

高次Laplacianモデルを用いた高精度粒子法の スロッシング現象への適用性

Simulation of Sloshing by Accurate Particle Method with Higher Order Laplacian Model

後藤仁志¹・Khayyer Abbas²・五十里洋行³・堀 智恵実⁴・市川陽一⁵

Hitoshi GOTOH, Abbas KHAYYER, Hiroyuki IKARI, Chiemi HORI and Youichi ICHIKAWA

A higher order Laplacian model is proposed for enhancement and stabilization of pressure calculation by the MPS method. The higher order Laplacian model is derived by taking the divergence of a particle-based gradient model. The proposed higher order Laplacian is then applied for discretization of both Laplacian of Poisson pressure equation and that of the viscous forces in the CMPS-HS method. A few numerical tests, namely, exponentially excited sinusoidal pressure oscillations and a violent sloshing flow are carried out to demonstrate the enhancing and stabilizing effect of the proposed higher order Laplacian model.

1. はじめに

非満載のLNGタンカーが高波浪下で動揺する場合、タンク内の激しい流体運動がタンク壁面の損傷破壊に繋がるような大きな局所的衝撃圧を引き起こすことがあり、Sloshing現象は船舶の設計において必須の検討要件である。また、臨海部に多数存在するLNGタンクが長周期地震動に見舞われた場合には、タンク内の激しいSloshing現象と基礎地盤の液化化に起因する側方流動が複合し、タンクの破壊に至るといったcatastropheも危惧される。このように、Sloshing現象は海岸工学・船舶海洋工学に共通の重要課題である。

粒子法は非線形自由水面追跡への適用に優れており、最大の弱点であった圧力擾乱については、陽解法型（例えば、SPH法, Smoothed Particle Hydrodynamics method; Gingold・Monaghan, 1977; Lucy, 1977）の場合、陰解法型（例えば、MPS法, Moving Particle Semi-implicit method; Koshizuka・Oka, 1996, ISPH法, Incompressible SPH method; Shao・Lo, 2003）の場合のどちらにおける圧力計算に対しても、改良が試みられてきている。とくに後者の陰解法型粒子法に関しては、運動方程式の離散化における運動量保存性の保証および圧力のPoisson方程式（PPE）の生成項の高精度化により、劇的な改善が示された（CMPS-HS法, Corrected MPS method with Higher order Source term, Khayyer・Gotoh, 2009）。

しかし従来の高精度粒子法でもなお、Sloshing現象のようなviolent flowの壁面境界上では誤った圧力値の検出

が頻発する。そこで本稿では、標準MPS法で用いられるLaplacianモデルが拡散の概念に基づいているのに対して、粒子法の勾配モデルの発散をとる（Monaghan, 1992）ことにより、高次Laplacianモデルを新たに導出した。そして、高精度粒子法において、このモデルを圧力のPoisson方程式および粘性項の計算に適用した手法と適用前の高精度粒子法を用いて2次元Sloshing現象などのシミュレーションを行い、新しいLaplacianモデルの圧力擾乱低減効果を検証した。

2. CMPS-HS法

(1) MPS法

標準MPS法（Koshizuka・Oka, 1996）において、Laplacianモデルは、

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2D_s}{n_0 \lambda} \sum_{j=1} (\phi_j - \phi_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad \dots\dots\dots (1)$$

で定義される。ここに、 ϕ ：スカラー物理量、 D_s ：次元数、 $\mathbf{r}$ ：粒子座標、 $w(r)$ ：重み関数、 n_0 ：初期状態における粒子数密度である。上式に表れる定数 λ は、

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2}{\sum_{j=1} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と計算される。また、重み関数には、

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_c}{r} - 1 & 0 \leq r < r_c \\ 0 & r \leq r_c \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

（ r_c ：影響半径）が用いられる。そして、標準MPS法におけるPPEは、

$$(\nabla^2 p_{k+1})_i = \frac{\rho}{(\Delta t)^2} \frac{(n_k)_i - n_0}{n_0} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表される。ここに、 Δt ：計算時間間隔、 k ：計算ステ

1 正会員 博(工) 京都大学教授工学研究科社会基盤工学専攻
2 正会員 博(工) 京都大学講師工学研究科社会基盤工学専攻
3 正会員 博(工) 京都大学助教工学研究科社会基盤工学専攻
4 学生員 修(工) 京都大学大学院博士課程社会基盤工学専攻
5 学生員 京都大学大学院修士課程社会基盤工学専攻

