。分散関係に及ぼすコリオリ効果の具体的な表現を得るのが、本解析の眼目である。

その詳細は文献1)に述べているので、ここでは主要な結果のみをまとめておく。

(a) 正方向に伝播する水面波の分散関係

境界 $r = b$ において半径方向の水粒子速度 $v_r = 0$ という条件を考慮すると、仮定した速度ポテンシャルは次のようになる。なお、 (r, θ) は回転ドラムに固定した極座標系である。

$$\varphi = \frac{D}{2} \cdot [(r/b)^k + (r/b)^{-k}] \cdot \sin(k\theta - \nu t) \quad (1)$$

ここに k は波数、 ν は円振動数、 D は積分定数である。ただし、ここでは周期 2π の周期性を想定しているので、波数 k は正整数となる。

他方、自由表面における線形化した境界条件は、最終的に次式のように表わすことができる。

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{r=a} - \frac{a \cdot \Omega^2}{1 - (2\Omega/\nu) \cdot A_t} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (2)$$

ここに、 a はドラムの回転中心軸から静止水面までの距離である。パラメタ A_t の定義式は次のとおりである。

$$A_t \equiv \frac{(b/a)^k - (b/a)^{-k}}{(b/a)^k + (b/a)^{-k}} \quad (3)$$

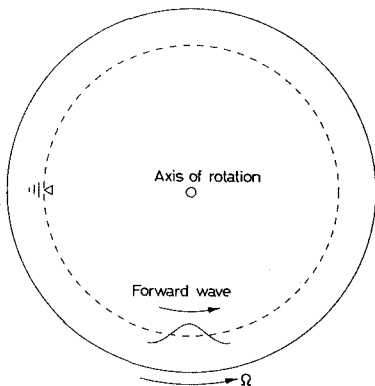


図-1 回転ドラム内の水面波の正方向への伝播

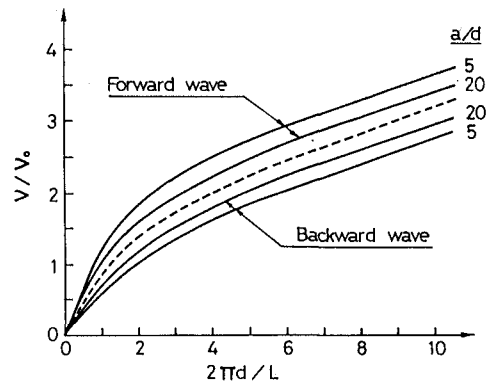


図-2 回転流体における表面波の分散関係

式 (1) の速度ポテンシャルは、斉次境界条件式 (2) を満たす必要があるので、これより次の分散方程式を得る。

$$\nu^2 - 2\Omega \cdot A_t \cdot \nu - k \cdot A_t \cdot \Omega^2 = 0 \quad (4)$$

上式は円振動数 ν の波数 k に関する二次方程式である。ここで、 ν は正実数であることを考慮すると、最終的に次式の分散関係を得る。

$$\nu = \Omega[(A_t^2 + k \cdot A_t)^{1/2} + A_t] \quad (5)$$

上式より、位相速度 $c = a \nu / k$ と波長 $L = 2\pi a / k$ との関係も直ちに求めることができる。

(b) 負方向に伝播する水面波の分散関係

議論の展開は、正方向に伝播する水面波の場合と本質的には同じである。

式 (1) と (2) に対応した速度ポテンシャルと境界条件式は、ここでは次のようになる。

$$\varphi = \frac{D}{2} \cdot [(r/b)^k + (r/b)^{-k}] \cdot \sin(k\theta + \nu t) \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{r=a} - \frac{a \cdot \Omega^2}{1 + (2\Omega/\nu) \cdot A_t} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (7)$$

これらの関係より、分散方程式として次式を得る。

$$\nu^2 + 2\Omega \cdot A_t \cdot \nu - k \cdot A_t \cdot \Omega^2 = 0 \quad (8)$$

