

潜堤上波動場を対象とした WENO・Level Set法に基づく気液混相流モデルの開発

Multi-Phase Modeling for Water Waves over Submerged Structures Using WENO and Level Set Method

Kasem, T. H. M. A.¹・佐々木 淳²

T. H. M. A. KASEM and Jun SASAKI

A multiphase model for water waves was developed consisting of the fifth order space accurate WENO (weighted essentially non-oscillatory) method for advection terms and a level set method for capturing the gas-liquid interface. The model was applied to a solitary wave propagation over a rectangular structure, 2nd-order Stokes waves over a trapezoidal structure, and a solitary wave over a semicircular structure. Through comparisons with existing experiments, the model was found to be capable of reproducing the experimental results with relatively coarse grids and without an explicit turbulence model because of the adoption of high-order and high resolution scheme with the concept of Implicit LES.

1. はじめに

数値流体解析 (CFD) の発展に伴い, 潜堤を含む海岸構造物の設計にCADMAS SURF (磯部ら, 1999) や COBRAS (Linら, 1998) をはじめとするCFDコードが適用されている. しかし, それらの多くは時空間2次または3次精度であり, 構造物周りの格子を密にする必要から非一様格子が採用され, 格子生成に熟練を要するといった欠点がある. 一方, Jiangら (1996) が開発したWENO (weighted essentially non-oscillatory) 法は5次以上の高次精度かつ高解像度のスキームであり, 乱流モデルを陽に用いないImplicit Large Eddy Simulation (ILES) モデルとしても近年注目を集めているが (Thornberら, 2007), 波動場の解析に適用された事例はない. そこで本研究ではWENO法を採用し, 気液界面の捕獲にLevel Set法と組み合わせた, 新たな数値モデルを開発し, 潜堤上波浪場に適用することで, 本モデルの適用性を明らかにすることを目的とする.

2. 数値モデル

基礎方程式に2次元気液混相流を対象とした, 非圧縮性流体のNavier-Stokesの式と連続式を採用し, 矩形のスタッガード格子における差分法モデルを開発した. 移流項に5次のWENO法, 気液境界面の捕獲にLevel Set法を採用して差分式を展開し, 数値解法としてはMAC法を採用し, 圧力のポアソン方程式の解法には点Jacobi前処理法と組み合わせたBi-CGSTAB法 (Barrettら, 1993)

を採用している. 本章では特にWENO法に焦点を当て, 開発したモデルの内容を紹介する.

(1) WENO法

流速 u, v を含む任意の従属変数を f とすると, スタッガード格子における x 方向の移流項に5次精度差分法を適用すると一般に次のように表現できる (Shu, 1998).

$$\frac{\partial(uf)}{\partial x} \Big|_i = \frac{\widehat{uf}_{i+1/2} - \widehat{uf}_{i-1/2}}{\Delta x} + O(\Delta x^5) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで, i は着目する従属変数の x 軸上定義点とし, $i-1/2$ と $i+1/2$ は左右の格子界面上を表し, \widehat{uf} は f の x 方向フラックス表す. 今, $u < 0$ の場合に着目し \widehat{uf}^+ と書くと, 5次のWENO法は

$$\widehat{uf}_{i-1/2}^+ = \sum_{s=0}^2 \tilde{\omega}_s \overline{uf}_s \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる. ここで, 各項は以下の式群より見積もる.