ップ, n_k^* : 仮粒子数密度である。

(2) CMPS-HS法

CMPS-HS法 (Khayyer・Gotoh, 2009) は, 標準MPS法に対して, 運動量保存性改善のために圧力勾配モデルを修正し, 圧力計算の改良のためにPPEの生成項を高精度化したものである。粒子数密度の実質微分を,

$$\begin{aligned} \frac{Dn}{Dt} &= \sum_{i \neq j} \frac{Dw_{ij}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)}{Dt} = \sum_{i \neq j} \frac{Dw_{ij}}{Dt} \\ &= \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} \frac{dx_{ij}}{dt_{ij}} + \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}} \frac{dy_{ij}}{dt_{ij}} \right) \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{-r_{ij}}{r_{ij}^3} (x_{ij} u_{ij} + y_{ij} v_{ij}) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

のように考慮することで, 高精度化したPPEの生成項を導出し直した。それは次式のように表される。

$$\begin{aligned} (\nabla^2 p_{k+1})_i &= \frac{\rho}{n_0 \Delta t} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)^* \\ &= - \frac{\rho}{n_0 \Delta t} \left(\sum_{i \neq j} \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3} (x_{ij} u_{ij} + y_{ij} v_{ij}) \right)^* \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

3. 高次Laplacianモデル

CMPS-HS法は, PPEに高精度生成項を適用しているが, 式(6)の左辺すなわち圧力のLaplacianは標準MPS法における記述(式(1))のままである。圧力計算をより安定化させるためには, 高精度のLaplacianモデルを導出する必要がある。粒子*i*におけるLaplacianは, 次式のように, その粒子において計算される勾配の発散をとることによって定義される (Monaghan, 1992)。

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \nabla \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i \dots\dots\dots (7)$$

ここで ϕ は一般的物理量である。当該粒子における勾配は,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi \rangle_i &= \frac{1}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \sum_{i \neq j} (\phi_j - \phi_i) \nabla w_{ij} \\ &= \frac{1}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \sum_{i \neq j} \phi_{ij} \nabla w_{ij}; \quad \phi_{ij} = \phi_j - \phi_i \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

と表される。MPS法は本来, 非圧縮性流れのために開発されたものであるから, 粒子*i*の近傍粒子*j*との距離から算出される重み関数の合計は, 常に計算初期における合計, つまり初期粒子数密度 n_0 に等しいと仮定している。したがって, 式(7)および式(8)より, 粒子*i*におけるLaplacianは次式になる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i &= \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} (\nabla \phi_{ij} \cdot \nabla w_{ij} + \phi_{ij} \nabla^2 w_{ij}); \\ n_0 &= (n_i)_0 = \left(\sum_{i \neq j} w_{ij} \right)_0 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで, 上式には $\nabla \phi_{ij} \cdot \nabla w_{ij}$ が含まれていることに注目する。標準MPS法および従来の高精度粒子法 (CMPS-HS

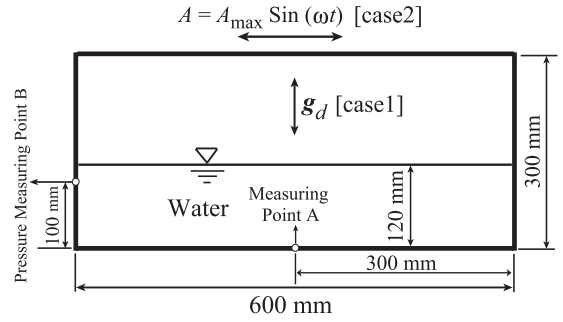


図-1 計算領域

法) では, この項が有する相対物理量の勾配を無視していたために, 粒子数密度やPPEの両辺の値の変動の評価法に一貫性 (consistency) が保たれず, 大加速度運動状態における動壁面境界付近近での際立った数値誤差が引き起こされていた (詳しい考察は後述)。

2次元直交座標の場合, ϕ_{ij} と w_{ij} の勾配はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \nabla \phi_{ij} &= \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}} \mathbf{j}; \\ \nabla w_{ij} &= \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} \mathbf{i} + \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}} \mathbf{j} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

