

浅水流方程式と乱流モデルを組み合わせた孤立波遡上の数値計算

Coupling between Shallow Water Equation and $k-\omega$ Model for Simulating Solitary Wave Run-Up

Mohammad Bagus Adityawan¹・田中 仁²

Mohammad Bagus Adityawan and Hitoshi TANAKA

Solitary wave is considered to resemble a tsunami wave. Thus solitary wave study is very important for coastal area. The shallow water equation (SWE) model is commonly used in tsunami modeling. The Manning method is generally used to assess the bed stress term. Nevertheless, boundary layer approach in assessing the bed stress would provide a more accurate prediction. In this study, a new method for solitary wave run up modeling has been developed by simultaneous coupling between SWE and $k-\omega$ model. Bed stress in the SWE is assessed directly from the boundary layer equation using $k-\omega$ model. The new method was used to simulate solitary wave run up (Synolakis, 1987). Water surface and run up height were compared. Further analysis to the momentum balance was conducted.

1. はじめに

2004年に発生したインド洋大津波による被災としては、強い流れがもたらした人的・物的被害の他に、多量の土砂の輸送・海浜の侵食も報告されている。後者についてこれまで多くの計算がなされているが、いずれも抵抗則として定常流のマニングの粗度係数や摩擦係数を援用している（例えば、西畑ら、2005；高橋ら、2008）。現実の津波の下での底面境界層は複雑な非定常性を伴うものであるにも関わらず、その点を反映させた数値計算の事例は皆無である。底面境界層の扱いを高度化することにより、遡上現象・流速値などの改善も期待される。このような背景から、近年、孤立波に伴う底面境界層に関する水理実験（Liuら、2007；Sumerら、2008, 2010）および乱流モデルを用いた数値計算（Vittori・Blondeaux, 2008a, 2008b；Suntoyo・Tanaka, 2009）が実施されている。ただし、これらの既往の研究においてはいずれも水平床上を伝搬する孤立波（あるいはそれを模擬した一様断面内の管内振動流）を対象として行ったものであり、斜面の存在による波の変形および遡上過程を取り扱ったものではない。

そこで、本研究においては、抵抗則として通常用いられるマニング則に代わり、乱流モデルを浅水流方程式に連立させて長波の遡上過程を解析する手法を開発し、Synolakis（1987）による水面波形に関する実験結果と遡上高さに関する経験式を対象としてモデルの精度を検証した。また、従来の定常流抵抗則（マニング式）を援用した底面せん断力算定手法に基づく数値計算結果とも比較し、誤差評価を行った。さらに、運動方程式中の各項

の大小比較を行い、遡上過程における支配的な項に関する検討を実施した。

2. 数値計算手法と検証データ

(1) 数値計算手法

水理モデルの基礎式は浅水流方程式である。式中の底面摩擦の項には通常マニング式等の定常流の知見に基づく表示式を用いることが多いが、ここでは代表的な乱流モデルとして、Wilcox（1988）による鉛直二次元の $k-\omega$ モデルを使用した。これは、既往の研究により、同モデルの底面せん断力評価精度が $k-\varepsilon$ モデルなどの他のモデルに比べて優れていることによる（Suntoyoら、2008；Sanaら、2009）。

実際の計算においては、まず、Mc.Cormackの予測子・修正子法を用いて浅水流方程式を数値的に解き、水位・流速を得る。次に、得られた流速値を境界層の外縁流速とし、これから得られる圧力勾配を鉛直二次元の境界層方程式に代入し、 $k-\omega$ モデル基礎式とともに連立して数値的に解いている。 $k-\omega$ モデルの数値計算にはSanaら（2009）と同様に陰形式の差分法を用いている。境界層内の鉛直方向の格子数は50であり、底面から離れるにしたがい等比級数的にメッシュ間隔が広がるように設定している。

