土木学会論文集B2（海岸工学）
Vol. 66，No.1，2010，916-920

# 海食崖の侵食過程の計算力学のための流体・弾塑性体ハイブリッドモデルの構築

# Fluid-Elastoplastic Hybrid Model for Computational Mechanics of Wave-Induced Sea Cliff Erosion

五十里洋行[1]・後藤仁志[2]・新井智之[3]

Hiroyuki IKARI, Hitoshi GOTOH and Tomoyuki ARAI

A wave-induced erosion of a sea cliff may cause a cliff failure and a resultant large-scaled disaster. In order to simulate this kind of phenomenon, a formation process of notch due to repeatedly acting waves must be tracked by the analysis of stress in a sea cliff. In time-dependant large-deformation analyses, a particle method shows an excellent performance. In this study, a numerical simulation on a wave-induced erosion process of sea cliff is carried out by using a fluid-elastoplastic hybrid particle method with scouring model. Calculated results on a deformation of sea cliff are compared with previous experimental ones.

## 1. はじめに

軟質岩から成る海崖では波の作用による侵食が顕在化するが，その侵食が進行して崖崩壊等の大規模な地盤災害に繋がった例も少なくない．このような海崖侵食現象に関しては，川村ら（2006，2008）やSunamura（2002）によって実験的に検討されているが，数値解析による現象の再現が試みられた例はない．

海崖侵食現象を再現するためには，波の繰り返し作用による崖法先のノッチ（波食窪）の形成過程を追跡できること，および，ノッチの形状の変化（拡大）に伴う海崖近傍地盤内の応力解析が可能なことがモデルの必須の要件となる．このような時間発展的な大変形を伴う力学過程の追跡に対しては，粒子法が優れた適用性を示す．本稿では，著者らが既開発した流体-弾塑性体ハイブリッド型粒子法に簡易侵食モデルを加えて，海食崖の波浪侵食過程の数値解析を実施し，現象再現における粒子法の有効性を検証する．

## 2. 数値解析の概要

### （1）流体解析

流体解析には，CMPS法（Khayyer・Gotoh，2008）を用いる．CMPS法は，標準MPS法（Koshizuka・Oka，1996）で問題となる圧力擾乱を効果的に低減できる修正型のMPS法であり，本稿では，土粒子に作用する流体力を適正に評価して安定に解析するためにCMPS法を適用した．流体粒子の運動方程式は，Navier-Stokes式

$$\rho_l \frac{D\boldsymbol{u}_l}{Dt} = -\nabla p_l + \mu_l \nabla^2 \boldsymbol{u}_l + \boldsymbol{f}_{lsp} + \rho_l \boldsymbol{g} \quad \cdots\cdots (1)$$

である．ここに，$\boldsymbol{u}$：流速ベクトル，$p$：圧力，$\rho$：密度，$\boldsymbol{g}$：重力加速度ベクトル，$\mu$：粘性係数，$\boldsymbol{f}_{lsp}$：流体-弾塑性体間相互作用力ベクトルである．添字$l$は液相を表す．基礎式の各項は，粒子間相互作用モデルを通じて離散化され，圧力項におけるgradientおよび粘性項におけるLaplacianは以下のように記述される．

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{(p_j + p_i) - (\hat{p}_i + \hat{p}_j)}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^2} (\boldsymbol{r}_{ij}) w(|\boldsymbol{r}_{ij}|) \right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\hat{p}_i = \min_{j \in J}(p_i, p_j), \; J = \{ j : w(|\boldsymbol{r}_{ij}|) \neq 0 \} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\langle \nabla^2 \boldsymbol{u} \rangle_i = \frac{2D_0}{n_0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i) w(|\boldsymbol{r}_{ij}|) \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\lambda = \sum_{j \neq i} w(|\boldsymbol{r}_{ij}|) |\boldsymbol{r}_{ij}|^2 \Big/ \sum_{j \neq i} w(|\boldsymbol{r}_{ij}|) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i \quad \cdots\cdots (6)$$