ここで正実数 ν に対する解を求めると、次の分散関係を得る。

$$\nu = \Omega[(A_t^2 + k \cdot A_t)^{1/2} - A_t] \quad (9)$$

(c) 計算例

分散関係の具体的な計算例を図-2 に示す。ここでは、円振動数 ν を基準円振動数 $\nu_0 = (a \Omega^2 / d)^{1/2}$ で除して無次元化している。ただし、図中の破線は、コリオリ効果を全く受けていない通常流体に対する分散曲線²⁾である。この場合の基準円振動数は $\nu_0 = (g / d)^{1/2}$ である。同図より、パラメタ a / d の値が大きくなるほど、コリオリ効果の影響は小さくことがよくわかる。すなわち、動的相似則を良い近似で満足させるには、ドラム径をある程度大きくし、パラメタ a / d の値を 2.0 以上に設定する必要がある。ここに d は水深である。

図-3, 4 は、後出の Test WAVE12 に対応する計算例である。図中の破線は、静止状態で水平な自由水面をもつ通常流体に対する周知の理論曲線²⁾である。パラメタ a / d の値は Test WAVE12 では 10.6 である。これに対応して、図-3, 4 ではコリオリ効果が顕著にでており、物理的にも大変興味深い。

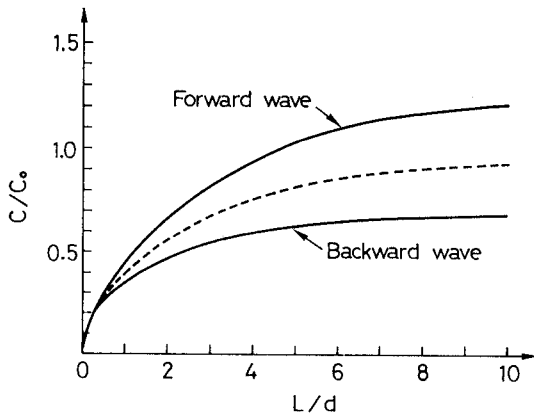


図-3 無次元化した位相速度と波長／水深比の関係（ただし、 $c_0 = (a\Omega^2 \cdot d)^{1/2}$ ）

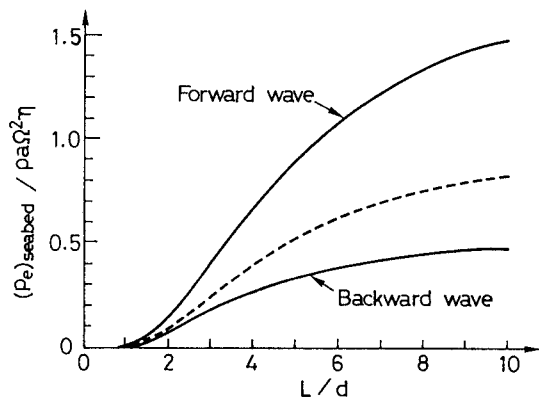


図-4 無次元化した変動水圧と波長／水深比の関係（ η ：波高）

3. フロート落下方式による非定常造波の近似理論

(a) 生成波の波高とフロート落下速度との関係

図-5を参照しながら、全幅 2λ 、質量 M のフロートが急速に水中に貫入していく際に生ずる水面波を考える。フロートの側方領域における生成波の静止水面からの波高を $\eta(x, t)$ 、平均的な水粒子速度を $\bar{v}(x, t)$ 、水深を d とすると、これらの間には次式の関係が成り立つ³⁾。

$$\eta\left(t - \frac{x}{c_0}\right) = \frac{d}{c_0} \bar{v}\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \quad (10)$$

ここに、 c_0 は基準長波の伝播速度である。

ここで対象としている回転流体においては、2節の解析からもわかるように、コリオリ効果によって正方向に伝播する波の伝播速度のほうが、負方向に伝播する波の伝播速度より大きくなる特性がある。したがって、厳密には波速 c_0 の値を伝播方向の正負に応じて使い分けるべきであるが、フロートの運動解析に重点を置く限りにおいては、正負二方向の寄与の平均をとるという意味からして、波速 c_0 として基準長波に対する次式を援用して差し支えない。