と表されるため,

$$\begin{aligned} \nabla \phi_{ij} \cdot \nabla w_{ij} &= \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}} \\ &= \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{x_{ij}^2}{r_{ij}^2} + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{y_{ij}^2}{r_{ij}^2} \\ &= \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \left(\frac{x_{ij}^2}{r_{ij}^2} + \frac{y_{ij}^2}{r_{ij}^2} \right) = \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \frac{\phi_{ij} - \phi_i}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{2\phi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。一方,

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_{ij} &= \nabla \cdot \nabla w_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} \right) + \frac{\partial}{\partial y_{ij}} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} \right)^2 + \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2 r_{ij}}{\partial x_{ij}^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}} \right)^2 + \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2 r_{ij}}{\partial y_{ij}^2} \\ &= \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial r_{ij}^2} \left(\frac{x_{ij}^2}{r_{ij}^2} + \frac{y_{ij}^2}{r_{ij}^2} \right) + \left(\frac{2}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

ここで, 上式の誘導には

$$\frac{\partial^2 r_{ij}}{\partial x_{ij}^2} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\frac{x_{ij}}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_{ij}^2}{r_{ij}^3} \dots\dots (13)$$

を用いた。以上より, 式(9)および式(11), (12)から次式が導かれる。

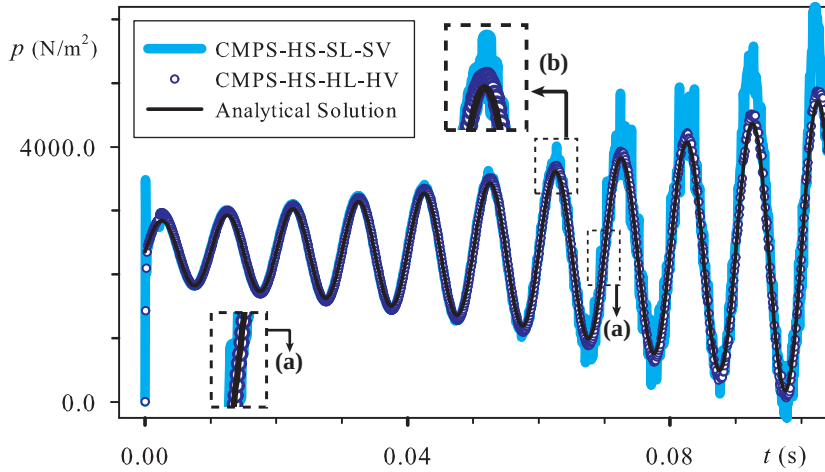


図-2 振動重力場の圧力時系列

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i &= \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \left(\frac{2\phi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} + \phi_{ij} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial r_{ij}^2} + \frac{\phi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \right) \\ &= \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \left(\phi_{ij} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial r_{ij}^2} - \frac{\phi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \right) \quad \dots\dots (14)\end{aligned}$$

さらに、式 (3) の重み関数を適用すれば、2次元における高次Laplacianモデルは以下になる。

$$\nabla \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \left(\frac{3\phi_{ij} r_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \quad \dots\dots\dots (15)$$

CMPS-HS法において、上式のモデルを、圧力のLaplacian (式 (6) 左辺) およびNavier-Stokes式の粘性項に対して導入したものをCMPS-HS-HL-HV (CMPS-HS with Higher order Laplacian for PPE and Higher order Laplacian for Viscous forces) 法と呼ぶ。これに対し、高次Laplacianモデルを適用しない従来のCMPS-HS法のことを、本稿中ではこれ以降、CMPS-HS-SL-SV (CMPS-HS with standard Laplacian for PPE and standard Laplacian for Viscous forces) 法と呼ぶことにする。

次章において、CMPS-HS-HL-HV法の性能、つまり、本稿で導出した高次Laplacianモデルの効果を評価するために、2つの異なる計算条件で2次元Sloshingシミュレーションを行う。

4. 圧力場の解の比較

(1) 振動重力場における圧力推定；case1

本節ではまず、計算対象 (図-1) を構成する水粒子および壁粒子ともに全く動かさず、鉛直方向加速度、すなわち重力加速度を、

$$g_d = 2g + 0.4g \exp(0.05 \frac{\pi t}{T}) \sin(\frac{2\pi t}{T}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

