

1. まえがき

近年海洋開発が叫ばれ、大水深海域を含む種々の海域に海洋構造物が建設されようとしている。このような構造物に作用する波力を推定することや構造物設置に伴って生ずる自然環境の変化を予測することは設計計画上の重要な問題となる。波浪は沖から海岸線に近づくにつれて、地形や構造物の影響を受け、屈折、回折、反射などの複雑な挙動を示すが、このような現象を正しく把握することはなかなか困難な問題である。

これらの問題に対して、従来用いられた手法は図式解法や理論解などであるが、限られた場合にしか適用できないので、通常は実験的な方法によっていることが多い。しかしながら、これには大規模な設備と長期間の観測を必要とし、多大の経費やデータの非汎用性などの欠点もある。

コンピュータによる数値シミュレーションはこの点きわめて有効な方法である。もちろん、理論解析である以上それなりの理想化を前提とするので、これが万能というわけではないが、多目的プログラムによる種々の計画の検討など簡便に行ない得る利点がある。

このような数値シミュレーションの方法として、従来から用いられてきたのは差分法であった。この報告例として、たとえば、日野ら¹⁾や伊藤ら²⁾の研究がある。一方、最近急速な発展を遂げつつある有限要素法(FEM)は、構造解析の手法として生まれにもののであるが、現在では流体を含む連続体の解析あるいはさらに一般数値解析の手法としての位置を確立しにと言っても過言でない。

FEMと差分法はそれぞれの特長があるが、両者は本質的には等価であると考えられる^{*)}。実際に取扱う上でのFEMの特長は、メッシュ分割の任意性と境界条件の処理の容易さにある。したがって、任意の地形や構造物形状に応じて数値実験を行なおうとする場合、差分法よりもFEMの方がフレキシビリティがあり、汎用プログラムの作成に便利である。

この方面へのFEMの適用はZienkiewicz^{3),5)}が最初であろうと思われるが現在の所、まだそれほど研究されていない。

本報告は、FEMによるこの種の数値実験の可能性を検討し実証することを目的とする。幾つかの実験による結果と既往研究結果との対比によって、この可能性は一応実証されたいと思われる。取扱う対象は、微小振幅重力波の平面二次元問題に限ったが、一般の三次元問題や構造物一波波の動的応答問題に拡張することはそれほど困難でない。

なお、本研究では、FEMの定式化において新しく最小二乗変分原理を導入し、また波動理論におけるSommerfeldの放射条件を用いることによって、海のような無限領域の波動現象を有限なコンピュータに封じ込めている。詳しい理論的取扱いは参考文献(6), (7), (8), (9)を参照していただきたい。

2. 基礎理論

ここで取扱うのは、非圧縮性完全流体で渦無しの微小振幅重力波である。運動方程式、連続式および水面と底面における境界条件より、自由水面での未知関数 η , ϕ および ψ に関する基礎方程式が導かれる。

^{*)}両者の等価性は、代表的な差分スキームLax-Wendroff法などにも見られる。詳しくは文献(3)を参照されたい。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

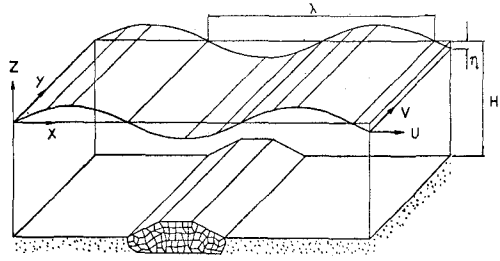


図-1 Notations for Surface Wave

ただし、記号は図-1に示す。gは重力加速度であり、Hは波の種類によって次の関係より定まる。

$$\left. \begin{aligned} H &= h && \text{長波} \quad \left(\frac{h}{L} < \frac{1}{25} \right) \\ H &= \frac{1}{k} \tanh(kh) && \text{浅水波} \quad \left(\frac{1}{25} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2} \right) \\ H &= \frac{1}{k} && \text{深水波} \quad \left(\frac{1}{2} < \frac{h}{L} \right) \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで、kは波数であり、 $k = 2\pi/L$ ，角速度 ω と次の関係がある。