$$c_0 = (a\Omega^2 \cdot d)^{1/2} = (Ng \cdot d)^{1/2} \quad (11)$$

断面 $x = \lambda$ における水量の連続条件を考慮すると、フロート側端における生成波の波高は、フロートの水中落下速度 $dh/dt(t)$ と次のような関係にあることがわかる。

$$\eta|_{x=\lambda} = \frac{\lambda}{c_0} \frac{dh}{dt} \quad (12)$$

ここに、 $h(t)$ は時間 t におけるフロート底面の浸水深さを表わしている。

(b) 造波体としてのフロートの運動方程式

式(12)に表われるフロートの水中落下速度 dh/dt は、次式のフロートの運動方程式を解くことによって、はじめて具体的に評価し得る。

$$M \frac{d^2 h}{dt^2} + \left[\frac{1}{2} \rho C_D A \left| \frac{dh}{dt} \right| + 2\mu M \Omega \right] \frac{dh}{dt} + \rho Ng(h + \eta)A = MNg \quad (13)$$

ここに、 ρ は水の密度、 C_D は抗力係数(drag coefficient)、 A はフロートの底面積、 μ はフロートの案内棒とフロートとの間の摩擦係数、 Ng は水面における遠心加速度($a\Omega^2$)の大きさを表わしている。ただし、 g は重力加速度である。

本遠心模型実験においてフロートの案内棒が必要な理由は、もしそれがないと、コリオリ効果によって、落下中にフロートが円周方向に偏向してしまうためである。

さて、式(13)中の η として式(12)の表現を代入すると、次式を得る。

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{dh}{dt} + \omega_0^2 h = \omega_0^2 h^* \quad (14)$$

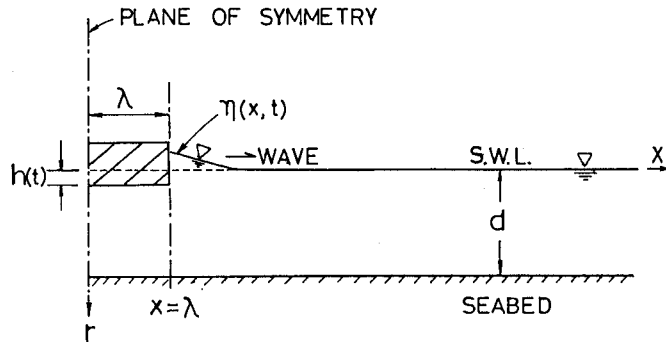


図-5 造波体としてのフロートと生成波

ここに、 D は減衰パラメタ、 ω_o は特性円振動数、 h^* はフロートの平衡貫入深さである。これらの具体的な定義式は次のようである。

$$D \equiv \frac{\lambda}{2\sqrt{dh^*}} + \frac{C_D |dh/dt|}{4\sqrt{Ngh^*}} + \mu\sqrt{h^*/a} \quad (15)$$

$$\omega_o \equiv \sqrt{\frac{Ng}{h^*}} \quad (16); \quad h^* \equiv \frac{M}{\rho A} \quad (17)$$

式(15)の表現において注目すべきことは、その第1項が水面波としてエネルギーが運び去られる効果、すなわち逸散減衰を表わしていることである。

(C) 解析例

式(12)と式(14)に基づく解析例(後出のTEST WAVE12に対応している)を、図-6, 7に示す。式(15)で定義される減衰パラメタ D の速度依存性のために、微分方程式(14)を解析的に解くことは困難である。ここでは、Runge-Kutta-Fehlberg法によって同式を、 $h_o = dh_o/dt = 0$ なる初期条件のもとで、数値的に解いている。

解析に用いたパラメタの値は次のようである： $M=8.5 \text{ kg}$; $2\lambda=0.2 \text{ m}$; $A=0.143 \text{ m}^2$; $d=0.077 \text{ m}$; $a=0.813 \text{ m}$; $N=48.8$; $g=9.81 \text{ m/s}^2$; $C_D=2.0$; $\mu=0.1$, $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ 。

