

1 はじめに

大型の海上構造物の計画が実現化されるにしたがい、複雑な形状—任意形状のこれら構造物の受ける波力、およびそれらが周囲の波高を変化させる様子を容易に計算する方法が、必要となりつつある。

3次元の問題を解く場合、変数分離というポピュラーな手法は、境界条件が余程単純でない限り、適用できない。複雑な境界条件に対しては、たとえば基礎方程式を差分近似によって数値的に解く方法が直接的だが、境界条件の考慮がむずかしいし、計算機の記憶容量、演算時間など、現実的な問題も、大きな制約となる。

ここで用いるGreen関数による解法は、基礎方程式 (Laplace eq.) と、任意の境界条件とを、1個の積分方程式に帰着させてこれを解く方法である。すなわち、境界条件は全てこの積分方程式に含まれてしまうから、あとはこれを解くことだけを考えればよい。積分領域は、結局物体の水中にある面になり、これをメッシュに分けても、未知数はそれ程大きくならない。

なお、ここでは積分方程式の単なる差分近似解にとどまらず、計算精度を保ちつつ未知数を減少させる計算法 (仮に "弾性板仮想荷重法" と名付ける) を提案した。

また、矩形底面をもった構造物模型を用いて波力を実測し、Green関数による解と比較してみた。

2 理 論

i) 問題設定

図1のように、任意断面をもった柱状物体が、水深 R の海面上に、底面の深さ c となるように剛結されているところに、 x 軸と y をなす方向から波が入射する。

このとき、入射波に対して、物体の存在による散乱波が発生する。これらの波は、全て微小振幅波とし、そのポテンシャルを、それぞれ $\Phi e^{i\omega t}$ 、 $\Psi e^{i\omega t}$ とおく。

結局この場合は $(\Phi + \Psi) e^{i\omega t}$ であらわされ、 Φ は既知だから、 Ψ を求める問題となる。

ii) 基礎方程式

非圧縮、うずなしの仮定、および $\Delta\Phi = 0$ より、

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, -R \leq z \leq 0) \quad (1)$$

iii) 境界条件

境界条件として、

① 水底で、 z 方向の速度0

② 物体の底面で、 z 方向の速度0

③ 物体の側面で、法線方向の速度0

④ 物体外部の水面上 (自由表面) についての Bernoulli の式

⑤ 散乱波が、無限遠方で、同様に円柱に外へ進んでいくことを規定した Sommerfeld's Radiation Condition²⁾

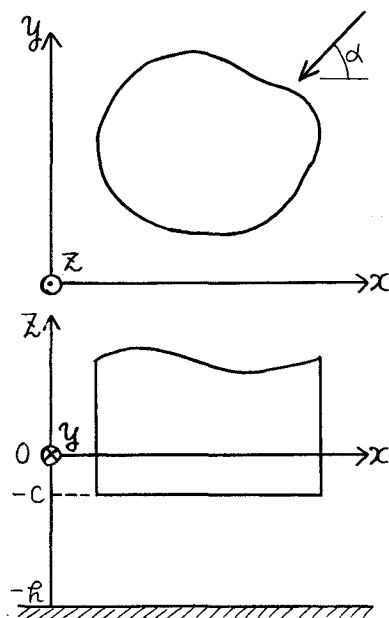


図 1

の条件をおく。すなわち、

- ① $\Phi_z = 0$ ($z = -R$) ② $\Phi_z = -\Phi_z$ ($z = -c$, 物体底部)
- ③ $\Phi_n = -\Phi_n$ ($-c \leq z \leq 0$, 物体側面)
- ④ $\Phi_z = \lambda \Phi$ ($z = 0$, $\lambda = \frac{\alpha^2}{g}$, 物体外部)
- ⑤ $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\frac{3}{2}} (\Phi_R + i\Phi) = 0$ ($R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, (ξ, η, ζ) は物体内部を除く点)

IV) 入射波ポテンシャル

$e^{i\omega t}$ を分離した入射波ポテンシャルは、

$$\Phi(x, y, z) = \frac{igH}{2\omega} \frac{\cosh k(R+z)}{\cosh kR} e^{iR(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)} \quad (3)$$

(H : 波高, k : $k \tanh kR = \lambda$ の実正根)

ここに Φ は次の条件をみたす。

- ① $\Phi_z = 0$ ($z = -R$) ② $\Phi_z = \lambda \Phi$ ($z = 0$)