なお、前報（Adityawanら、2009）においては、まず、通常の計算手法と同様にマニングの粗度係数を用いて浅水流方程式を数値的に解き、次の過程において、得られた流速値を境界層外縁流速として使い、これを鉛直一次元の乱流モデルの圧力勾配に代入して底面境界層の数値計算を行っている。本計算法においてはこのようなマニングの粗度係数を用いた計算が不要であり、浅水流方程式を $k-\omega$ モデルを連立させて解いている点、および鉛直二次元の境界層方程式を用いている点が前報と異なっ

1 学生会員 M. Eng. 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻
2 フェロー 工博 東北大学教授 工学研究科土木工学専攻

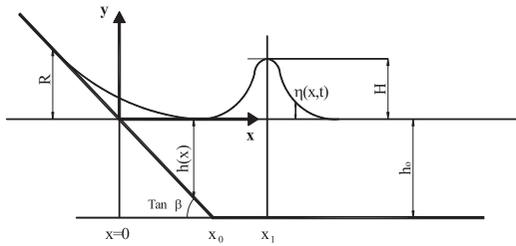
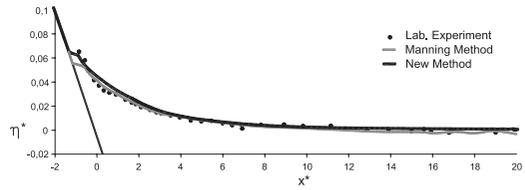
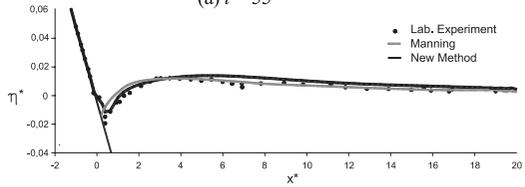


図-1 Synolakis (1987) の実験条件



(a) $t^*=55$



(b) $t^*=65$

図-2 波形の比較

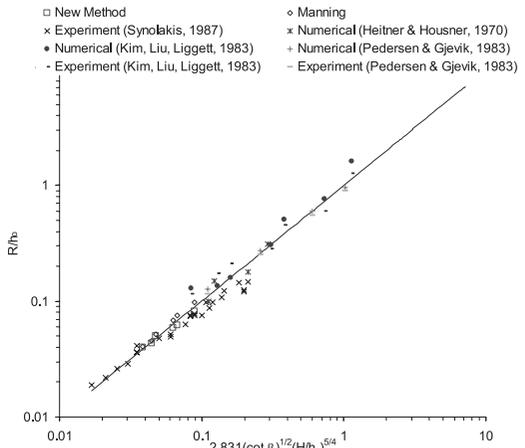


図-3 孤立波の遡上高さ

いる。

斜面上を遡上する波の先端条件には微小な打ち切り水深を与えた。なお、波の最先端部に形成される薄層流れの厚さは境界層厚さを下回ることもあり、このような場合には境界層モデルの適用が困難となる。そこで、波動境界層厚さの積もりをもとに、先端部の水深が1.2cmより小さい部分についてはElfrink・Fredsoe (1993) の計算法を用いて、 $k-\omega$ モデルは使用していない。

(2) 検証データ

検証データとしてはSynolakis (1987) による実験結果を対象とした。実験の概要ならびに以下で用いる変数の定義を図-1に示した。斜面勾配は後述する表-1に示されるケースのうち最上段の $\cot\beta=19.85$ である。また、Synolakis (1987) による孤立波遡上高さの実験式との比較も行った。この際、表-1に示す様に斜面勾配を6種類に変化させている。さらに、波の伝播・遡上過程における浅水流方程式の各項の大小を評価し、式中の卓越項について検討を行った。