解析結果によると、フロートの中水落下挙動は Critical Damping の状況に極めて近くなっている。この結果は、実測結果(後出の図-9)とも、よく対応している。このように、本フロート-水システムが強い減衰を示すのは、造波抵抗すなわち逸散減衰項 D_1 の値が0.74にも達していることによる(図-7)。

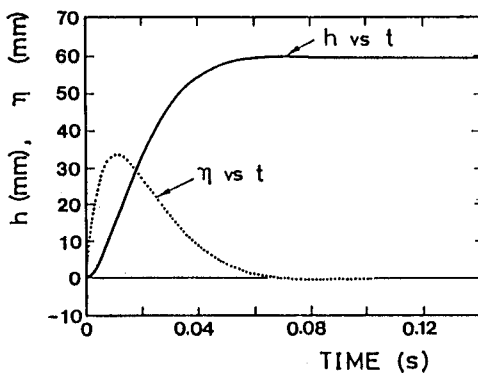


図-6 フロートの運動と生成波の波形

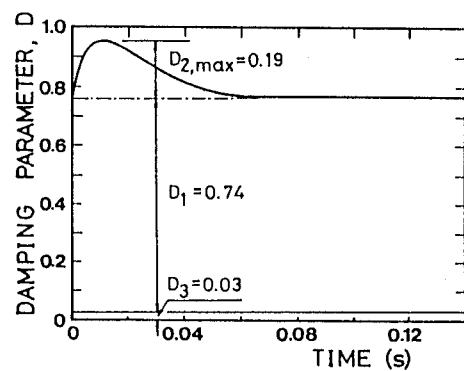


図-7 減衰パラメタの推移

4. 遠心力場における水面波とモデル海底地盤応答

(a) 実験の概要

本実験(Test WAVE12)に用いたドラム型遠心力载荷装置の概要を、図-8に示す。

まず、モデル海底地盤の作成法について述べる。用いた地盤材料は Leighton Buzzard Sand である。その粒径の範囲は、B.S.Mesh No.170(等価粒径=90 μm)から B.S.Mesh No.100(等価粒径=150 μm)にある。したがって、細砂と考えてよい。この試料砂に適当な水分を与えながら、それを、ゆっくりと回転しているドラムの内壁面に吹きつけることにより、所定厚さのモデル海底地盤を作成する。その後、Rotary Joint を介してドラムの内壁面側(モデル海底地盤の底部側)に水を供給し、極めて徐々に水面を半径方向に上げていくことにより、所定の自由水面を設定する。すなわち、ドラム内の所定の位置にあらかじめセットしておいたフロートの底面(ドラム回転軸に平行である)に、水面が接触するまで、ドラムを回転させながら水を供給する。その後、水の供給弁を閉じ、所定の回転速度までドラムの回転速度を上げ、水面が定常状態に達するのを待つ。

以上が初期状態の設定である。この状態でフロートに作用している遠心力のサポートは、半径方向に張った一本の銅線によっている。フロートの自重のサポートは、図-8には示していないが、水平な一本の案内棒による。水面波を起こすには、所定の瞬間に上述の銅線に高電流を通電することにより、それを溶断し、フロートを水中に自由落下させる。フロートの運動の追跡は、図示した2個のLVDT(差動変位計)によって行う。