V) Green関数

Green関数の表示は、種々ある²⁾が、ここでは F. John の導いた無限和数³⁾を用いる。 $e^{i\omega t}$ を分離した形は、次式のようにあらわされる。

$$G(x, y, z) = \frac{i}{2} C_0 H_0^{(2)}(kR) \cosh k(R+z) \cosh k(R+\zeta) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_0(\nu_n R) \cos \nu_n(R+z) \cos \nu_n(R+\zeta) \quad (5)$$

$$(C_0 = \frac{k^2 - \lambda^2}{R(k^2 - \lambda^2) + \lambda}, C_n = \frac{\nu_n^2 + \lambda^2}{R(\nu_n^2 + \lambda^2) - \lambda}, \nu_n: \nu_n \tanh \nu_n R = -\lambda \text{ の実正根で } 0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots)$$

ここに G は次の条件をみたす。

- ① $\Delta G = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ ($-R \leq z \leq 0$, 右辺は (ξ, η, ζ) を特異点とする Delta 関数)
- ② $G_z = 0$ ($z = -R$) ③ $G_z = \lambda G$ ($z = 0$)
- ④ $G + \frac{1}{4\pi R}$ は正則 ($-R < z < 0$, $R = \sqrt{R^2 + (z-\zeta)^2}$)
- ⑤ $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\frac{3}{2}} (G_R + iG) = 0$

G の物理的意味は、水深 R の場において、点 (ξ, η, ζ) に映出しが存在するときのポテンシャル解と考えればよい(次元は合っていないが)。

VI) 積分方程式への帰着

図2のように、 z 軸を軸とし、平面 $z=0$ と $z=-R$ ではえられた半径 R (R は十分大きい) の円柱から、物体内部を除いた体積領域 V を考える。3次元の Green の公式によれば、一般にある体積領域 V の表面を A とすると、

$$\int_V (f \Delta g - g \Delta f) dV = \int_A (f g_n - g f_n) dA \quad (7)$$

ここで、法線方向 n は、 V の内部より、外部へ向かうときを正にとる。

f, g は V 内部で定義される関数である。今議論している関

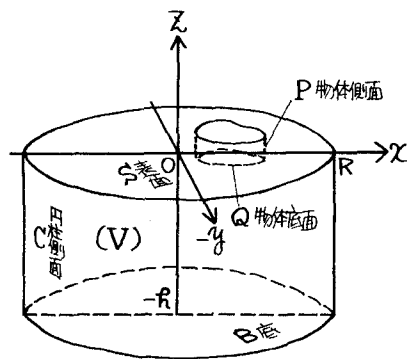


図2

題に適用するため、 $f \equiv \Phi$, $g \equiv G$ にとると、(4)式は次のようにならされる。

$$\begin{aligned} & \int_V (\Phi \Delta G - G \Delta \Phi) dV \\ &= \int_S (\Phi G_z - G \Phi_z) dS + \int_B (\Phi G_z - G \Phi_z) dB + \int_C (\Phi G_R - G \Phi_R) dC + \int_P (\Phi G_n - G \Phi_n) dP + \int_Q (\Phi G_z - G \Phi_z) dQ \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式の左辺は(1), (2)①式より $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ となる。右辺各項について検討してみると、

第1項は(2)④, (6)③式より0。第2項は(2)①, (6)②式より0となる。第3項は $R \rightarrow \infty$ で、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 (\Phi G_R - G \Phi_R) R dZ = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 R \{ \Phi(G_R + iR G) - G(\Phi_R + iR \Phi) \} dZ$$

となり、(2)⑤, (6)⑤式より、これもまた0である。

第4, 5項について、それぞれ(2)③, ②式を用いると、結局(8)式は次のようになる。

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \int_P \{ \Phi(x, y, z) G_n(x, y, z) + G(x, y, z) \Phi(x, y, z) \} dP + \int_Q \{ \Phi(x, y, z) G_z(x, y, z) + G(x, y, z) \Phi_z(x, y, z) \} dQ \quad (9)$$

(9)式より、P, Q面上の速度ポテンシャル Φ を求めると、その Φ を用いて、水域上の任意の点の速度ポテンシャルを、したがって、Bernoulli式より流圧分布を求めることができる。