3. 結果

(1) 斜面上の水面波形

Synolakis (1987) の実験条件に対して、非線形長波の基礎式をもとに遡上過程の数理計算を行った (図-2濃い実線)。実験条件は $\cot\beta=19.85$, $H/h_0=0.019$ であり、非碎波条件の実験ケースである。本ケースについて、平坦床部における入射波条件をもとにSuntoyoら (2009), Sumerら (2010) の定義に従って孤立波の下でのレイノルズ数 R_c を計算すれば、以下の通りである。

$$R_c = \frac{U_c a_m}{\nu} = 1600 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 U_c : 孤立波頂部における最大流速, a_m : 境界層外縁における水粒子の全軌道振幅の1/2, ν : 流体の動粘性係数である。このレイノルズ数はSumerら (2010) による遷移限界レイノルズ数 ($2 \times 10^5 < R_c < 5 \times 10^5$) に比べて十分に小さいことが確認された。これより、沖側一様水深部の境界層内の流れは層流状態であると考えられ

る。実際、数値計算においても、遡上域を含む全領域において乱れ強さ k の値は無視できるほどに小さいものであることが確認された。

図-2によれば、水面形は良好な一致を示しており、モデルの妥当性が示された。細線はマンニングの式を用いた計算であり、本モデルの結果がより実験に近い。なお、無次元時間の定義は $t^*=t(g/h_0)^{0.5}$ (g : 重力加速度) であり、また、図中の η^* および x^* は、水面高さ η および水平座標 x を h_0 により無次元化したものである。

(2) 遡上高さの比較

図-3はSynolakis (1987) による遡上高さの経験式との比較を示したものである。経験式は次式で与えられる。

$$\frac{R}{h_0} = 2.831(\cot \beta)^{1/2} \left(\frac{H}{h_0}\right)^{5/4} \dots\dots\dots (2)$$

図中にはSynolakisによる実験値、本研究による数値シミュレーション結果の他に、Heitner・Housner (1970),

Kimら (1983), Pedersen・Gjevik (1983) による数値計算の結果も示している. 本モデルによる計算結果は経験式と極めて良好な一致を示している.

表-1は無次元遡上高さ (R/h_0) に関して, Synolakis (1987) による経験式, マニング式を用いた数値計算, 本数値計算の比較を示したものである. ここで, マニングの粗度係数としては, 広範囲で変化させたもののうち, もっとも実験値との対応が良好となる値として $n=0.043$ を用いている. 本研究の手法による推定値はRMSEも小さく, きわめて高い精度が得られていることが分かる.

なお, 図-3から明らかなように, 経験式自体も誤差を含んでおり, 表-1に示した結果のみで, マニング式による計算と本手法との優劣を論じることは困難である. ただし, 本手法では上述のようなキャリブレーションが不要であり, また層流・乱流間の遷移も乱流モデルにより自動的に計算されるなどの利点を有している.

(3) 底面せん断力の経時変化

図-1に示した非碎波条件のケースに対して, 斜面上の $x^*=2$ および $x^*=4$ における水平流速 U および底面せん断力 τ_0 の経時変化を図-4に示した. ただし, 図中でこれらの物理量は無次元化されて示されており, その定義は, $U^*=U/U_c$, $\tau_0^*=\tau_0/(\rho U_c^2)$ (ρ : 流体密度) であり, また, 波峰における流速最大値は $U_c=(g/h_0)^{0.5}H$ から求めている.

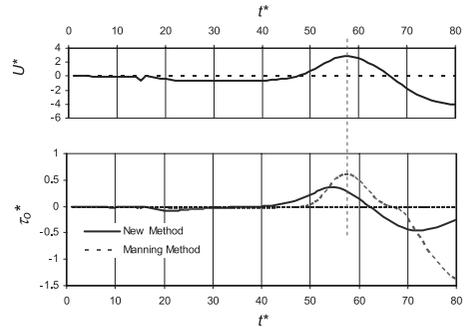
本モデルの計算結果によれば, $x^*=2$ および $x^*=4$ のいずれの点においても底面せん断力は流速波形に対して位相の進みが見られる. これは波動境界層に見られる特有の現象である (例えば, Fredsoe・Deigaard, 1992). 一方, 通常の数値計算において用いられるマニングの式による算定では, 各位相において流速の瞬時値の二乗に比例する底面せん断力を想定しているために, ベル形状のせん断力波形を示している. また, 当然のことながら上述のような非定常運動に特有の位相の進みは見られない. 特に谷位相において二つの計算手法による差違が著しい.