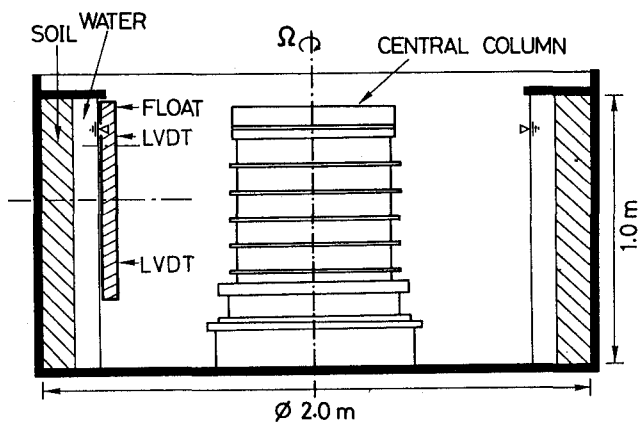


図-8 ケムブリッジ大学における回転ドラム

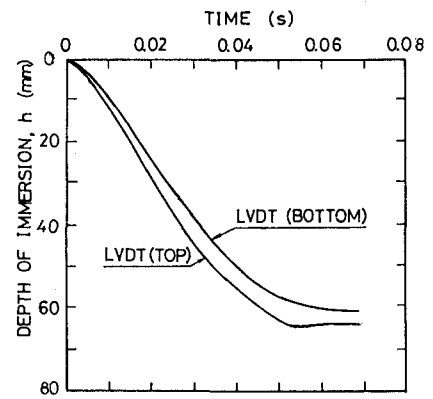


図-9 フロートの実測貫入-時間関係

Test WAVE12 では、以上のようにして、モデル海底地盤厚さ $d_g=110\text{ mm}$ 、水深 $d=77\text{ mm}$ 、水面までの距離 $a=813\text{ mm}$ 、ドラムの回転角速度 $\Omega=24.26\text{ rad/s}$ のもとで、フロート（幅 $2\lambda=200\text{ mm}$ ）の急速水中落下による非定常造波を行い、波高計測およびモデル海底地盤の間隙水圧応答を計測した。波高計測は、電気抵抗式波高計によって、4 地点（ $\theta=\pm 22.5^\circ$ 、 $\theta=\pm 38.6^\circ$ ）で行った。ここに、フロートの中心位置を $\theta=0$ とし、正の波の伝播方向と θ の正方向を合せている。地点 $\theta=22.5^\circ$ では、モデル海底面における水圧、海底面からの深度 55 mm と 110 mm における間隙水圧を測定した。地点 $\theta=-22.5^\circ$ では海底面における水圧のみを測定している。

(b) TEST WAVE12 における計測結果と考察

フロートの運動 LVDTによって計測したフロートの運動状況を図-9に示す。貫入を開始してから $t=0.06$ 秒後には、ほぼフロートの貫入は停止している。その全般的な運動過程は図-6の解析結果とよく対応している。

海底面における変動水圧波形

地点 $\theta=22.5^\circ$ における海底面での変動水圧波形、及び同地点における海底地盤内の変動間隙水圧波形を合せて図-10に示す。また、 $\theta=-22.5^\circ$ 地点における海底面の変動水圧を図-11に示す。ここでは、海底面における

