

有限要素法による港内波浪の予測とその適用性

大阪大学工学部土木工学科 正会員 榎木 亨, 青木伸一
鹿島建設(株)技術研究所 正会員 山本明雄

1. まえがき

港内静穏度を評価するための出発点は港内における波浪変形予測であり、これまでも数値シミュレーションによる予測手法が種々提案されている。¹⁾²⁾³⁾これらのうちどの手法を用いるかは港湾のスケール・境界条件・入射波特性などの与条件に加えて、計算コストなどを勘案して決定されると思われるが、現在のところ、波長が短く、港湾のスケールが大きくなると何らかの近似解法を用いざるを得ない。³⁾⁴⁾⁵⁾

近年、港内係留船の運動から静穏度を評価しようという考えがあるが、⁶⁾⁷⁾港内における波浪変形を船体運動と結合させるためには、より精度の高い計算手法が要求されるだけでなく、波高分布を求めるだけであれば必要のない波向の予測も重要な要素となる。⁸⁾⁹⁾さらに、港内外における波浪減殺対策、例えば低反射岸壁や消波工の影響なども計算にとり込めるような予測手法の開発が望まれる。¹⁰⁾¹¹⁾近年、緩勾配方程式¹²⁾を用いた波変形の解析が近似解法の開発とともに盛んに行われるようになり、¹³⁾¹⁴⁾浅海域での水深変化及び構造物設置にともなう波変形についてはその適用性が確かめられている。¹⁵⁾¹⁶⁾一方港内における波高分布のように、多重反射領域における波変形を取り扱った研究例¹⁷⁾¹⁸⁾¹⁹⁾は比較的少なく、特に単周期波については、厳密解法では大容量の計算を必要とすることもある、その適用性は十分検討されていないのが現状である。また港内に低反射岸壁を設置した場合の港内波の計算法についても、斜め多重反射となる場合の取扱い方などに問題が残されている。本研究は、より精度が高く適用範囲の広い港内波浪予測手法を開発するための第一段階として、計算機容量や計算コストなどによる制限はあるものの、現在のところ最も多様な境界条件に対応できる厳密な手法であると思われる緩勾配方程式を用いた有限要素法によって港内波高分布を計算し、水理実験結果との比較を行って、その適用性を調べたものである。計算結果は必ずしも実験結果を説明できていないが、今後港内波浪の計算法を開発していく上での参考資料となろう。

2. 計算手法の概要

(A) 基礎方程式: 図-1に示すような半無限領域に接続した任意形状港湾を考える。水深は港内及び港の近傍に限って任意とし、それ以外では一定とする。また座標系としては港口部海岸線上に原点Oをとり、 x, y, r, θ を図のように定め、 z 軸を鉛直上方にとる。流体運動は速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z, t)$ を有するものとし、定常線形問題として取り扱う。 Φ を(1)式のように表現すると、 $\varphi(x, y)$ は(2)式の緩勾配方程式を満足する。¹²⁾²⁰⁾

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{-i\omega t} \quad (1)$$

$$\nabla(cc_g \nabla \varphi) + k^2 cc_g \varphi = 0 \quad (2)$$

ここに k , h は局所的な波数および水深、 ω は角周波数、 c , c_g はそれぞれ波速および群速度である。

(B) 境界条件: 境界条件としては、港湾境界(Γ_1)、海岸線(Γ_3)で部分吸収条件が、また無限遠方では放射条件がそれぞれ課せられる。以下これらについて述べる。

図-2に示すように反射率 K_R の直線境界に δ の角度をなして入射する波の部分反射を考える。Behrendt¹⁷⁾、磯部ら¹⁹⁾によれば部分重複波の速度ポテンシャル ψ に関する関係式として次式を得る。

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = ik \frac{1-K_R}{1+K_R} \sin \delta \cdot \psi \quad (3)$$