(4) 浅水流方程式中の各項の評価

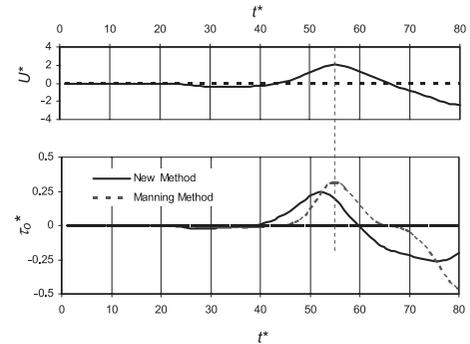
図-1に示した非碎波条件のケースを代表例に選び,

表-1 数値計算と経験式との比較 ($H/h_0 = 0.019$)

cotβ	R/h_0			$(R/h_0)_{cal} - (R/h_0)_{Eq(2)}$ ²	
	経験式 式(2)	数値計算 (マニング式)	本数値 計算	数値計算 (マニング式)	本数値 計算
19.85	0.0890	0.0985	0.0815	0.000090	0.000056
11.43	0.0675	0.0748	0.0618	0.000053	0.000033
10.00	0.0632	0.0688	0.0593	0.000032	0.000015
5.67	0.0476	0.0521	0.0498	0.000021	0.000005
5.00	0.0447	0.0456	0.0437	0.000001	0.000001
3.73	0.0386	0.0406	0.0398	0.000003	0.000001
			RMSE	0.005781	0.004305



(a) $x^*=2$



(b) $x^*=4$

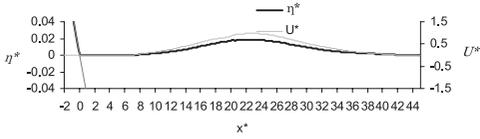
図-4 境界層外縁流速および底面せん断力の変化

図-5(a), 図-6(a) に示した位相を対象に運動式の各項の大きさを評価した. ここで, 下記の浅水流方程式中の各項をA, Bなどにより略記することとする.

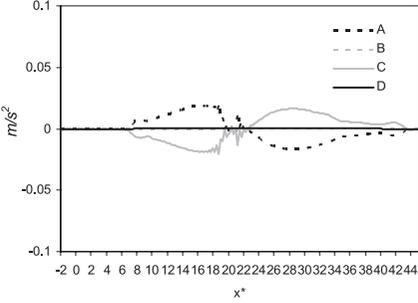
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial (h+z_b)}{\partial x} + \frac{\tau_0}{D} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここで, h : 水深, z_b : 底面の高さである. 本研究のモデルによる数値計算によれば, 図-5(b)に見られるように右側の一様水深部では摩擦項Dは無視できるほどの小さい値である. 局所項と圧力勾配項がバランスしており, この領域における摩擦項の表現法は波の伝搬過程に対して重要ではない. 一方, 遡上過程においては図-6(b)に示すように左端部の遡上部において摩擦項と圧力勾配項がバランスしており, 定常流と同様なメカニズムによる運動量バランスが見られる. このため, 特にこの遡上部において底面境界層の精緻なモデル化がきわめて重要であることを示している.