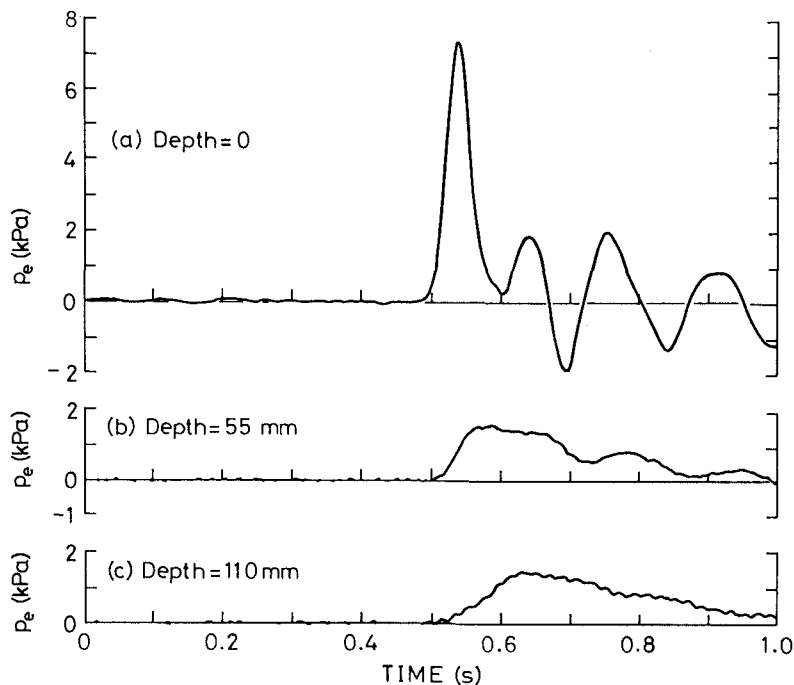


図-10 地点 $\theta=22.5^\circ$ における実測変動水圧及び変動間隙水圧波形

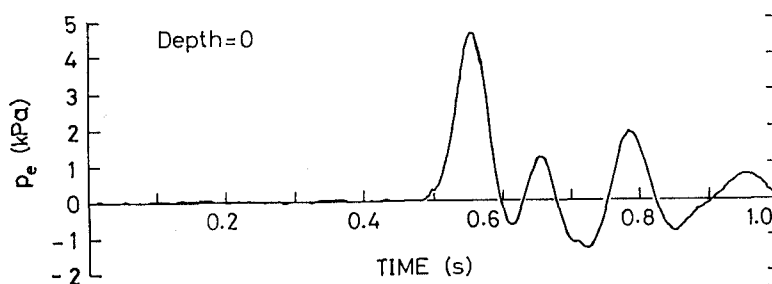


図-1.11 地点 $\theta = -22.5^\circ$ におけるモデル海底面における実測変動水圧波形

変動水圧波形に着目する。本実験の造波法によると、孤立波(solitary wave)に近い波が生成されるはずである(図-6の解析結果参照)。実際、図-10(a)と図-11の結果によると、第一ピークを含む主要波に対して、ほぼこのことは満たされている。

モデル海底地盤内の変動間隙水圧

地点 $\theta = 22.5^\circ$ では、上述のように、海底面における変動水圧に加えて、海底面下55 mmと110 mmの二深度において変動間隙水圧の測定を行っている(図-10)。同図より、深度55 mmにおいて変動間隙水圧波形は、「地盤によるfiltering効果」をかなり受けていることがわかる。この傾向は、深度110 mmではより顕著である。また、位相遅れ現象も明瞭である。

例として、 $t = 0.7$ sの時点を考えてみよう。このとき、海底面の変動水圧は、 -2 kPaである。他方、海底地盤内には正圧(1 kPa程度)が残留しており、海底地盤の安定にとっては不利な方向に働いている。

本実験のスケール・ファクターNの値は、海底面($r = a + d$)で53.4である。したがって、図-10(c)の結果をプロトタイプ換算すると、海底面より6 mの深さまで波浪の影響が伝達していることになる。この結果は、海底地すべりと高波や異常潮位低下との関わりを、遠心模型実験を通じて今後、詳しく調べていくうえで、有用な手がかりを与えるものである。

5. 結論

1) 回転流体における微小振幅表面波の二次元伝播特性を理論的に検討し、分散関係に及ぼすコリオリ効果の解析的表現を得た。その結果によると、正方向に伝播する波の位相速度は、各波長において、負方向に伝播する波の位相速度よりも大きい。

2) 地盤工学的な実際問題への遠心模型実験の応用という観点からすると、動的相似則を良い近似で満足させるためには、ドラム径をある程度大きくする必要がある。すなわち、ドラム回転中心軸から水面までの距離aを水深dの20倍以上に保つのが望ましい。

3) フロート落下方式による非定常造波の近似理論を誘導した。Test WAVE12に対する解析結果によると、同試験条件のもとでは造波抵抗による逸散減衰項が大きく、フロートの運動はcritical damping状態に近くなる。この結果は、Test WAVE12の実測挙動ともよく対応する。

4) Test WAVE12において、モデル海底地盤(細砂)内の変動間隙水圧波形と海底面における変動水圧波形を比較したところ、前者は後者に対して顕著な位相遅れを示していることがわかった。

謝辞 遠心力場水面波実験を行うにあたり、格別のサポートをいただいたケムブリッジ大学工学部 Schofield教授及び同研究室の関係各位に感謝します。また、有益な御討議をいただいたSleath博士、河田恵昭助教授、山下隆男博士、中川一博士、西村直志博士に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 関口秀雄・Ryan Phillips: ドラム型遠心力載荷装置における水面波の造波、京都大学防災研究所年報、第33号、1990(印刷中)。
- 2) Horikawa, K.: Coastal Engineering, University of Tokyo Press, 1978.
- 3) 徳岡辰雄: 波動論、サイエンス社、1984.