③ 計算方法(I)

i) 変数の無次元化

各変数の上に $\sim$ をつけて無次元量をおくことにする。

$$\left. \begin{aligned} & \textcircled{1} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{R}, \tilde{C}, \tilde{R}, \tilde{H}) = \lambda(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, R, C, R, H) \\ & \textcircled{2} \tilde{t} = \sigma t \\ & \textcircled{3} (\tilde{c}, \tilde{u}_n) = \frac{1}{\lambda} (c, u_n) \quad \textcircled{4} (\tilde{\Phi}, \tilde{G}) = \frac{\sigma^3}{g} (\Phi, G) \quad \textcircled{5} \tilde{G} = \frac{1}{\lambda} G \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

無次元化された入射波ポテンシャル、Green関数、積分方程式は、それぞれ、次のようにならされる。

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{H}}{2} \frac{\cosh \tilde{c}(\tilde{z} + \tilde{R})}{\cosh \tilde{c} \tilde{R}} e^{i \tilde{c}(\tilde{x} \cos \alpha + \tilde{y} \sin \alpha)} \quad (11)$$

$$\tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{L}}{2} \tilde{C}_0 H_0^{(2)}(\tilde{c} \tilde{R}) \cosh \tilde{c}(\tilde{z} + \tilde{R}) \cosh \tilde{c}(\tilde{z} + \tilde{R}) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n K_0(\tilde{c}_n \tilde{R}) \cos \tilde{c}_n(\tilde{z} + \tilde{R}) \cos \tilde{c}_n(\tilde{z} + \tilde{R}) \quad (12)$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$$

$$= \int_{\tilde{P}} \{ \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{G}_n(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{\Phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \} d\tilde{P} + \int_{\tilde{Q}} \{ \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{G}_z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{\Phi}_z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \} d\tilde{Q} \quad (13)$$

(13)式で、 $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ は (x, y, z) 空間から $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 空間へ写像された積分領域を意味している。

ii) Xッシュ近似による連立1次方程式への帰着

(13)式を解くのに、 $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ 面を適当なXッシュに分割し、各Xッシュの中点の値を未知数として積分を $\sum$ で近似することにより、連立1次方程式に帰着させる。

Xッシュ数を、 $\tilde{P}$ 面は m , $\tilde{Q}$ 面は n , また各面内のXッシュの中点を、積分パラメータとしてとるときは、それぞれ j , k 特異点としてとるときは、それぞれ I, J の添字であらわすことにすると、連立方程式は、次

の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Phi}_I &= \sum_{i=1}^m \tilde{\Phi}_i \{ \tilde{G}_{\tilde{\alpha}} \}_{iI} \Delta \tilde{P}_i + \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \{ \tilde{G}_{\tilde{\alpha}} \}_{jI} \Delta \tilde{Q}_j + E_I \quad (I=1,2,\dots,m) \\ \tilde{\Phi}_J &= \sum_{i=1}^m \tilde{\Phi}_i \{ \tilde{G}_{\tilde{\alpha}} \}_{iJ} \Delta \tilde{P}_i + \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \{ \tilde{G}_{\tilde{\alpha}} \}_{jJ} \Delta \tilde{Q}_j + F_J \quad (J=1,2,\dots,n) \\ \text{ただし} \begin{pmatrix} E_I \\ F_J \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^m \tilde{\Phi}_i \left(\frac{\tilde{G}_{iI}}{\tilde{G}_{iJ}} \right) \Delta \tilde{P}_i + \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \left(\frac{\tilde{G}_{jI}}{\tilde{G}_{jJ}} \right) \Delta \tilde{Q}_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

④ 計算方法(II) "弾性板仮想荷重法"

計算方法(I)では、連立1次方程式を解く場合の誤差、時間、計算機の記憶容量などを考慮すると、メッシュ総数は、あまり大きくとれない。そこで、計算精度を落とさずに、未知数を減らして解こうとする"弾性板仮想荷重法"を考えた。

図3のように、積分領域面上に、ポテンシャル曲面を考えたとき、ポテンシャルとその勾配は連続だから、次のような仮想的対応を考える。

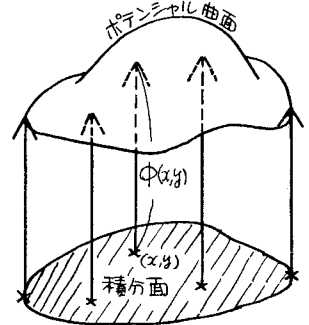


図 3

	内 題	仮 想 問 題
$\Phi(x,y)$	速度ポテンシャル	弾性板のたわみ
Φ_{ij}	格点 (i,j) におけるポテンシャル	(i,j) におけるたわみ
W_{rel}	_____	格点 (r,l) における仮想荷重