ここに，$D_0$：次元数，$n_0$：基準粒子数密度，$\boldsymbol{r}_i$：粒子$i$の位置ベクトル，$\lambda$：モデル定数である．CMPS法では，運動量保存性が確保されるgradientモデルが適用される．

粒子間相互作用の及ぶ範囲（影響円）は，重み関数

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & for \quad r \leq r_e \\ 0 & for \quad r > r_e \end{cases} \quad \cdots\cdots (7)$$

によって制限され，粒子数密度は重み関数を用いて

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\boldsymbol{r}_{ij}|) \quad \cdots\cdots (8)$$

と定義される．非圧縮条件は，粒子数密度を常に一定値$n_0$に保つことによって満足される．これらは，標準MPS法と同様である（越塚，2005）．

### （2）地盤弾塑性解析

#### a）運動方程式

本稿では，地盤内応力解析に，五十里ら（2009）の弾塑性モデルを適用する．土粒子の運動方程式は，

$$\rho_s \frac{D\boldsymbol{u}_s}{Dt} = \delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \rho_s \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_{colp} - \boldsymbol{f}_{lsp} \quad \cdots\cdots (9)$$

1 正会員　博（工）　京都大学助教　工学研究科社会基盤工学専攻
2 正会員　博（工）　京都大学教授　工学研究科社会基盤工学専攻
3 学生会員　京都大学工学研究科社会基盤工学専攻

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda^e \mathrm{tr}(\varepsilon^e)\boldsymbol{I}+2\mu^e\varepsilon^e \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\lambda^e=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ ;\ \mu^e=\frac{E}{2(1+\nu)} \quad \cdots\cdots (11)$$

と表される．ここに，$\delta$：土粒子間の接続状態に関するデルタ関数，$\boldsymbol{f}_{colp}$：弾性接続状態にない土粒子間が接触したときに生じる衝突力ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$：応力テンソル，$\boldsymbol{\varepsilon}^e$：弾性ひずみテンソル，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$：体積ひずみ，$\boldsymbol{I}$：単位テンソル，$\lambda^e$, $\mu^e$：ラメの定数，$E$：弾性定数，$\nu$：ポアソン比である．土粒子は，初期状態においては連続体の一部と見なし，影響範囲内の他の土粒子と弾塑性モデルによる粒子間相互作用計算を行う（$\delta=1$）．ただし，粒子間の接続が切断された場合，あるいは元々影響範囲内にない土粒子間が新たに接触した場合には，個別要素法と同様のバネ-ダッシュポットモデルによって反発力$\boldsymbol{f}_{colp}$を計算する．初期に接続状態にあったすべての粒子との接続が切断されて完全に孤立する（$\delta=0$）と，DEM-MPS法（後藤ら，2003）と同様の扱いとなる．

**b）弾性計算**

地盤は，降伏条件を満足するまでは，弾性体として挙動する．本稿で用いた弾性体モデルは宋ら（2005）と同様のものである．

粒子$i$の体積ひずみは，

$$\mathrm{tr}(\varepsilon^e)_i=\frac{D_0}{n_0}\sum_{j\neq i}^{N_{cont}}\frac{\boldsymbol{s}_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|) \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\boldsymbol{r}^0_{ij}=\boldsymbol{r}^0_j-\boldsymbol{r}^0_i \quad \cdots\cdots (13)$$

と書ける．ここに，$\boldsymbol{s}_{ij}$：粒子$i, j$間の相対変位ベクトル，$\boldsymbol{r}^0_i$：粒子$i$の初期位置ベクトル，$N_{cont}$：接続粒子数である．相対変位ベクトルは，

$$\boldsymbol{s}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}-\boldsymbol{R}(\theta_{ij})\boldsymbol{r}^0_{ij} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\boldsymbol{R}(\theta_{ij})=\begin{bmatrix}\cos\theta_{ij} & -\sin\theta_{ij}\\ \sin\theta_{ij} & \cos\theta_{ij}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (15)$$