$$\omega = gk \tanh(kh) \quad (3)$$

なお合成波に対しては、おのおのの成分に分解して各成分ごとに解を求めればよいことは言うまでもない。

2-1 非定常問題におけるFEM

図-2に示すように、対象領域を Ω ，その周辺境界をS，境界に沿う座標をs，外向き法線方向座標をnとする。

基礎方程式より、次の二乗積分を考える。

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{g} \{ (U_t + g\eta_x)^2 + (V_t + g\eta_y)^2 \} + \frac{1}{H} \{ \eta_t + H(U_x + V_y) \}^2 \right] dx dy \quad (4)$$

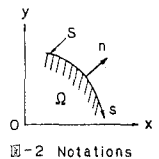


図-2 Notations

これより、正解においては

$$\delta I = 0 \quad (5)$$

この最小二乗変分原理を基にFEMのマトリックス法を展開する。

図-3のような三角形要素に領域 Ω を分割し、面積座標 L_k ($k = i, j, m$)を用いて、要素内のu, v, η を次のように仮定する。

$$U = L_i U_i, \quad v = L_j V_j, \quad \eta = L_m \eta_m \quad (6)$$

これを(4)式に代入して、条件(5)を適用することによって、次のようなマトリックス方程式を得る。

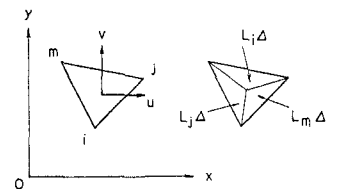


図-3 Element and Area Coordinate

$$\sum_{\Omega} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & [B] & [C] \\ [B] & 0 & 0 \\ [C] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_t \\ U_t \\ V_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g([B] + [C]) & 0 & 0 \\ 0 & H[B] & H[D] \\ \text{sym} & 0 & H[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_t \\ U_t \\ V_t \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (7)$$

にだし、(7)式は次の未知量に関する常微分方程式である。

$$\{\eta\} = \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \eta_j \\ \eta_m \end{Bmatrix}, \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (7')$$

式(7)より時間 t に関する微分項を離散化し、step-by-stepに u 、 v 、 η の答を求めていくことができる。

2-2 定常問題におけるFEM

基礎方程式(1)から u および v を消去すれば、同様の波動方程式を得る。すなわち、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH \cdot \nabla^2 \eta = 0 \quad (8)$$

$$\text{定常性が成立つとすれば、} \quad \eta = \bar{\eta} e^{-i\delta t} \quad (9)$$

したがって、式(8)は次のHelmholtz方程式となる。

$$\nabla^2 \bar{\eta} + k^2 \bar{\eta} = 0, \quad k^2 = \frac{6^2}{gH} \quad (10)$$

これよりFEMのマトリックス方程式を誘導し、解を求めればよい。しかしながら式(10)によって求められる $\bar{\eta}$ は定在波であり、完全重複波を表わすことしかできない。

無限の空間に広がる波を表現するためには、次の複素数表示を用いる必要がある。すなわち、

$$\eta = \bar{\eta} e^{i\delta t} = (\bar{\eta}^c + i\bar{\eta}^s) e^{-i\delta t} \quad (11)$$

また、波動方程式も(8)の代わりに x および y 方向の進行波の式で置き換える。

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \mp i k_x \bar{\eta} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} \mp i k_y \bar{\eta} = 0 \quad (12)$$

ここで、複号は正および負方向の進行を表わし、 k_x および k_y は x および y 方向の波数で波の進行方向を r とすると次のようになる。

$$k_x = k \cos(r, x), \quad k_y = k \sin(r, x) \quad (13)$$

以上の関係式から次の最小二乗変分原理を基にFEMの方程式を得ることとする。

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(\bar{\eta}_x^c \mp k_x \bar{\eta}^s)^2 + (\bar{\eta}_y^c \mp k_y \bar{\eta}^s)^2 - (\bar{\eta}_x^s \mp k_x \bar{\eta}^c)^2 - (\bar{\eta}_y^s \mp k_y \bar{\eta}^c)^2 \right] dx dy \quad (14)$$