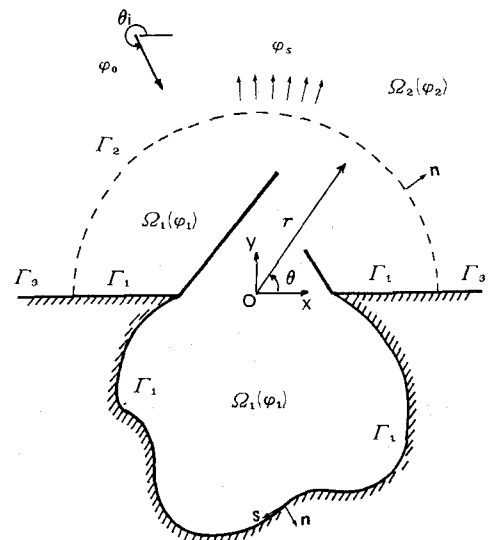


図-1 計算領域と座標系

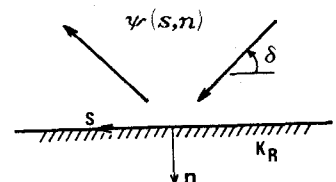


図-2 低反射岸壁による反射

実際の計算においては波の入射角 δ は未知であり、磯部らは繰り返し計算により δ を決定しているが、斜め多重反射となる境界上では波向の決め方が問題になる。一方、Behrendt は入射角 δ が大きいと仮定し、高次の部分吸収条件を導いている。すなわち、 $k_n = k \sin \delta$ 、 $k_s = k \cos \delta$ とおくと、

$$k_n = k \sqrt{1 - \left(\frac{k_s}{k}\right)^2} = k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{k}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{k_s}{k}\right)^4 - \dots \right] \quad (4)$$

$(k_s/k)^2$ の項までとると、 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = -k_s^2 \psi$ より、2 次の部分吸収条件として次式が得られる。

$$ik \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha k^2 \psi + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = 0 \quad (5)$$

ここに α は吸収率であり、次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{1 - K_R}{1 + K_R} \quad (6)$$

(3) 式を (5) 式で近似することによる誤差はみかけ上 (数値計算上) 反射率の変化として現れる。このみかけの反射率を K_R' とする。(4) と (5) 式を比較することにより次式で K_R' が与えられる。¹⁷⁾

$$K_R' = - \frac{(1 - \sin \delta)^2 - K_R (1 + \sin \delta)^2}{(1 + \sin \delta)^2 - K_R (1 - \sin \delta)^2} \quad (7)$$

$\sin \delta = 1$ すなわち $\delta = \pi/2$ のとき K_R' は K_R に一致するが、 δ が小さくなるにつれて K_R' の値は K_R と異なった値を示すようになる。 K_R は一般には複素数であるので、入射波の位相差によってもみかけの反射率、位相差は変化する。図-3 は $K_R = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (位相差=0) の場合の、みかけの反射率 K_R' を示したものであるが、入射角が 30° 以下になると (5) 式は適用できないことがわかる。

次に港外領域 (Ω_2) での速度ポテンシャルを次式のように表す。

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_s \quad (8)$$

ここに φ_0 は入射波とその反射波を表す速度ポテンシャルで、海岸線が完全反射の場合には次式で与えられる。

$$\varphi_0 = -\frac{iga}{\omega} \{ e^{-ikr \cos(\theta - \theta_i)} - e^{ikr \cos(\theta + \theta_i)} \} \quad (9)$$

ここに a は入射波の振幅、 r は原点からの距離、 θ_i は図-1 に示す入射角である。また φ_s は港からの散乱波を表し、 φ_s に対しては次式の放射条件が課せられる。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} - ik \varphi_s \right) = 0 \quad (10)$$

境界要素法では (10) 式を満足するような Green 関数を用いて放射条件を処理しているが、有限要素法においてはこのような開境界の処理法が問題となり、これまでにいくつかの有効な処理法が提案されている。²¹⁾ 主な方法としては、(1) 有限距離の境界上 (図-1 の Γ_2 上、ただし Γ_2 より外部は一定水深とする) で (10) 式が成立すると仮定する方法、(2) Γ_2 の外部の φ_s を (10) 式を満足する級数解で表現しておき、 Γ_2 上で内部解と接続してその係数を決定する方法、(3) 外部領域を Γ_2 上におかれたわき出しあるいは二重わき出しの分布で表しておき、 Γ_2 上で内部解と接続してその強さを決定する方法、(4) 形状関数が指数関数となる無限要素を用いる方法などがあるが、本研究では (2) の方法を用いた。

Γ_2 の外部は水深が一定であるので、(2) 式は Helmholtz の方程式となり、(10) 式を満足する一般解として次式が得られる。

$$\varphi_s = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) \{ \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) \} \quad (11)$$