$$\theta_{ij}=\frac{\theta_i+\theta_j}{2} \quad \cdots\cdots (16)$$

と記述され（ここに，$\theta_i$：粒子$i$の回転角），剛体回転成分が除去される．式(12)を式(10)の右辺第1項に代入して発散をとれば，

$$\lambda^e\nabla\cdot(\mathrm{tr}(\varepsilon))_i\boldsymbol{I}=\lambda^e\frac{D_0}{n_0}\sum_{j\neq i}^{N_{cont}}\frac{(\mathrm{tr}(\varepsilon)_j\boldsymbol{I}+\mathrm{tr}(\varepsilon)_i\boldsymbol{I})}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|) \quad \cdots\cdots (17)$$

となる．

ひずみテンソル$\boldsymbol{\varepsilon}_i$は，剛体回転成分を除去すれば，

$$\varepsilon^e=\nabla\boldsymbol{s}^e \quad \cdots\cdots (18)$$

と書けるので（ここに，$\boldsymbol{s}^e$：相対変位ベクトルの弾性成分），式(10)の右辺第2項の発散をとると，

$$2\mu^e\varepsilon^e_i=2\mu^e\langle\nabla^2\boldsymbol{s}^e\rangle_i=2\mu^e\frac{2D_0}{n_0}\sum_{j\neq i}^{N_{cont}}\frac{\boldsymbol{s}^e_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|^2}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|) \quad \cdots\cdots (19)$$

となり，式(4)と同様にLaplacianモデルが適用される．

粒子間にせん断応力が作用するとトルクが発生する．これは，離散化に起因する数値的エラーに相当し，これを放置すれば角運動量が保存されない．そこで，このトルクを相殺するように粒子に回転の自由度を与える．

$$I_m\frac{\partial\omega_i}{\partial t}=I_m\frac{\partial\omega_j}{\partial t}=-\frac{1}{2}T_{ij} \quad \cdots\cdots (20)$$

$$T_{ij}=-\boldsymbol{R}(\theta_{ij})\boldsymbol{r}^0_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ij} \quad \cdots\cdots (21)$$

$$\boldsymbol{F}_{ij}=2\mu\frac{m}{\rho}\frac{2D_0}{n_0}\frac{\boldsymbol{s}_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|) \quad \cdots\cdots (22)$$

ここに，$I_m$：慣性モーメント，$T_{ij}$：粒子$i, j$間に生じるトルク，$m$：粒子1個の質量である．粒子の回転角は，式(20)によって得た角加速度を時間積分して求める．

**c）塑性・破壊計算**

一般的な弾塑性解析と同様に，ひずみ増分が弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の和で表されるとすると，

$$\{d\varepsilon\}=\{d\varepsilon^e\}+\{d\varepsilon^p\} \quad \cdots\cdots (23)$$

と書ける．ここで，{}はテンソルをベクトル形式で記述することを意味する．すなわち，式(10)のHookeの法則を増分形にして記述すると，

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\}=[D^e]\{d\varepsilon^e\}=\begin{bmatrix}\lambda^e+2\mu^e & 2\mu^e & 0\\ 2\mu^e & \lambda^e+2\mu^e & 0\\ 0 & 0 & \mu^e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d\varepsilon^e_x\\ d\varepsilon^e_y\\ d\gamma^e_{xy}\end{Bmatrix} \cdots (24)$$

となる（ここで，$\gamma_{xy}$：工学ひずみ）．

塑性ひずみ増分は，応力のスカラー関数である塑性ポテンシャル$\psi(\boldsymbol{\sigma})$が存在すると仮定する流れ則

$$\{d\varepsilon^p\}=d\Lambda\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\} \quad \cdots\cdots (25)$$

に従う．ここに，$d\Lambda$：正のスカラー量である．$d\Lambda$は，コンシステンシー条件

$$df_y=\left\{\frac{\partial f_y}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T\{d\boldsymbol{\sigma}\}=0 \quad \cdots\cdots (26)$$