つまり、 Φ を直接求めるのではなく、仮想問題を導入して、 Φ_{ij} を生じせしめる、これらとは必ずしも同一点上に無くとも限りぬ仮想荷重 W_{rel} を求める問題におきかえる。この考えは、ちょうど有限要素法 (FEM) とは逆の発想である。仮想荷重とたわみの関係は、Green関数 $K(x,y,\xi,\eta)$ を用いて、

$$\Phi_{ij} = \sum_{r,l} K_{rel ij} W_{rel} \quad ((i,j) \text{ は たわみの}, (r,l) \text{ は 荷重の 格点}) \dots\dots\dots (15)$$

とあらわされるから、(13)式を W_{rel} を未知数とする連立1次方程式に帰着させることが可能である。こうして積分メッシュは細かくしたまま、荷重点数を適当に少なくとることにより、さきに述べた問題を解決できる。

⑤ 結果と考察

i) 矩形底面の物体

図4のようなアルミ板製の箱(底面の15箇の穴には圧力変換器をとりつける)を、広さ約 $2^m \times 2^m$ の平面水路上に設置し、周期 0.332, 0.497, 0.782 sec の3種類の波を与えて測定を行ない、同じ条件についての計算値(方法Iによる)と比較してみたが、図5, 図6, 図7(a)(b)(c)である。入射波高は $\tilde{H}=1$ としている。

図7は、底面の圧力変換器と、周辺の波高のContour Mapであり、□内に記入された数値は実験値を示している。(b)の周期 0.497 sec の波について、底面の水深を深してみたが、図8(a)(b)である。

ii) 円形底面の物体

図9に示したのは、円を28角形で近似した底面をもつ物体についての計算結果である。円の直径は30cmだから、図7(b)と類似の場合と見なせる。定性的に比較してみても、特に問題は無い。

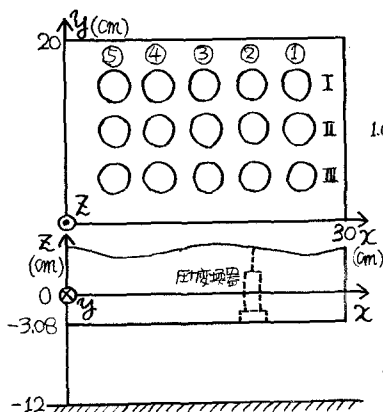


図4 実験用アルミ箱

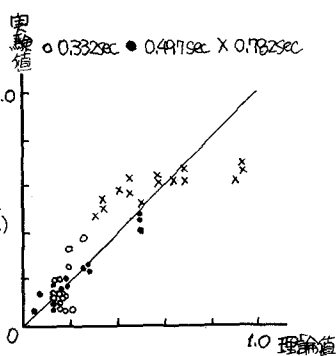


図5 圧力変動幅の
実験値と理論値

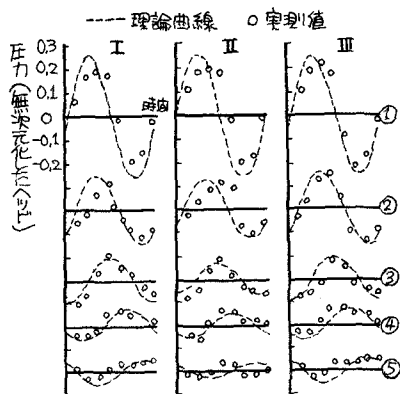
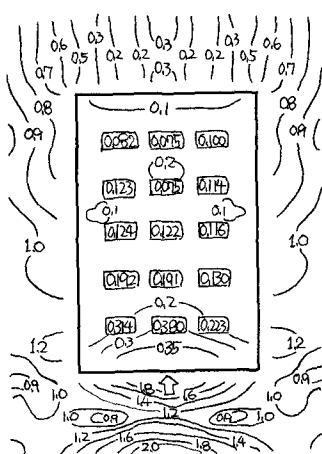
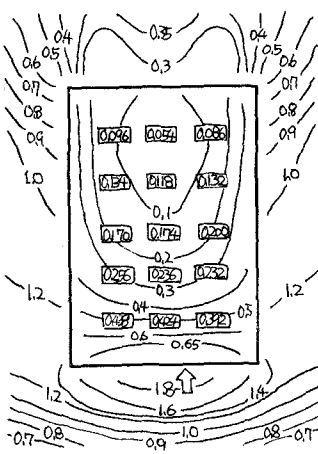