ここに α_n, β_n は未知の複素定数であり、 $H_n^{(1)}$ は第 1 種 n 次の Hankel 関数である。海岸線が完全反射の場合には

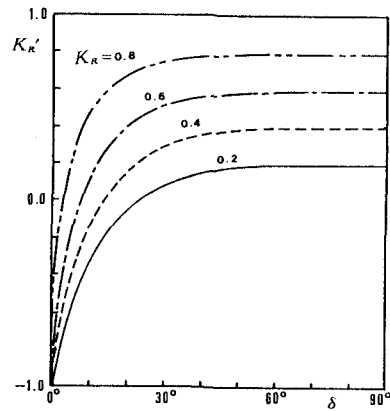


図-3 みかけの反射率

$\frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} = 0$ ($\theta = 0, \pi$) が成立しなければならないので $\beta_n = 0$ となる。ただし海岸線が任意の反射率を有する場合にはこの方法の適用は難しい。

(C) 汎関数: (2) 式を上述の境界条件のもとに解くことは次式の汎関数 $F(\varphi_1)$ の停留化問題と等価である。¹⁷⁾

$$F(\varphi_1) = \iint_{\Omega_1} \frac{1}{2} \left[cc_s (\nabla \varphi_1)^2 - \frac{c_s \omega^2}{c} \varphi_1^2 \right] dA + \int_{\Gamma_2} cc_s \left[\frac{1}{2} \varphi_s - (\varphi_1 - \varphi_0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right] ds \\ - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2} cc_s \varphi_s \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_1} \left[\frac{1}{2} i \alpha \omega c_s \varphi_1^2 + \frac{i \alpha}{4k} cc_s \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \right)^2 \right] ds \quad \dots (12)$$

$F(\varphi_1)$ を停留化するために有限要素法を用いる。近年、計算精度を向上させるための種々の工夫がなされているが、²²⁾今回用いた方法は三角形要素と線形な形状関数を用いた一般的な方法である。また計算においては節点間の距離の最大値が波長の1/20以下となるように要素分割を行った。計算方法の詳細については他の文献^{17) 21)}に詳しいのでここでは省略する。なお本計算手法は長方形湾の湾水振動に対してLeeの計算法¹⁾による解と比較し、その妥当性を確認した。

3. 実験の装置および方法

(A) 実験装置: 水理模型実験は図-4に示すような、その端部に波峰線と30度の角度をなす1/10勾配斜面を有する3次元造波水槽で行った。模型港湾は主防波堤と副防波堤を有するタイプのもので、入射波が主防波堤で遮られて直接港内に入っていないように設置した。港内水深は港外と同じく図の破線部から1/10勾配で浅くなっており、水深は破線から造波板側で30cm、港内左奥(最奥部)で16.7cm、右奥で23.4cmである。モデル港湾の詳細を図-5に示す。また港外の海岸線(1/10勾配斜面の始まるライン)には港の端部から1mの長さで鉛直壁を設置した。今回は港内左奥あるいは右奥の岸壁に、遊水部を有する多孔壁式低反射岸壁を設置した実験も行ったが、その際港内水面の形状を変化させないように岸壁に埋め込むような形で設置した。低反射岸壁の水理特性については後述する。

(B) 実験方法: 周期0.8秒および1.6秒の2種類の波については、港内に一辺約10cmの正方形メッシュで設けた294点で水位変動を測定し、さらに周期0.8秒から0.1秒毎に2.0秒までの13種類の波については、図-5に示したA~Eの5点で同時記録をとった。また入射波高については、どの周期についても3cm程度となるように調整した。港内波高については水位変動波形をもとに、港湾からの反射波が港内に再び入ってくるまでの間の定常状態の波高を読み取った。