を用いて求められる．ここに，$f_y$：降伏関数である．上式は，地盤を弾完全塑性体（降伏後も降伏曲面が変化しない）として，降伏曲面上では降伏関数の全微分が0であることから得られる．式(26)に式(23)～式(25)を代入すると$d\Lambda$が求まる．

$$d\Lambda=\frac{\left\{\frac{\partial f_y}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T[D^e]\{d\varepsilon\}}{\left\{\frac{\partial f_y}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T[D^e]\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}} \quad \cdots\cdots (27)$$

これを用いて塑性ひずみを得る．なお，本稿では，降伏関数および塑性ポテンシャル関数としてDrucker-Prager式を用いた．

本弾塑性モデルでは，土塊が分裂するような大変形に対応するために，初期に連続体を形成していた粒子間の接続を計算途中で切断する．これに関しては，五十里ら(2009)と同様に塑性ひずみの第2不変量に閾値を設けて切断の条件とした．

**c）侵食モデル**

本稿で適用する侵食モデルの枠組みは，これまでに著者らが使用してきた簡易侵食モデル（例えば，後藤ら，2002）と同様であるが，pick-upの対象となるのは土粒子であるので，後述するpick-up条件を満足した時点で，周

囲の土粒子との接続を切断するものとする．このとき，pick-upされた土粒子については，従来の侵食モデルのように移動固相粒子ではなく，水粒子にフラッグを変更する．実現象では，海崖を形成する土砂が波の作用により徐々に侵食され，細粒化されて沖に流送されるが，計算において現実の土砂粒子と同スケールの粒子を用いるのは極端な高負荷となって非効率であるので，ある程度空間解像度（粒子径）を粗く設定して離散化する必要がある．1つの粒子をpick-upすることによって粒子1個分の体積の土砂が流出することになるが，それは瞬間的に流出したものではなく，単一の計算粒子に相当する体積の砂が徐々に沖へ流出したものである．そこで，pick-up以後の微細粒子の流送過程は解析の対象外としてpick-up時に土粒子から水粒子に変質させることにした．以下に，本稿で用いた侵食モデルの概要を示す．

本稿で用いるフラッグは以下の4種類である．

$$\Xi=\begin{cases}0 & : \text{水と直接接する土粒子}\\ 1 & : \text{地盤内部の土粒子}\\ 2 & : \text{固定壁粒子}\\ 3 & : \text{水粒子}\end{cases} \quad \cdots\cdots (28)$$

フラッグの変更は，近傍流速に基づいて行われる．近傍流速は，当該粒子周囲の局所的な斜面傾斜角に平行な成分と鉛直な成分とに分けて，

$$u_b=\frac{\sum_j w_u(r)\{u_j\cos\theta-v_j\sin\theta\}}{\sum_j w_u(r)} \quad \cdots\cdots (29)$$

$$v_b=\frac{\sum_j w_u(r)\{u_j\sin\theta+v_j\cos\theta\}}{\sum_j w_u(r)} \quad \cdots\cdots (30)$$

$$w_u(r)=\begin{cases}1 & for \quad r\le r_{ev}\\ 0 & for \quad r>r_{ev}\end{cases} \quad \cdots\cdots (31)$$

と定義される（$\theta$：斜面傾斜角，$r_{ev}=2.1d_0$）．pick-upの条件は，表層せん断作用と水撃作用によるものを想定し，表層せん断作用については，

$$\text{if}(\overline{u_b}>u_{bcr} \text{ and } \Xi_i=0) \text{ then } \Xi_i=3 \quad \cdots\cdots (32)$$

$$\overline{u}=\frac{1}{N_k+1}\sum_{k=-N_k/2}^{N_k/2} u(t+k\Delta t) \quad \cdots\cdots (33)$$

と書け，水撃作用については，

$$\text{if}\left(\begin{array}{c}\overline{v_b}(t+\Delta t)-\overline{v_b}(t)>v_{bcr}\\ \text{and}\\ \Xi_i=0\end{array}\right) \text{ then } \Xi_i=3 \quad \cdots\cdots (34)$$