として変動させた場合に、シミュレーションで得られる圧力値の安定性と精度を検証する。ここに、 g ：地球で

の重力加速度 (本計算では鉛直下向きに 9.81 m/s^2)、 g_d ：振動重力加速度、 T ：振動周期 (case1では $T=0.01 \text{ s}$)、 t ：計算時刻である。粒子径を 5.0 mm とした。

図-2は、水槽中央の底面 (図-1のA点) における圧力の時系列について、CMPS-HS-SL-SV法およびCMPS-HS-HL-HV法により計算したものと、理論値を示している。この図より、強非線形圧力変動下でのCMPS-HS-SL-SV法の圧力推定精度が、高次Laplacianモデルの適用 (CMPS-HS-HL-HV法) によって顕著に改善されていることがわかる。図-2に示された圧力変動の位相と重力振動の位相は、一致すると見てよい。重力の振動幅が大きくなってくると、CMPS-HS-SL-SV法の圧力擾乱が顕在化し始める。そして、重力振動が極値を持つ時刻、つまり圧力変動の極値近傍 (図-2 (b)) では、CMPS-HS-SL-SV法による計算に大きな非物理振動を呈する。それに対して、CMPS-HS-HL-HV法では、理論値に近い曲線が描かれる。

(2) Sloshing現象下における圧力推定；case2

この節では、本稿で提案した高次Laplacianモデルの適用による圧力擾乱低減効果をさらに強調するため、水平方向の周期振動 (sway運動) を伴う水槽内で起こるSloshing現象のシミュレーションを行う。ここでは、計算対象 (図-1) を構成する粒子のうち、壁粒子を水平方向へ、

$$A(t) = A_{\max} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

に従って振動させる。計算条件は、Kishevら (2006) による実験条件に合わせた。振動振幅 $A_{\max}=50 \text{ mm}$ 、振動周期 $T=1.50 \text{ s}$ 、粒子径は 3.0 mm とした。

図-3は、図-1に表される側壁面上の点Bで測定された圧力値時系列を示す。Kishevら (2006) による実験デー

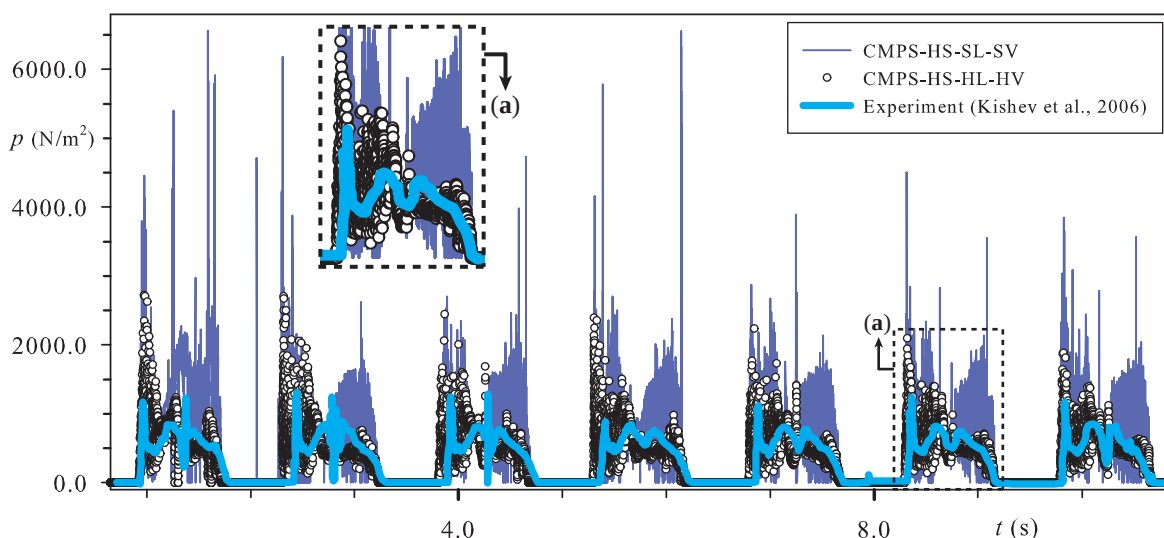


図-3 Sloshing 現象シミュレーションにおける圧力時系列の比較

タとともに、CMPS-HS-SL-SV法およびCMPS-HS-HL-HV法による計算結果を載せた。水槽がsway運動をしている間、圧力時系列は、類似の非ゼロ値パターンを繰り返す。そのパターン1つ分を拡大したものが図-3 (a) である。CMPS-HS-SL-SV法による圧力結果では、比較的大振幅の非物理的な振動が頻繁に表れ、特にパターンの後半に関して実験値とのずれが目立つ。これらの数値誤差振動が、CMPS-HS-HL-HV法においては効果的に除去されていることがわかる。