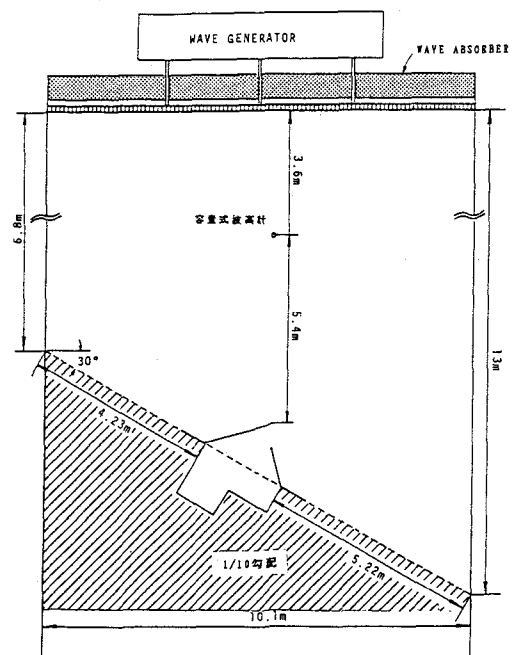


図-4 実験水槽

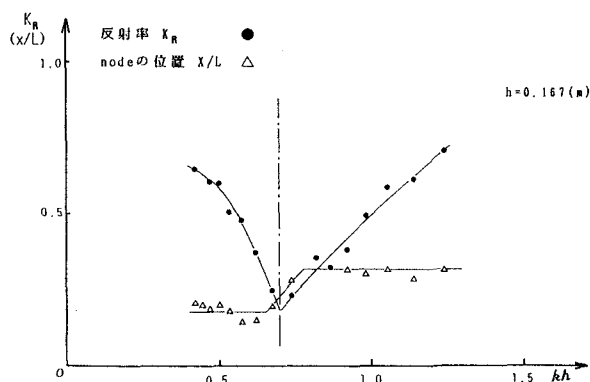


図-6 低反射岸壁の特性

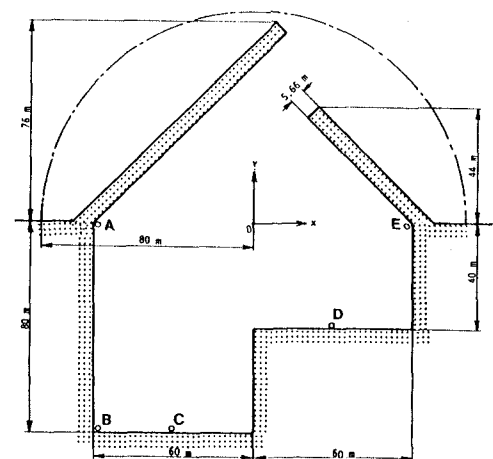


図-6 模型港湾

(C) 低反射岸壁の水理特性： 本実験で用いた低反射岸壁は、その前面に厚さ6cmの板に直径1.4cmの孔を開けた多孔壁（空隙率0.192）を有するもので、遊水部幅は10cmである。この様な低反射岸壁の水理特性はこれまでも研究されており、反射率に影響を及ぼす要因としては、遊水部幅、空隙率、波高、波長、設置水深などが考えられる。今回は数値計算に取り込む（反射率を与える）ための実験であるので、設置水深（16.7cmおよび23.4cm）毎に、反射率及び入射波の位相差が波高に関係なく与えられればよい。そこで2次元造波水路で、2種類の設置水深に対して周期及び波高を種々変えて反射率を測定した。その結果、周期が一定の場合、岸壁への入射波の波高が2cm以下では反射率は波高によってほとんど変化しないが、それ以上大きくなると波高の増大にともなって反射率が減少する傾向を示すことがわかった。平面実験では港への入射波高が3cm程度なので、港内岸壁への入射波高は2cm以下であると考えられる。従って今回の実験においては反射率に及ぼす波高の影響はないものと思われる。図-6は入射波高2cm以下の実験値を用いて波数と水深の積 kh に対する反射率及び部分重複波のnodeの位置（図中Xは多孔壁前面からの距離を表している）の変化を示したものである。これより水深16.7cmの場合には $kh=0.7$ 付近で反射率が最小となり、nodeの位置（入射波の位相差に対応している）もこの点を境に急変していることがわかる。

以上の結果より低反射岸壁の反射率及び位相差は各水深毎に、周期のみの関数として求められることがわかった。そこでこの実験結果を数値計算に取り込むために、図-6中の実線のような変化曲線を仮定し、図から読み取った反射率及びnode位置から複素数としての（位相情報を含んだ）反射率 K_R を算定し、（6）式に代入して複素吸収率 α を求めた。なおこの場合、位相差を計算する位置は数値計算に合わせるために多孔壁前面としている。