と記述される．いずれも土粒子の位置に存在すると仮定する微小な土砂粒子が，限界流速$u_{bcr}$, $v_{bcr}$を超えた流れによって徐々に流出し，土粒子1個の体積分を超えた際に土粒子がpick-upされることを想定している．本来であれば，地盤の侵食速度に対応するように，限界流速やpick-upまでの時間などのパラメータを設定するべきであるが，現象の進行速度は非常に遅いので，完全に再現することは困難である．そこで，本稿では侵食速度については言及せず，地盤の時間スケールの観点では定性的な変形過程に焦点を当てるものとして，一波当たりの侵食量が過大とならない範囲でチューニングし，$u_{bcr}=0.5$，$v_{bcr}=0.1$，$N_k=200$と決定した．

## 3. 海食崖の波浪侵食過程

### （1）計算領域・計算条件

**図-1**に，計算領域を示す．領域最右端の造波板から1.2mの水平床部と1/2勾配の斜面を経て，60°の斜面勾配の海食崖（弾塑性領域）を設置する．海食崖の天端幅は0.25mで，初期水位高さから天端までの高さは0.33mとした．水深は0.23mとし，周期2.07s，波高0.06mの規則波を入射させる．粒子径は，0.01mとした．**表-1**に，本計算で用いた地盤パラメータを示す．なお，海食崖の諸元および地盤パラメータは，川村ら（2008）の実験で使用された値を参考に設定した．実験では模型縮尺1/30であるのに対し，本計算では計算コストが過大とならないように解像度と粒子数のバランスを考慮し，模型縮尺を約1/23としている．

### （2）計算結果

**図-2**に，計算結果の瞬間像を示す．各瞬間像の右上の濃淡図では，地盤内のせん断応力分布を示している．ただし，切断条件を満足した粒子は最濃色で表示している．まず，計算開始直後の初期応力分布（$t=0.0$s）では，海食崖斜面法先の1/2勾配斜面との接続地点周辺で最も大きなせん断応力が作用する．侵食は，計算開始2.4秒後あたりから始まり，徐々に円弧状にノッチが形成されていく．おおよそ初期水位高さ（$y=0.0$m）で最も深く侵食され，その最深部で徐々に大きなせん断応力が作用していく．このようなノッチの形状に関する特徴は，川村ら（2008）の実験結果と良好に対応している．ノッチが$x=-0.15$mまで到達すると，斜面崩壊が発生し（$t=27.42$s），土塊が水中に突入する．

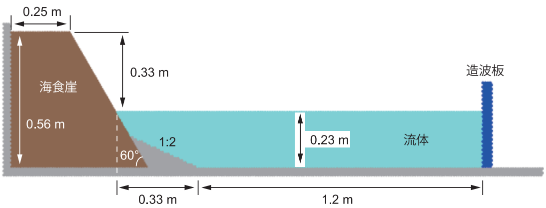


**図-1** 計算領域

**表-1** 地盤パラメータ

| | |
|---|---|
| 弾性定数$E$（N/m²） | $1.5\times10^6$ |
| ポアソン比$\nu$ | 0.35 |
| 粘着力$c$（N/m²） | $1.95\times10^3$ |
| 内部摩擦角$\phi$（°） | 29.2 |
| 土粒子密度$\rho_s$（kg/m³） | $1.8\times10^3$ |