この変分原理の自然条件として境界上では次の式が成立する。

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \mp i k \bar{\eta} = 0 \quad (15)$$

この式は平面二次元波動における次のZommerfeldの放射条件に対応している。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \mp i k \bar{\eta} \right) = 0 \quad (16)$$

FEMの詳しい取扱いその他は紙面の都合上末尾文献に譲ることとする。

3. 応用例

3-1. 水面じょう乱の伝播

今図-4の円形水域の中央部が何らかの原因で上昇したとして、これを放置すると、この変形がどのように伝播するかを追跡する。現象は軸対称として図のような扇形領域のみメッシュ分割して解析する。

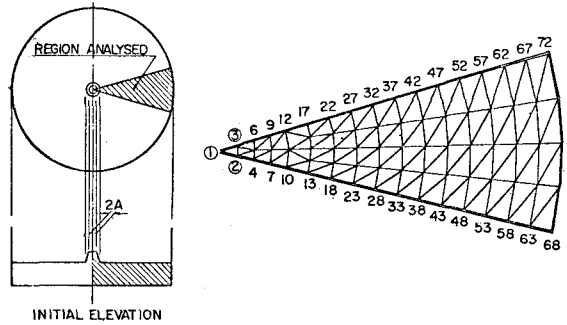


図-4 初期条件と要素分割

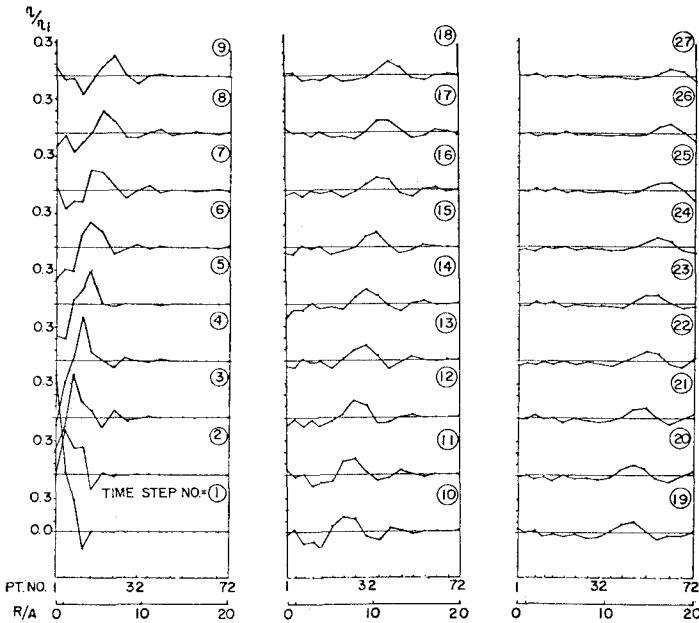


図-5 変位の伝播状態

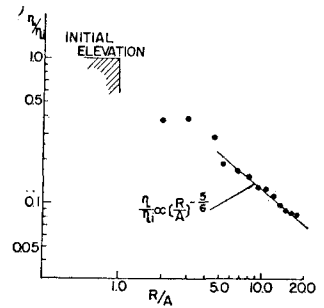


図-6 最大波高の減衰

結果を図-5および-6に示す。図-5は1~72の線上における波高分布の推移を表わしている。時間が進むにつれて、孤立波的様相を呈しつつR方向に広がる波が見られる。図-6には各位置において生ずる最大波高をプロットした。これにより波の伝播に伴う波高減衰と波源からの距離との関係がわかる。今から20年程前、ビキニ環礁で行われた海中核実験の観測記録によれば、水深の35倍より遠方で波高はRの $-5/6$ 乗で減衰したと報告されている。図-6より計算結果はこの結果と良く符合することがわかる。本ツェミレーションと現実の海中爆発とはいろいろ条件が異なることと恐れられ、検討すべき点が多いが、このような問題のツミレーションの可能性を示唆する一例として興味深い。