4. 実験結果と計算結果

本節では(1)港内の境界をすべて鉛直不透過壁とした場合および(2)港の左奥および右奥の岸壁に前節で述べた多孔壁式の低反射岸壁を設けた場合についてそれぞれ模型港湾に対する計算結果と実験結果を比較し、計算手法の適用性について検討を加える。ただし計算の際の要素分割は図-5の一点鎖線で示した半円の内部の領域について行った。総節点数は1133個、総要素数は2076個であり、節点間隔は縦横ともに約7cmである。

(A) 港内境界がすべて鉛直壁の場合： 図-7 (a)(b)は周期0.8秒の場合の波高分布の計算結果（不透過壁は完全反射として

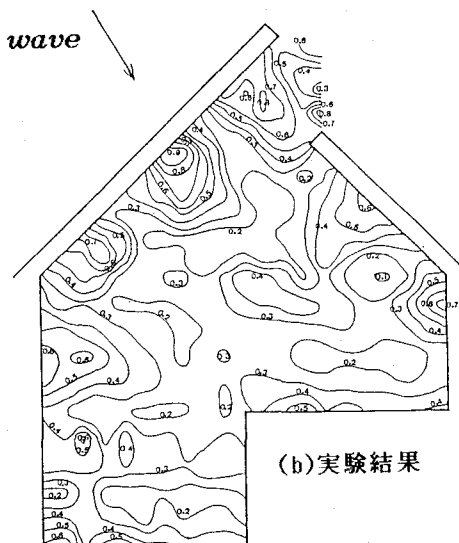
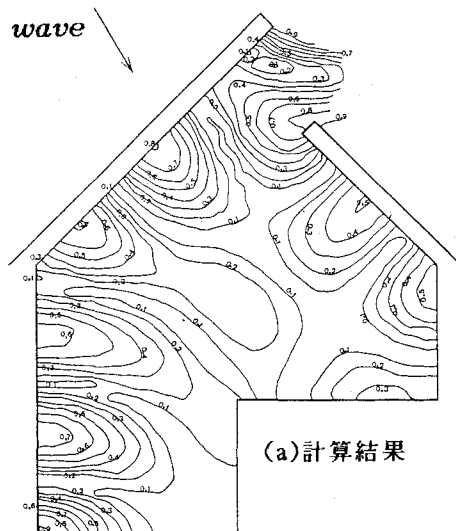


図-7 波高分布（鉛直不透過壁, $T=0.8\text{sec}$ ）

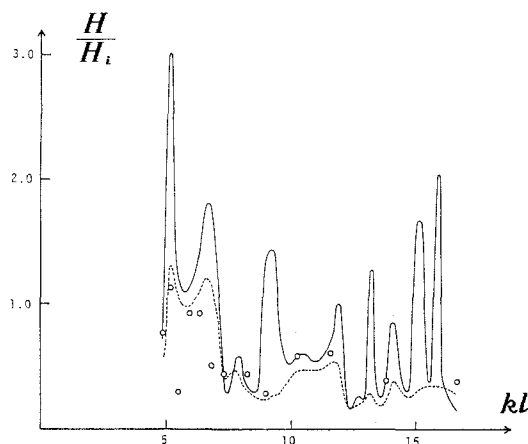


図-9 波高比の周波数応答 (C点)

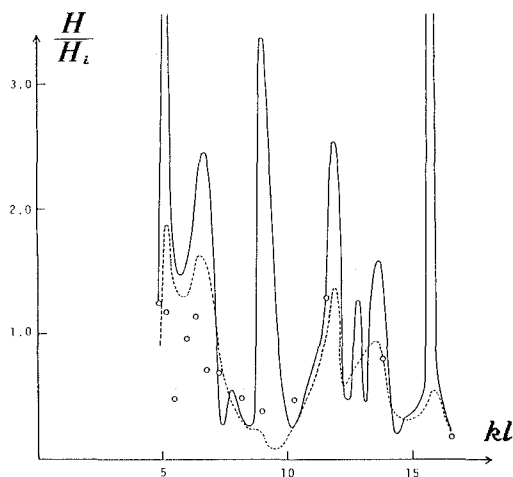


図-8 波高比の周波数応答 (A点)