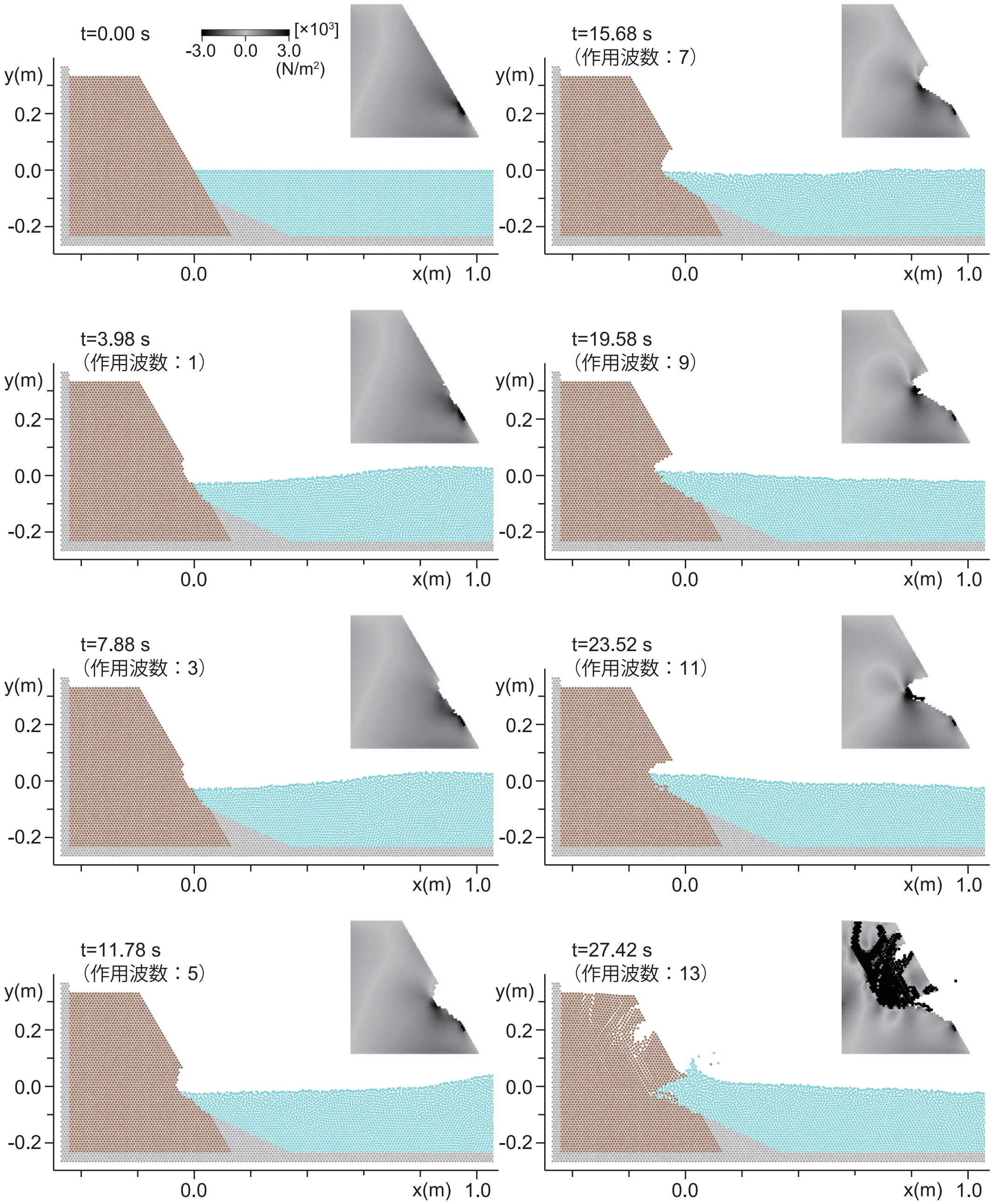


**図-2** 海食崖の波浪侵食過程

**図-3**に，本計算で確認されたすべり面を実験結果（図中の点線）と併せて示す．本計算では，主に2段階に分かれてすべり面が発達した．1段階目のすべり面は，ノッチ最深部から60°よりやや大きめの角度で左上方向に進行するが，海食崖天端に到達する前に途中で右方向に曲がり，海食崖法面を分断した（$t = 27.28$s）．2段階目は，1段階目のすべり面の外側を左上方向に進行し，途中でおよそ真上方向に進路を変えて海食崖天端に到達した（$t = 27.34$s）．すべり面について実験結果と比較すると，天端における前面からすべり面到達位置までの海食崖の後退距離$L$が実験結果よりも大きい結果となった．この原因としては，本数値モデルで間隙水圧を扱っていないことが考えられる．ノッチ最下端からノッチ最深部までの侵食距離$x$は，実験では実物換算値で約3.7mであるのに対し，本計算では，約4.6mである．これは，本計算で間隙水圧を考慮していない分だけ地盤強度が高く評価さ