$$\tilde{\omega}_s = \frac{\tilde{\alpha}_s}{\sum_{k=0}^2 \tilde{\alpha}_k} \quad (s = 0, 1, 2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\tilde{d}_k}{(\varepsilon + \beta_k)^2} \quad (k = 0, 1, 2) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\tilde{d}_0 = 0.1, \quad \tilde{d}_1 = 0.6, \quad \tilde{d}_2 = 0.3 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 13(uf_i - 2uf_{i+1} + uf_{i+2})^2 / 12 \\ &\quad + (3uf_i - 4uf_{i+1} + uf_{i+2})^2 / 4 \\ \beta_1 &= 13(uf_{i-1} - 2uf_i + uf_{i+1})^2 / 12 + (uf_{i-1} - uf_{i+1})^2 / 4 \\ \beta_2 &= 13(uf_{i-2} - 2uf_{i-1} + uf_i)^2 / 12 \\ &\quad + (uf_{i-2} - 4uf_{i-1} + 3uf_i)^2 / 4 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \overline{uf}_0 &= 11uf_i / 6 - 7uf_{i+1} / 6 + uf_{i+2} / 3 \\ \overline{uf}_1 &= uf_{i-1} / 3 + 5uf_i / 6 - uf_{i+1} / 6 \quad \dots\dots\dots (7) \\ \overline{uf}_2 &= -uf_{i-2} / 6 + 5uf_{i-1} / 6 + uf_i / 3 \end{aligned}$$

ここに ε はゼロ割を防ぐための任意の微小定数である.

1 博(工) 横浜国立大学大学院工学府社会空間システム専攻博士研究院
2 正会員 博(工) 横浜国立大学教授大学院工学研究院

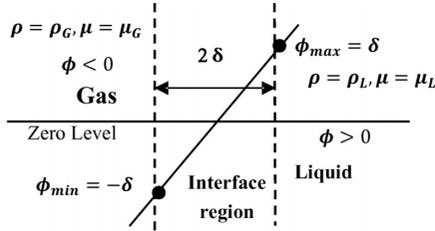


図-1 気相液相界面における距離関数 ϕ の分布の様子

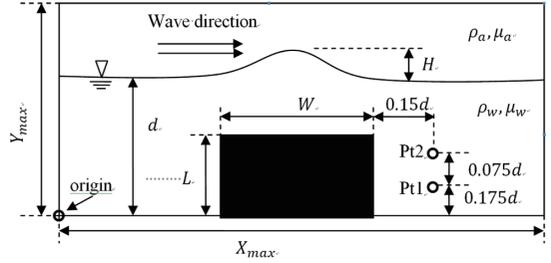


図-2 矩形潜堤上のソリトン波の解析領域と諸量の定義

$u>0$ の場合も対称性を考慮して同様の式を適用すればよい。

f が流速の場合は格子界面での流速が定義されないの
で、Lax-Friedrichs分離を採用し、フラックスを以下の様
に選択する。

$$\widehat{uf}_{i+1/2} = \begin{cases} \widehat{uf}_{i-1/2}^+ & (u_i, u_{i-1} < 0) \\ \widehat{uf}_{i-1/2}^- & (u_i, u_{i-1} > 0) \\ \widehat{uf}_{i-1/2}^\pm & (\text{else}) \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

(2) Level Set法

気液界面の捕獲についてはWENO法とCIP-CSL3法を
比較したKasem・Sasaki (2009)の検討に基づき、界面
からの距離を表す距離関数 ϕ (液相では $\phi>0$ 、気相では
 $\phi<0$)の移流方程式をWENO法により解き、これを用い
て界面を決める手法を採用した。格子サイズを Δ として
数値上の界面の厚さ $\delta=1.5\Delta$ と定義し(図-1参照)、まず、
 ϕ_c を ϕ と δ の関係から次式のように定義し、

$$\phi_c = \begin{cases} 0 & \phi < -\delta & \text{gas} \\ 1 & \phi > \delta & \text{liquid} \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sin\left(\frac{\pi\phi}{2\delta}\right) \right\} & -\delta \leq \phi \leq \delta & \text{interface} \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

この ϕ_c を用いて、密度 ρ および粘性係数 μ をそれぞれ気
体(添字G)および液体(添字L)の値を用いて

$$\rho = \rho_L \phi_c + \rho_G (1 - \phi_c) \dots\dots\dots (10)$$

$$\mu = \mu_L \phi_c + \mu_G (1 - \phi_c)$$

と定義した。ただし、WENO法により距離関数 ϕ の移流
方程式を解いた後、 ϕ の界面での勾配を1に保つため、
再初期化(Sussman・Fatemi, 1999)を行っている。こ
の再初期化はKasem・Sasaki (2009)が検討しているよ
うにLevel Set法において精度と安定性を確保するために
非常に有効な処理と考えられ、その数学的定式化はやや
複雑であるが数値計算上の技巧的扱いを必用としない利
点がある。