いる) 及び実験結果を示したものである。図中の数字は入射波高で無次元化した波高比である。これより、分布形状については計算結果はほぼ実験結果を説明しているが、波高比の値は左隅湾奥部付近で実験値よりも大きくなっている。周期1.6秒のケースについては、0.8秒の場合よりも実験値と計算値はよく一致していたが、ここでは短周期の波に対してどの程度予測が可能であるかに着目して議論を進める。図-8、図-9は図-5に示したA点及びC点での波高比の周波数応答を示したものである。ただし横軸の1は港口から港奥までの長さ(2.53m)である。図中白丸は実験結果を、実線は港内岸壁をすべて完全反射($K_R=1.0$, $\alpha=0.0$)とした場合の計算結果である。これより全体的な傾向は似かよってはいるものの、計算値は実験値よりもかなり大きな値を示し、多くの鋭いピークが出現している。これはエネルギー逸散の考慮されていない本計算手法においては、多重反射した波の重なりが実験よりも過大に評価されるためであると考えられる。エネルギー逸散の原因としては、港口部での急縮に伴うエネルギー損失、水底及び岸壁での摩擦損失、波の非線形性による高周波数成分へのエネルギーの移行など種々のものが考えられるが、ここではこれらのエネルギー損失を岸壁の反射率に集約し、反射率をわずかに小さくして計算を試みた。図-8、図-9中の破線は反射率 $K_R=0.94$ (吸収率 $\alpha=0.03$)の場合の計算結果であり、この場合には鋭いピークは現れておらず、定量的にも実験値に近づいている。このときの波高分布図は省略するが、コンターの形状は図-7に示した完全反射の場合とほとんど変わらず、波高比の値が全体的に小さくなるのみである。

(B) 低反射岸壁を設置した場合： 図-10(a)(b)は港内左奥に低反射岸壁を設置した場合(このときの反射率は約0.75)の計算及び実験で得られた波高分布を示したものである。実験結果は図-7の鉛直不透過壁の場合と比べて波高比の分布形状に目立った変化はないが、港内は全体的に静穏になっていることがわかる。それに対して計算結果は図-7

と比べると分布形状が大きく異なっており、右奥の岸壁前面では設置前よりも波高比が大きくなっている。一方図-11(a)(b)は右奥の岸壁に低反射岸壁を設置した場合(このときの反射率は約0.6)の結果であるが、この場合には実験、計算とも図-7と比べると低反射岸壁前面の波高のみが低下しており、両者の分布形状は似通っている。左奥に低反射岸壁を設置した場合の計算結果が実験結果と一致しないのは、左奥岸壁前面はそれをはさむ左右の鉛直不透過壁の影響で複雑な斜め多重反射領域となっており、2次元実験から得られた反射率を簡略化した境界条件に適用して計算する方法には無理があったためではないかと思われる。これに対して右奥の岸壁

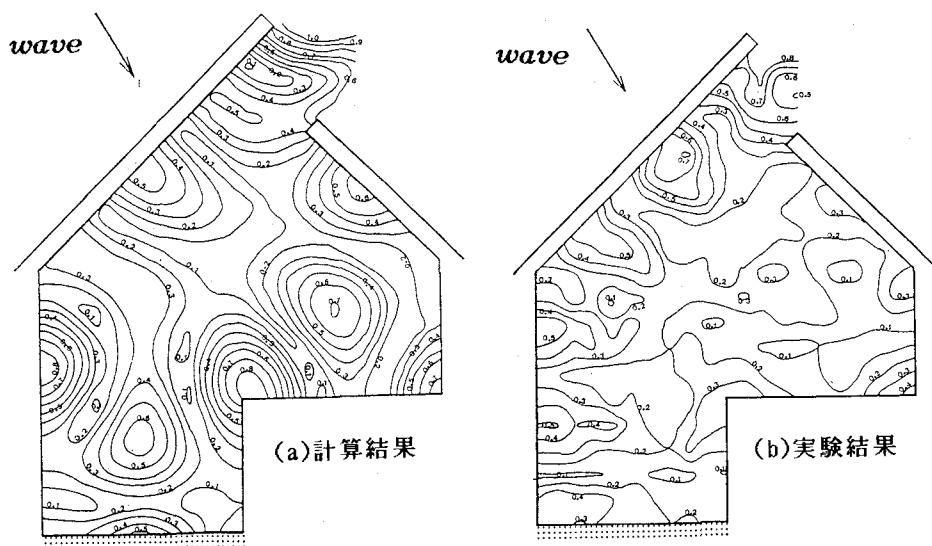


図-10 波高分布(左低反射, $T=0.8\text{sec}$)