図-4には、 $t=1.86\text{s}$ および $t=2.58\text{s}$ における瞬間図例を圧力分布と併示した。この図でも、CMPS-HS-HL-HV法による、圧力場において際立った改良が見受けられる。CMPS-HS-SL-SV法による結果では、すでに $t=1.86\text{s}$ において、特に壁面境界近辺での圧力分布にノイズが存在し始め、 $t=2.58\text{s}$ では、さらに擾乱が目立つようになる。その一方、CMPS-HS-HL-HV法は、比較的小さな圧力分布を保持し続ける。

これまでの著者らの研究（例えば、Khayyer・後藤，2008）における圧力推定の際にも、ダム崩壊流れ後の壁面衝突といった激しい圧力変動が、CMPS-HS-SL-SV法などの高精度粒子法によって概ね再現されることは示してきた。しかし、それらの圧力計測点は不動壁面の固定点であった。Sloshing現象のように、比較的大きな加速度で壁を動かす場合、壁粒子やその近傍粒子におけるPPEの生成項は、時空間的に際立って変化する。それは、式(6)右辺で表されるように、PPEの生成項が、粒子の相対速度および相対位置の関数だからである。この生成項の表式とPPEの左辺である圧力のLaplacianモデルの一貫性に欠陥のある状態で、かつ、生成項の変動が激しい

場合、圧力擾乱が顕著なものとなる。

図-3 (a) の後半は、時刻 $t=8.7\text{--}9.3\text{s}$ あたりに相当する。測定点Bがあるほうの壁に流体塊が衝突 ($t=8.3\text{s}$ 付近) した後、流体粒子の水平方向速度は即座にゼロに近い値となる。しかし同時に、そうした流体の物理的な挙動とは無関係に、壁粒子は水平右方向へ強制的に動かされる。しかも、時刻 $t=9.0\text{s}$ 近傍ではsway運動の速度の絶対値が最も大きい。ゆえに、PPEの生成項と圧力のLaplacianの一貫性に欠陥のある標準のLaplacianモデル (CMPS-HS-SL-SV法) では、激しい圧力擾乱が生じる結果となった。CMPS-HS-HL-HV法では、そうした圧力擾乱が抑制され、高次Laplacianモデルの採用が、PPEの両辺の評価における一貫性を改善したことが示された。

5. おわりに

本稿で導出した高次Laplacianモデルを適用した高精度粒子法が、Sloshing現象に代表される壁面境界そのものが大きく運動するような計算条件下においても、より正確な圧力推定を可能にすることを示した。

しかし、衝突時刻周辺においてはCMPS-HS-HL-HV法でも、一定レベルの圧力擾乱が残るので、これを低減させるための更なる改良が必要となる。また一方、Sloshing現象は実際には、空気封入を伴い、かつ乱流場の現象である。したがって、二相流モデルや乱流モデルの開発は、本研究の発展における必須要件となるだろう。