次に, 図-5(a), 図-6(a) に示した非碎波条件のケースと全く同じ入力条件を用いて, 抵抗則についてのみマニング式を援用した計算結果を図-7, 図-8に示した. この計算法によっても, 基本的な各項のバランスについて大きな差異は見られない. ただし, 波の先端部において水深の1/3乗に逆比例する摩擦係数を使用しているために,

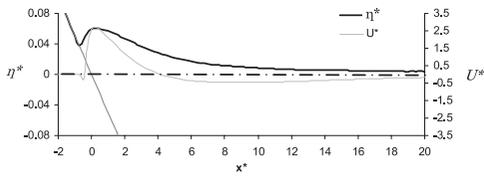


(a) 水面形状と流速

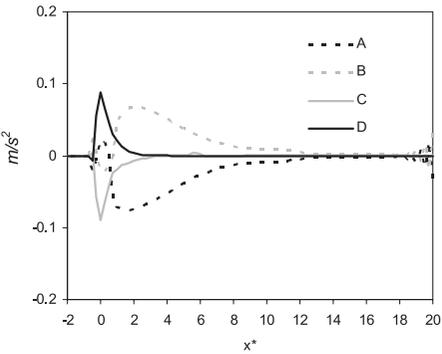


(b) 各項の大きさ

図-5 運動方程式各項の評価 (本計算法, $t^*=16$)

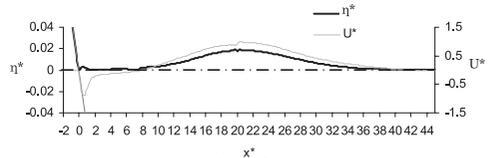


(a) 水面形状と流速

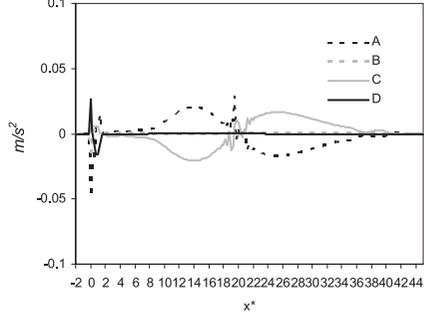


(b) 各項の大きさ

図-6 運動方程式各項の評価 (本計算法, $t^*=52$)

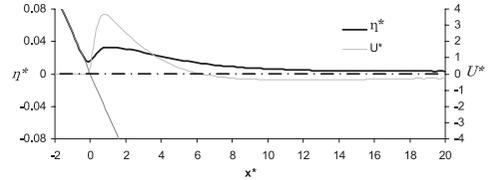


(a) 水面形状と流速

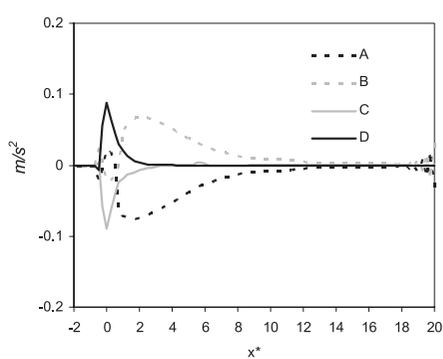


(b) 各項の大きさ

図-7 運動方程式各項の評価 (マニング抵抗則, $t^*=16$)



(a) 水面形状と流速



(b) 各項の大きさ

図-8 運動方程式各項の評価 (マニング抵抗則, $t^*=52$)

先端付近において不安定な振動の発生が見られる点が大
きな相違である。ただし、本ケースにおいては図-4に見
られる様に二つの計算の間でせん断力の最大値にさほど
大きな違いが見られず、これにより運動式各項のバラ
ンスについても、極端に大きな差は見られなかった。た
だし、二つの計算法において摩擦係数を支配する物理量
は全く異っており、水理条件によっては大きく異なる摩

擦係数値を与えることもあり得る。今後、この点に関し
てさらに検討を行う必要がある。

4. おわりに

水平床および一様勾配地形を伝搬する孤立波による底
面境界層に関して、数値計算をもとに検討を行った。主
要な結論を以下に示す。

- (1) 孤立波の遡上過程を精度良く計算するための数値モデルを提案した。抵抗則として、これまで多用されているマンギの粗度係数に代わり $k-\omega$ モデルを連立している。これにより、表面波形の計算精度が向上した。
- (2) 斜面上の遡上高さについても、従来の手法に比べて精度が向上し、Synolakis (1987) による経験式ときわめて良好な一致を示している。