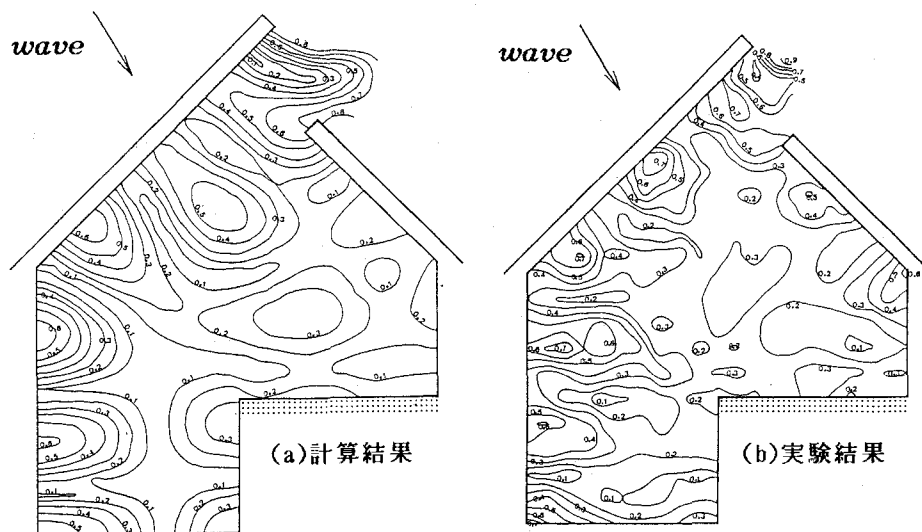


図-11 波高分布(右低反射, $T=0.8\text{sec}$)

への入射波は岸壁に対して直角方向成分が卓越していると思われる、また図-7からもわかるように低反射岸壁を設置しなくとも前面波高が比較的小さかったために計算結果は実験結果と大きく変わらなかったものと思われる。

図-12、図-13には左奥に低反射岸壁を設置した場合のA点およびC点での波高比の周波数応答を示す。図中の破線は低反射岸壁以外の岸壁の吸収率を0.03とした場合の計算結果である。応答曲線には鉛直不透過壁の場合のような鋭いピークはみられず、また鉛直壁にわずかな吸収率を与えても応答曲線は大きくは変化しないことがわかる。また計算値は kl の小さい領域で実験値を説明できていない。一方右奥に低反射岸壁を設置した場合の周波数応答は、計算値と実験値の一致は良好であった。周期1.6秒の場合については波高の変化が緩やかであるため0.8秒の場合に比べて幾分実験と計算の一致度はよい。ただし左奥に低反射岸壁を設置した場合にはやはり両者に相違がみられた。

5. あとがき

本論文では、緩勾配方程式を用いた有限要素法による港内波浪の計算が、一般的な形状でかつ港内に低反射岸壁を有するような港に対してどの程度の適用性を有するかを水理模型実験により調べた。主要な知見は次の通りである。(1)港内がすべて鉛直不透過壁で囲まれる場合でも、港内境界の反射率をすべて1.0とする(いかなるエネルギー損失をも考慮しない)解析法では、波高比の分布、周波数応答とも定性的には一致するものの計算値は過大となり、周波数応答曲線には数多くのピークが発生する。ただしこの場合でも種々のエネルギー損失を代表させる意味で、岸壁にわずかな吸収率を与えることにより定量的な予測が可能となる。(2)港内に低反射岸壁を設置した場合、岸壁前面が斜め多重反射領域となるような場合には、2次元実験から得られる反射率と位相差を境界条件に取り込む今回の方法では港内の波高分布形状を正しく予測することができない。

以上のような結果を得たが、岸壁にわずかな吸収率を与える方法は物理的意味に乏しく、別の計算にそのまま適用できるとは限らない。これらのことを考え合わせると、有限要素法による計算は与えられた方程式をより厳密に解くと言う意味では優れた方法ではあるものの、実際の現象を説明できるように改良するためには今後検討すべき課題は数多く残されていると言えよう。また有限要素法では広範囲かつ短周期波を対象にする場合には計算のための労力・費用が莫大になることを考えるとより簡便でかつ比較的精度のよい予測手法の開発が望まれる。