3. 潜堤上波動場への適用方法

本研究で開発した数値モデルを矩形潜堤上のソリトン
波、台形潜堤上におけるストークス波、および半円形潜
堤上のソリトン波に適用し、理論、実験結果、および既
往の数値計算結果と比較することで、本モデルの性能照
査を行う。

(1) 矩形潜堤上のソリトン波

図-2に示す解析領域を設定し、矩形潜堤上のソリトン波
に関する計算を行う。計算条件はZhuang・Lee (1996)と
同様とし、彼らの実験結果との比較を行う。水平および鉛
直方向の計算領域のスケールをそれぞれ $X_{max}=45d$ および
 $Y_{max}=1.6d$ とし、 855×96 の一樣矩形計算格子を作成した。
左右の境界にはそれぞれ幅 $3d$ および $0.5d$ の減衰帯を設定
し、境界からの反射波の影響を抑えた。矩形潜堤の左端を
原点から $13.33d$ の水平距離に置き、原点から $8d$ の位置に
初期ソリトン波の峰を設定した。シミュレーション時間
は $t\sqrt{g/d}=27.8$ とし、42,000時間ステップで計算した。

水位 η および流速 u, v の初期値はLeeら(1982)より
以下の通り与えた。

$$\frac{\eta}{d} = 1 + \frac{H}{d} \left\{ \text{sech} \left(\sqrt{3H/4d} \frac{X}{d} \right) \right\}^2$$

$$\frac{u}{\sqrt{gd}} = \frac{\eta}{d} - 1$$

$$\frac{v}{\sqrt{gd}} = \frac{v}{d} \left(\frac{\eta}{d} - 1 \right) \sqrt{3H/d} \left\{ \tanh \left(\sqrt{3H/4d} \frac{X}{d} \right) \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(2) 台形潜堤上のストークス波

図-3に示す解析領域を設定し、台形潜堤上のストーク
ス波の規則波に関する計算を行い、Beji・Battjes (1994)
の実験結果との比較を行う。

長さ L_∞ と速度の代表スケールをそれぞれ $L_\infty=d$ および U_∞
 $=\sqrt{gd}$ とし、無次元波長 $\bar{L}=L_w/d$ および無次元周期 \bar{T}
 $=T\sqrt{g/d}$ を導入し、2次のストークス波(Dean・Dalrymple,
1991)を入射波として与える。 884×132 の一樣な矩形格
子を採用し、無次元計算時間を $\bar{t}=136.72$ 、計算ステップ数
を40,000とした。

(3) 半円形潜堤上のソリトン波

図-4に示す解析領域を設定し、半円形潜堤上のソリト
ン波の計算を行い、Cookerら(1990)による実験および
数値計算結果との比較を行う。水平方向の計算領域を
 $X_{max}=40d$ にとり、その中心に半円形潜堤の中心を置き、
左右境界それぞれに長さ $3d$ および $0.5d$ の幅の減衰帯を設
けた。計算領域を 880×96 の格子で分割し、初期条件は
先に示した矩形潜堤上のソリトン波と同様に与えた。