3-2. レゾネーター

次にレゾネーターを取上げてみる。

従来、防波堤としては重力型のものが大部分を占めていたが、最近新しい消波構造物の研究が活発になってきた。その主なものとしては、透過性防波堤、水平板、空気防波堤などがあげられるが、レゾネーターの利用もその一つとして考えられる。これらの消波構造物はいずれも従来の防波堤とは異って特徴を有している。したがっておのおのの特徴を明確にしておくことは、今後消波構造物を建設する際のそのタイプ選定に極めて有益であると思われる。これらの問題に対してもFEMは有力な手法となり得るが、ここでは特にレゾネーターを取り上げてみる。

計算例を示す。第1の例は図-7に示すようにAB間に壁があり行き止まりになっている水路にレゾネーターを設ける場合で、壁の位置での波高(Hw)と入射波高(Hi)の比 $R (= H_w / H_i)$ の入射波周期(T)による変化を図-8に示す。なお水路およびレゾネーターの水深は一定で16mである。この場合については、Valembois¹⁰⁾(1953)の実験結果がある。この両者の結果を

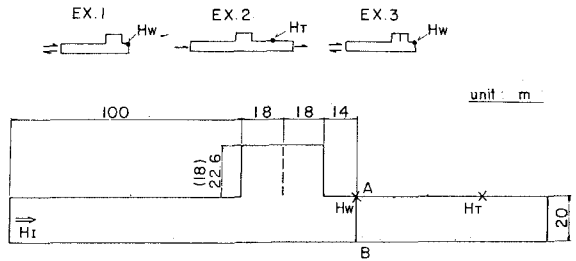


図-7 Resonator Model

比較してみると、Rが最大値をとる $T = 9.5$ 秒付近を除くと、ほぼ一致していると言えよう。また $T = 9.5$ 秒付近でFEM値が大きくなる原因としては粘性による減衰が無視されていることがあげられよう。

第2の例は、図-7のモデルにおいて壁を取り除きレゾネーターの一边を22.6mから18mにしに場合である。入射波周期を変化させて透過率(R) (Rは透過波高(HT)を用いて H_T / H_i と表わせる。)の変化をみのが図-9の破綻である。これによると $T = 7.22$ 秒で透過率は最小値をとりほとんど透過波が存在しない状態となる。このレゾネーターは $T = 7.22$ 秒の波にちよ

うど共振するものであり、その場合入射波はレゾネーターより先に進行しない(Valembois)ことがこのFEM解析の結果として確認できた。

このようにFEMによるレゾネーターの解析結果は過去の実験や理論と比較しても正しいものと思われる。さらに異なったタイプのレゾネーター、そしてあらゆる消波構造物の解析にも適用が可能であると思われる。

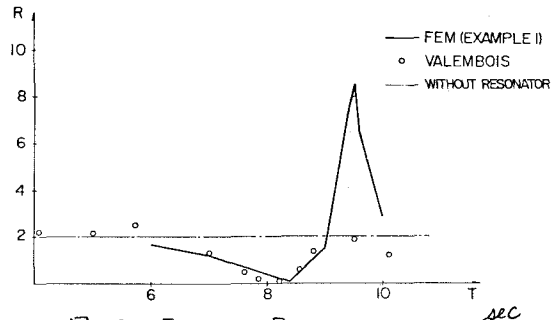


図-8. Frequency Response

3-3 湾水振動

津波等の長周期の波は、その周期が港湾の固有周期に近い場合に入射波の数倍の振幅を有する湾水振動を起し、港内の船舶および沿岸施設に大きな被害をおよぼすことがある。これらの港湾については湾の固有周期等の湾水振動特性を検討しておくことが必要となる。また、湾水振動においては港湾の開口部の幅が問題となることは