謝辞：本研究に対して、日本学術振興会科学研究費（基盤研究（B）, No. 22360193）、および中国・四川大学国家重点実験室の Open Fund Research の補助を受けた。ここに記して関係各位に深甚なる謝意を表する。

参 考 文 献

- 高橋 潤・後藤和久・大家隆行・柳澤英明・今村文彦 (2008)：スリランカ・キリンダ漁港を対象とした2004年インド洋大津波による土砂移動過程の解析，海岸工学論文集，第55巻，pp. 251-255.
- 西畑 剛・田島芳満・森屋陽一・関本恒浩 (2005)：津波による地形変化の検証 -2004年スマトラ沖地震津波 スリランカ・キリンダ港-，海岸工学論文集，第52巻，pp. 1386-1390.
- Mohammad Bagus Adityawan・Bambang Winarta・田中 仁・山路弘人 (2009)：静水域に伝搬する波動下の底面境界層特性，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol. B2-65, No.1, pp. 71-75.
- Elfrink, B. and Fredsøe, J. (1993): The effect of the turbulent boundary layer on wave run up, Prog. Rep. 74, Tech Univ. Denmark, pp. 51-65.
- Fredsøe, J. and Deigaard, R. (1992): Mechanics of Coastal Sediment Transport, World Scientific, 369p.
- Heitner, K. L. and Housner, G.W. (1970): Numerical model for tsunami run-up, Proc. ASCE, WW3, pp. 701-719.
- Kim, S. K., Liu, P. L.-F., Liggett, J. A. (1983): Boundary integral equations for solitary wave generation propagation and run-up, Coastal Eng., Vol. 7, pp. 299-317.
- Liu, P. L. -F., Park, Y. S. and Cowen, E. A. (2007): Boundary layer flow and bed shear stress under a solitary wave, J. Fluid Mech., Vol.574, pp. 449-463.
- Pedersen, G. and Gjevik, B. (1983): Run-up of solitary waves, J. Fluid Mech., Vol. 135, pp. 283-290.
- Sana, A., Ghumman, A.R. and Tanaka, H. (2009): Modeling of a rough-wall oscillatory boundary layer using two-equation turbulence models, J. Hydr. Eng., Vol.135, No.1, pp. 60-65.
- Sumer, B. M., Jensen, P. M., Sørensen, L. B., Fredsøe, J. and Liu, P. L.-F. (2008): Turbulent solitary wave boundary layer, Proc. 18th Int. Offshore (Ocean) and Polar Eng. Conf. (ISOPE), pp. 775-781.
- Sumer, B.M., Jensen, P.M., Sørensen, L.B., Fredsøe, J., Liu, P.F. and Carstensen, S. (2010): Coherent structures in wave boundary layers, Part 2. Solitary motion, J. Fluid Mech., Vol.646, pp. 207-231.
- Suntoyo, Tanaka, H. and Sana, A. (2008): Characteristics of turbulent boundary layers over a rough bed under saw-tooth waves and its application to sediment transport, Coastal Eng., Vol.55, pp. 1102-1112.
- Suntoyo and Tanaka, H. (2009): Numerical modeling of boundary layer flows for a solitary wave, J. Hydro-environment Res., Vol.3, No.3, pp. 129-137.
- Synolakis, C. E. (1987): The run up of solitary waves, J. Fluid Mech., Vol. 185, pp. 523-545.
- Vittori, G. and Blondeaux, P. (2008a): Boundary layer flow and bed shear stress under solitary wave, Book of Abstract of the 31st Int. Conf. Coastal Eng., Abstract No. 062.
- Vittori, G. and Blondeaux, P. (2008b): Turbulent boundary layer under a solitary wave, J. Fluid Mech., Vol.615, pp. 433-443.
- Wilcox, D.C. (1988): Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models, AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, pp. 1299-1310.