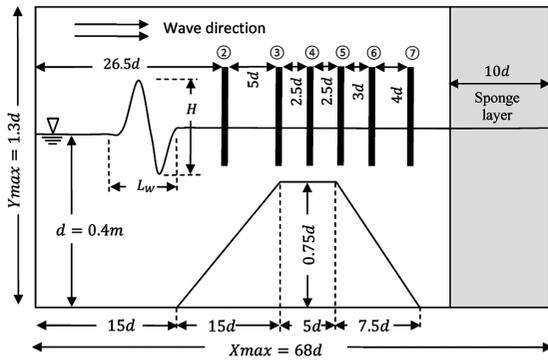


図-3 台形潜堤上におけるストークス波の解析領域と諸量の定義

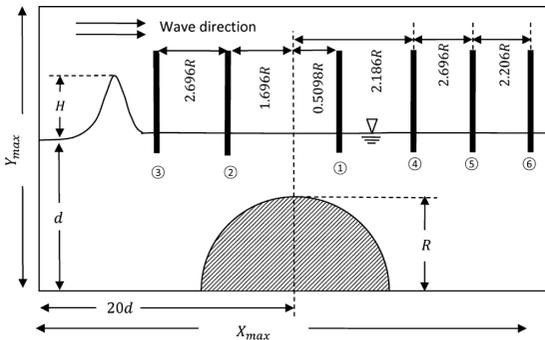


図-4 半円形潜堤上におけるソリトン波の解析領域と諸量の定義

4. 結果と考察

(1) 矩形潜堤上のソリトン波

図-2のpt1とpt2における水平・鉛直流速の時系列計算結果を図-5に示す。同図中にはZhuang・Lee (1996) による実験結果と数値モデルCOBRASを用いたChangら (2001) の計算結果を併せて示した。2つの計算結果と実験結果を比較すると、本研究で開発したモデルの計算結果がやや優れていると言えよう。それぞれのモデルで用いられた格子解像度を比較すると、COBRASは非一様矩形格子を採用し、構造物周辺では最小格子サイズが $0.0109d$ であったのに対し、本研究では水平・鉛直それぞれ $0.053d$ および $0.0167d$ の一様矩形格子を採用した。すなわち、本研究で採用した一様格子はCOBRASで用いられた最小格子の水平・鉛直それぞれ5倍および1.6倍となっていたことから、本研究の結果はより粗な一様格子を用いているにも関わらず、再現性は向上していると考えられる。また、COBRASでは乱流モデルとして $k-\epsilon$ モデルを採用しているが、本研究ではImplicit LES (ILES) の概念を採用し、陽な乱流モデルは採用しなかったが、十分良好な結果が得られている。ILESはWENOのような高精度高解像度スキームを採用した場合に、flux limiterがLESにおけるsub-grid scaleモデルのように振る舞うことで、陽な乱流モデルなしに計算が

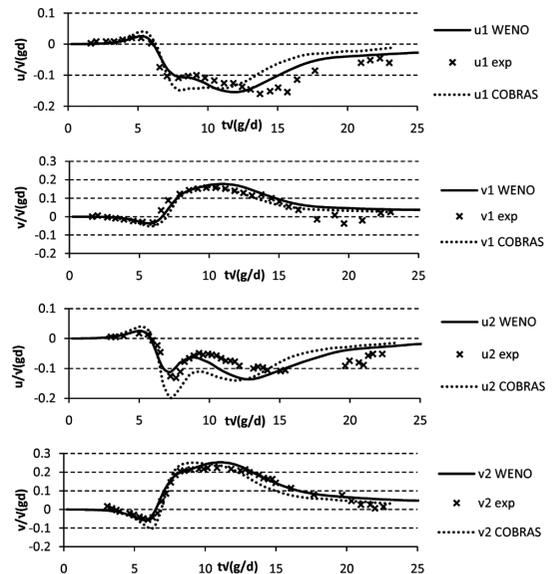


図-5 測点1と測点2 (図-2) における水平流速 u_1 , u_2 と鉛直流速 v_1 , v_2 の本モデル計算値 (WENO) とZhuang・Lee (1996) の実験値 (exp) および計算値 (COBRAS) との比較。

可能であると考えられている (Drikakis, 2003)。この概念の適用範囲については不明であるが、本研究ではその有効性が確認された。

図-6に4つの時刻それぞれにおける本モデルによる流線の計算結果を示す。これらの結果から渦の下流側への剥離の様子や、渦が時間経過と共に大きくなり、ソリトン波が矩形潜堤から遠ざかった後まで存在し続ける様子が計算されているが、これらの特徴はZhuang・Lee (1996) による実験結果とよく整合している。このような渦の挙動についてもILESモデルによって十分再現可能であることが分かる。