謝辞：本研究の遂行にあたり、(株) ニュージェックより研究資金の提供をいただいたことを記して、謝意を表したい。

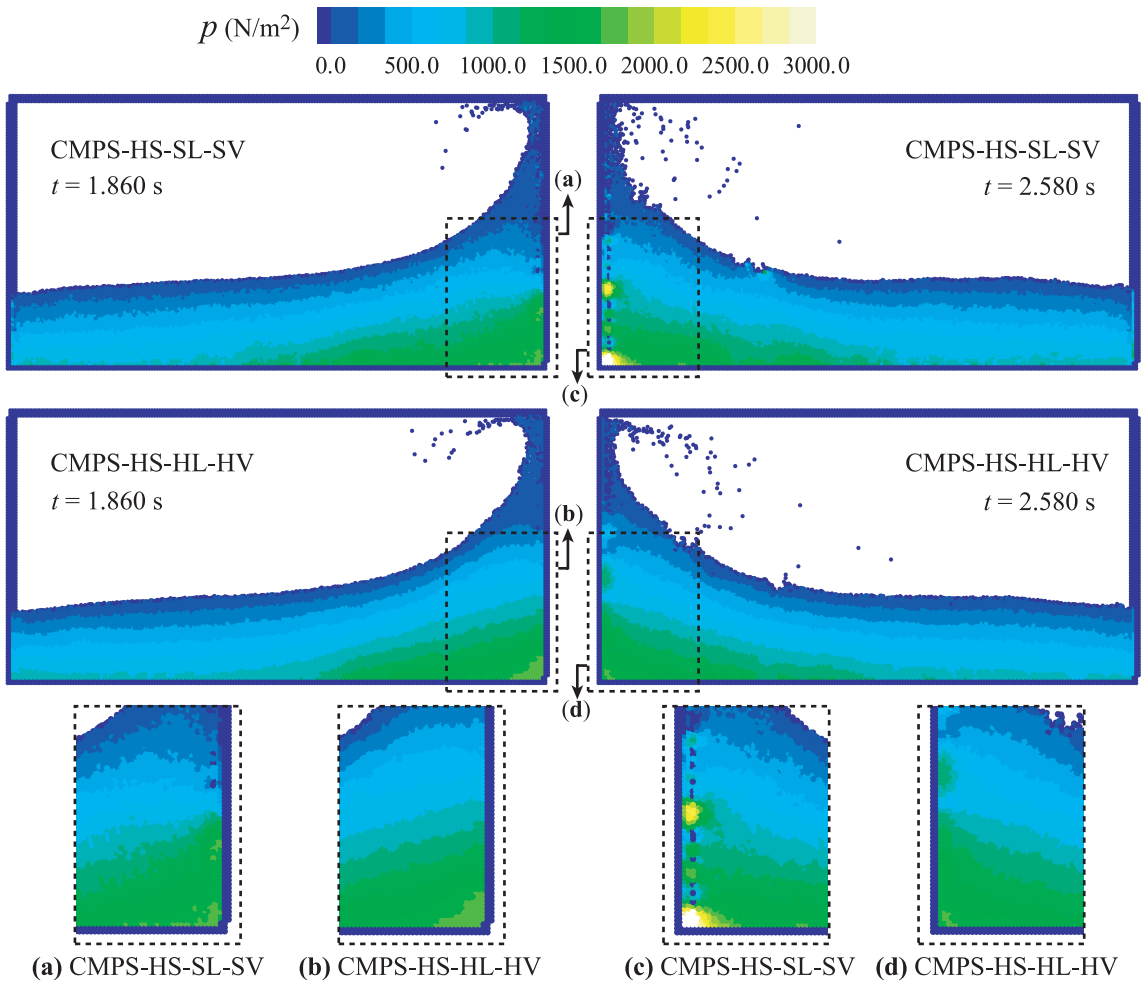


図-4 瞬間圧力分布

参 考 文 献

- Khayyer Abbas・後藤仁志 (2008) : 粒子法における圧力擾乱低減のためのCMPS-HS法の提案, 海岸工学論文集, 第55巻, pp. 16-20.
- Gingold, R. A. and J. J. Monaghan (1977) : Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 181, pp. 375-89.
- Khayyer, A. and H. Gotoh (2009): Modified Moving Particle Semi-implicit methods for the prediction of 2D wave impact pressure, *Coastal Eng.*, 56 (4), pp. 419-440.
- Kishev, Z.R., C. Hu, M. Kashiwagi (2006): Numerical simulation of violent sloshing by a CIP-based method, *Journal of Marine Science and Technology*, 11(2), pp. 111-122.
- Koshizuka, S. and Y. Oka (1996) : Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, 123, pp. 421-434.
- Lucy, L. B. (1977) : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astron. J.*, 82, pp. 1013-24.
- Monaghan, J. J. (1992) : Smoothed particle hydrodynamics, *Ann. Rev. Astron. Astrophys* 30, pp. 543-574.
- Shao, S. D. and E. Y. M. Lo (2003) : Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advances in Water Resources*, 26 (7), pp. 787-800.