参考文献

- 1) Lee, Jün-jen: Wave induced oscillation in harbours of arbitrary geometry, J.F.M., vol. 45, part 2, 1971.
- 2) 谷本勝利, 小舟浩治: 数値波動解析による港内波高分布の計算, 第22回海講論文集, 1975.
- 3) 高山知可, 菊地治: 港内波高分布の計算, 第25回海講論文集, 1978.
- 4) Barailler, L. and P. Gaillard: Evaluation recente des modeles mathematiques d'agitation due a la houle: Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, La Houille Blanche, No. 8, 1967.
- 5) Larsen, J.: A harbour theory for wind-generated waves based on ray methods, J.F.M., vol. 87, part 1, 1978.
- 6) 久保雅義: 荷役限界からみた港内静穏度に関する基礎的研究, 大阪大学博士論文, 1981.
- 7) 上田茂: 係岸船舶の動揺解析手法とその応用に関する研究, 港研資料, No. 504, Dec. 1984.
- 8) 近藤浩右, 清水琢三, 山田耕一: グリーン関数を用いた港内波方向スペクトルの計算法, 第34回海講論文集, 1987.
- 9) 久保雅義: 港内波の方向スペクトルによる係留船の船体運動に関する基礎的研究, 神戸商船大学船舶研究報告, 第3号, 1987.
- 10) 井島武士, 吉田明徳, 奥蘭英明, 北山斉: 消波護岸を有する港内水面振動の数値解析, 第29回海講論文集, 1982.
- 11) 清川哲志, 大山巧, 小林浩: 波動方程式の直接差分による港内波高分布解析法, 第29回海講論文集, 1982.
- 12) Berkhoff, J.C.W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. of 13th I.C.C.E., 1972.
- 13) Radder, A.C.: On the parabolic equation method of water-wave propagation, J.F.M., vol. 95, pp. 159-176, 1979.
- 14) 渡辺晃, 丸山康樹: 屈折・回折・碎波減衰を含む波動場の数値解析法, 第31回海講論文集, 1984.
- 15) Berkhoff, J.C.W., N. Booij and A.C. Radder: Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Engineering, vol. 6, pp. 255-279, 1982.
- 16) Booij, N.: A note on the accuracy of the mild-slope equation, Coastal Engineering, vol. 7, 1983.
- 17) Behrendt, L.: A finite element model for water wave diffraction including boundary absorption and bottom friction, Paper 37, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical Univ. of Denmark, 1985.
- 18) Kostense, J.K., K.L. Meijer, M.W.D. Ingemans, A.E. Mynett and P. van den Bosch: Wave energy dissipation in arbitrary shaped harbours of variable depth, Proc. of 20th I.C.C.E., pp. 2003-2016, 1986.
- 19) 磯部雅彦, 佐藤典之, 杉浦淳, 泉宮尊司: 港内波高分布の数値計算における境界条件に関する研究, 第34回海講論文集, 1987.
- 20) Mei, C.C.: The applied dynamics of ocean surface waves, pp. 86-89, John Wiley & Sons, 1983.
- 21) Zienkiewicz, O.C., P. Bettess and D.W. Kelly: The finite element method for determining fluid loadings on rigid structures two- and three-dimensional formulations, Numerical Methods in Offshore Engineering, pp. 141-183, John Wiley & Sons, 1978.
- 22) 榎山和男, 川原睦人: 適応型有限要素法による線形水面波動問題の解析, 第42回年講概要集, 1987.

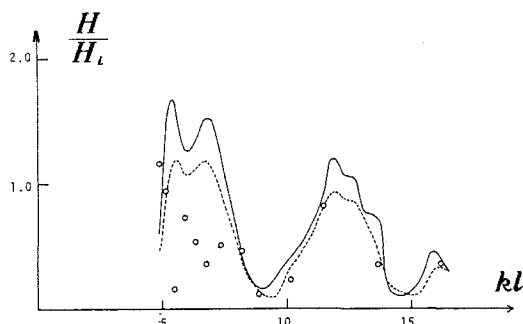


図-12 波高比の周波数応答 (左低反射, A点)

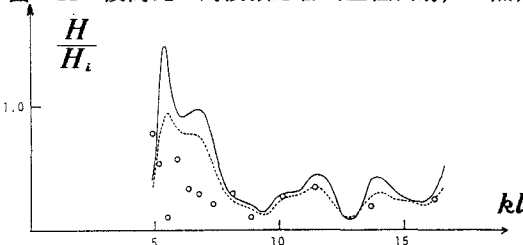


図-13 波高比の周波数応答 (左低反射, C点)