(2) 台形潜堤上のストークス波

図-3の②から⑦の6測点における水位の時系列計算結果とBeji・Battjes (1994) による実験結果の比較を図-7に示すが、両者はいずれの測点および時刻においてもよく一致しており、本モデルの再現性は高いといえる。Shen・Chan (2008) は同じ問題に対し、VOF法と埋め込み境界法を採用し、非一様矩形格子を用いた計算を行っており、図-7のStation7にその計算結果を併せて示している。両者の計算結果はほぼ一致しているが、採用した水平・鉛直格子サイズを比較すると、彼らは $\Delta x_{min}=5 \times 10^{-2}d$, $\Delta y=5 \times 10^{-3}d$ であるのに対し、本研究では $\Delta x=7.7 \times 10^{-2}d$, $\Delta y=9.85 \times 10^{-3}d$ と特に鉛直方向については2倍程度の格子サイズであるにも関わらず、ほぼ同様の精度で計算できていることがわかる。

次に図-8に時間間隔 $\Delta t=4.5557$ での各時刻における水位の分布を示し、破線円を付した一つの波峰に着目すると、台形潜堤に近づくにつれて波峰が尖り、潜堤上で最

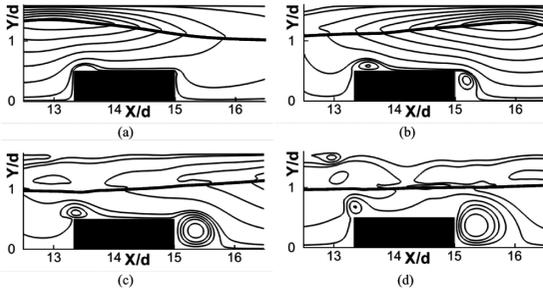


図-6 時刻 $t\sqrt{g/d}$ = (a) 4.63, (b) 6.95, (c) 9.267, (d) 11.58 における, 流線 (細実線) と水面変位 (太実線) の計算値.

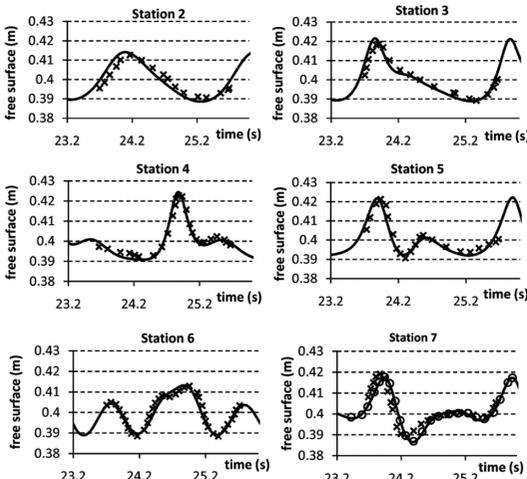


図-7 6測点 (図-3) における水面変位の本モデル計算値 (実線) と Beji・Battjes (1994) による実験値 (クロス) の比較. 測点7には Shen・Chan (2008) の計算結果 (白抜き円) を示す.

大に達した後, 分裂する様子が計算結果に現れている. これは実験結果とよく整合するものであり, 本モデルが台形潜堤上の進行波の基本的な特徴をよく再現可能なことが明らかとなった.

(3) 半円形潜堤上のソリトン波

半円形潜堤を対象とした Cooker ら (1990) の実験結果と比較するため, CASE1 ($H/d=0.191, R/d=0.8, Y_{max}=1.7, t_{max}\sqrt{g/d}=21.908$), および CASE2 ($H/d=0.514, R/d=0.7, Y_{max}=1.9, t_{max}\sqrt{g/d}=19.093$) の条件下で数値計算を行い, それぞれ図-4の測点①, ②, ③および測点④, ⑤, ⑥において水面変位の時間変動を比較したものを図-9に示す. 計算値と実験値は全般的にはよく整合しているが, CASE1の測点1とCASE2の測点4においては若干の差異が見られる. この確かな原因は不明だが, Cooker ら (1990) はこのことに関して潜堤下手側における波高計の振動による実験誤差の可能性を指摘している.