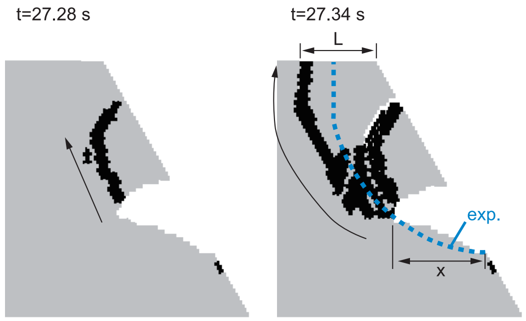

図-3　すべり面

れ，斜面崩壊に至るまでの侵食距離が大きくなったと考えられる．

## 5. おわりに

本稿では，流体・弾塑性体ハイブリッド粒子法に簡易侵食モデルを付加して，海食崖の波浪侵食過程のシミュレーションを実施した．繰り返し作用する波浪によって徐々に海食崖が侵食され，最終的に斜面崩壊が発生する過程がシミュレーションされた．また，計算効率上の制約から侵食の進行速度については再現対象とはしないものの時間発展型の計算を実施し，少なくとも定性的には時系列的に変形する地盤に伴って変化する地盤内部の応力の推定が可能となった．

今後の課題としては，先述したように間隙水圧のモデル化が急務である．特に，著者らの昨年度の計算（五十里ら，2009）では，崩壊土砂により発生する津波の規模を推定するのに崩壊土量の評価，つまり，すべり面の正確な推定が重要となるので，より精度の高いモデルとするため，土質力学モデルの改良を続けたい．

## 参 考 文 献

五十里洋行・後藤仁志・吉年英文（2009）：斜面崩壊誘発型津波の数値解析のための流体-弾塑性体ハイブリッド粒子法の開発，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol. B2-65，No.1，pp. 46-50.

川村志麻・M. C. R. Davies, P. Dong and X. Wu（2006）：海岸侵食によるSoft Cliffsの斜面崩壊に関する検討，海岸工学論文集，第53巻，pp. 891-895.

川村志麻・栗林正樹・三浦清一（2008）：波の侵食作用を受ける海岸斜面の力学特性とその評価，海岸工学論文集，第55巻，pp. 536-540.

越塚誠一（2005）：粒子法，丸善，144 p.

後藤仁志・酒井哲郎・林　稔・織田晃治・五十里洋行（2002）：遡上津波の戻り流れによる護岸法先洗掘のグリッドレス解析，海岸工学論文集，第49巻，pp. 46-50.

後藤仁志・林　稔・安藤　怜・鷲見　崇・酒井哲郎（2003）：砂礫混合層を伴う混相流解析のためのDEM-MPS法マルチスケールリンクの開発，海岸工学論文集，第50巻，pp. 26-30.

宋　武燮・越塚誠一・岡　芳明（2005）：MPS法による弾性構造体の動的解析，日本機械学会論文集（A編），第71巻701号，pp. 16-22.

Khayyer, A. and H. Gotoh (2008): Development of CMPS method for accurate water-surface tracking in breaking waves, Coastal Eng. Jour., Vol. 50, No.2, pp. 179-207.

Koshizuka, S. and Y. Oka (1996): Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid, Nucl. Sci. Eng., Vol. 123, pp. 421-434.

Sunamura, T. (2002); A Study on the Elevation of Shore Platforms Initiated by Broken Waves: Analysis of Wave-Basin Experiment Data, Transactions, Japanese Geomorphological Union, 23-3, pp. 387-394.