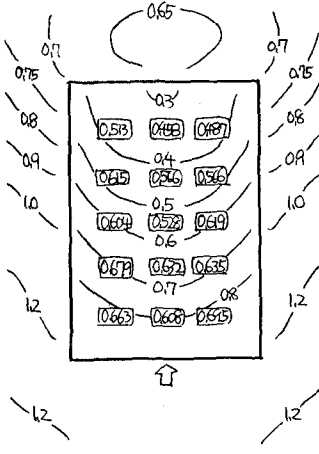
図6 各点での圧力の時間
変動 (周期 0.497sec)



(a) 周期 0.332 Sec

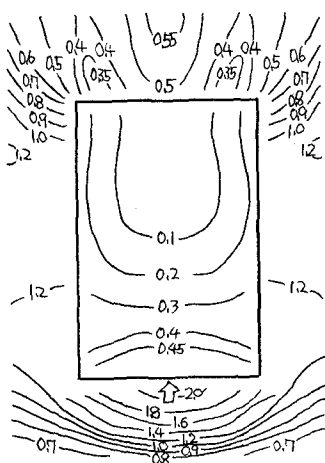


(b) 周期 0.497 Sec

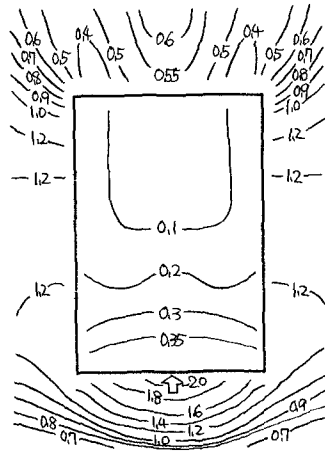


(c) 周期 0.782 Sec

図7 底面の圧力変動幅と周辺の液高の分布 (底面水深はいずれも 0.0308 m)



(a) 底面水深 6cm



(b) 底面水深 9cm

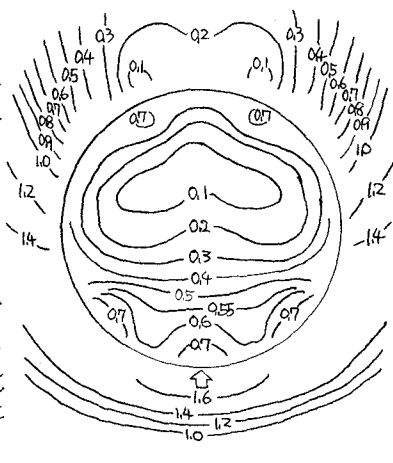


図9 周期 0.497 sec 底面水深 3.08cm

図8 物体底面を深くした場合 (周期はいずれも 0.497 sec)

6 結 論

任意形状の固結された海上構造物の波力解析、および周囲の波高計算において、Green関数を用いる解法について述べた。さらに計算を容易にする"弾性板仮想荷重法"を提案した。

ここで述べた理論計算と、実験結果との比較は、ほぼ満足できるものであった。

謝 辞

本研究にあたり、昭和47年度文部省科学研究費試験研究「浮遊型海洋構造物の安定性に関する研究（代表者：東洋大学本間教授）および建設省土木研究所「浮防波堤の調査研究」の補助を受けた。ここに厚く謝意を表する。

参考文献

- 1) Stoker, J.J. (1956): On Radiation Conditions, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.9, pp. 577-595
- 2) Wehausen, J.V. and E.V. Laitone (1960): Surface Waves, §13, Encyclopedia of Physics, Vol.9, Fluid Dynamics III, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, pp.478
- 3) John, F. (1950): On the Motion of Floating Bodies (II), Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.3, pp.45-101
- 4) 日野章雄・藤崎治男：固定された海上構造物による波の反射と透過—Green関数による理論解，才20回 海岸工学講演会論文集