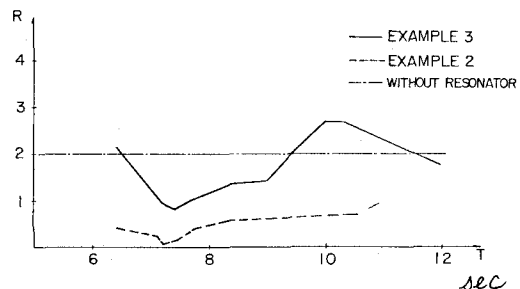


図-9. Frequency Response

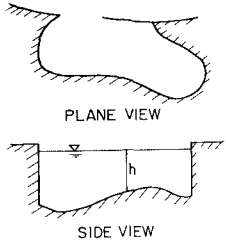
Miles and Munk¹¹⁾がHarbor Paradoxとして

指しているところである。解析に際しては湾口で生ずるかく乱波の扱い方が問題となるが、Miles and Munk はこれを Hankel 関数で表示し Ippen and Goda^[2] はフーリエ変換によって求めた。また Le Méhauté^[3] や梶清 は一次元解析ではあるが防波堤の効果などの非線形性を考慮して解析した。さらに最近では Hwang や Lee は積分方程式により任意形状の港湾を解析しているが水深変化は考慮できない。これらは定常波動問題として Helmholtz 方程式を解くものであるが、その他に波動方程式そのものを差分法によって解く方法もある。ここでは FEM により定常波動問題として湾水振動を解析することにする。この場合には任意港湾形状(図-10)に対しても容易に解が得られ、水深変化も任意である。

図-11に示すような実験港湾をモデルとし、その時の開口比(R)がそれぞれ1.0と0.33の場合をFEMによって解析して見る。水深(h)は一定で0.2mとする。現象は湾軸に対称であると考えられるので下半分だけ取出して図-12のようにメッシュ分割して解析した。

入射波長(L)を湾長(l)で無次元化した値に対する波高増幅率(M, $M = (\text{湾奥波高}) / (\text{入射波高})$)の変化を図-13に示す。なお、 ϕ は堀川、西村^[4](69)の実験値である。実験値と比較してみると、R=1の場合FEM値は実験値には近い値を与えていると思われる。

R=0.33の場合は実験値の方がかなり小さな値となっているが、これは開口比が小さいため渦の発生等によりエネルギーが失われるためであろう。次に図-14においてFEM値も他の解析解と比較してみると、FEM値は他の結果と同じ傾向を示しており(かつ他の解析におけるような仮定も含まれていない)、堀川、西村の実験値には他の解析解と比較してもよく合っている。以上述べたように湾水振動の問題に関してもFEMによる解析はかなり有力な手段であると言えよう。



Harbor of Arbitrary Shape and Depth
図-10

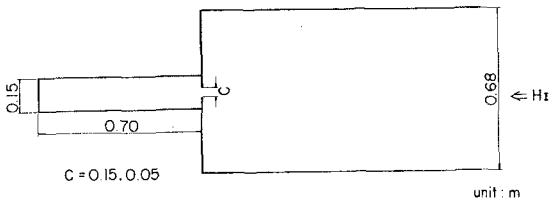


図-11. Harbor Model

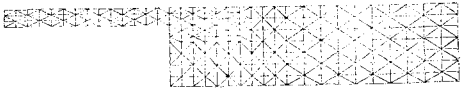


図-12. Mesh Division

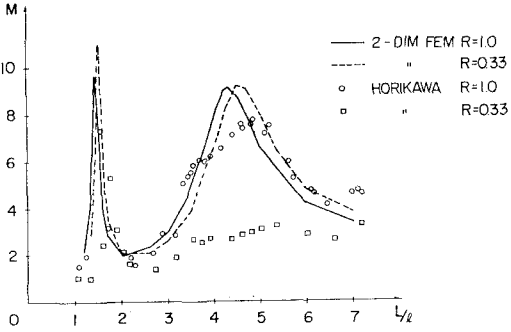


図-13. Frequency Response

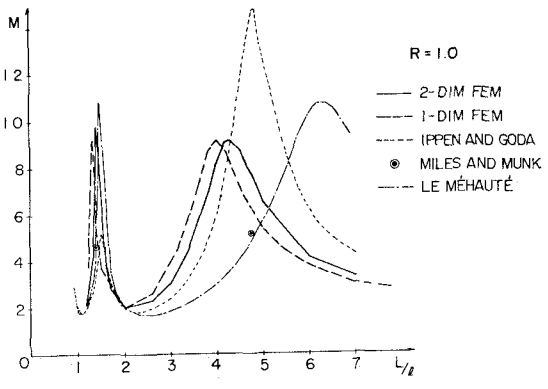


図-14. Frequency Response