図-10にCASE1およびCASE2の各時刻における, 潜堤中心から下手側領域における水面変位と流線を示す. いず

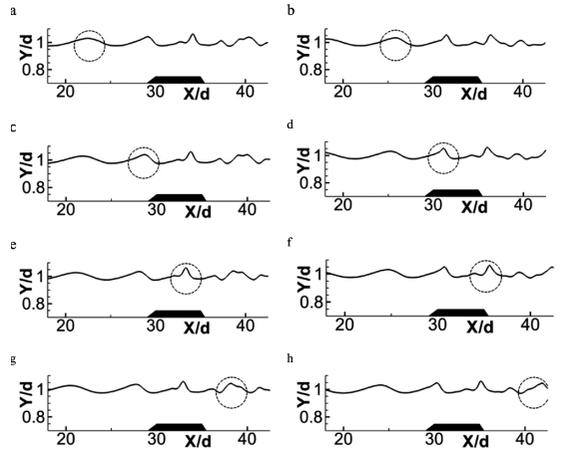


図-8 時間間隔 $\Delta t = 4.557$ の各時刻における水面変位の岸沖分布の計算結果. 破線円は着目した波峰.

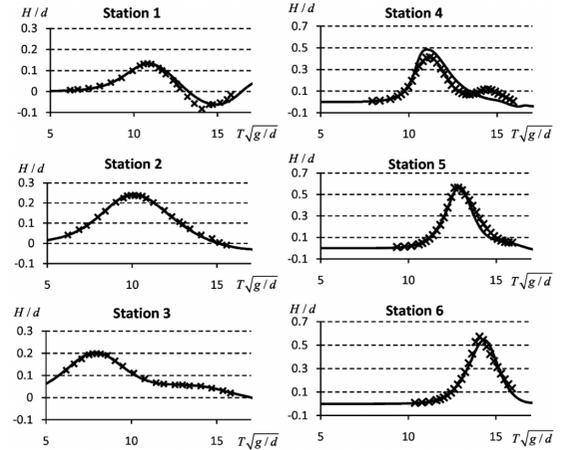


図-9 測点1から6 (図-4) における水面変位時系列の本モデル計算値 (実線) と Cooker ら (1990) による実験値 (クロス) の比較.

れにおいても波峰が潜堤を通過した後, 潜堤下手側において渦が発生し, 長時間留まる様子が見てとれる. また, 波峰が潜堤を通過した後, 潜堤下手側境界付近で水面が尖り, 砕けて潜堤中心側に向き込む現象が計算された (図-10中CASE1の $t\sqrt{g/d}=14.605$ およびCASE2の $t\sqrt{g/d}=14.32$ における破線円を参照). この現象は Cooker ら (1990) の実験においても backward breaking 現象として指摘されており, 本計算結果は実験結果とよく整合していることを確認した.

5. 結論

高精度高解像スキーム WENO法と Level Set法を採用した気液混相流モデルを開発し, 3タイプの潜堤上における波浪場の解析を行ったところ, 本モデルの計算結果はいずれの場合も実験結果とよく整合し, 十分な再現性

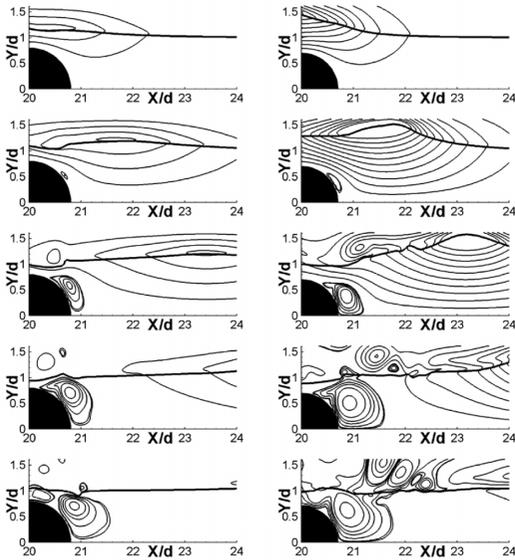


図-10 CASE1 (左) とCASE2 (右) の各時刻における水面変位 (太実線) と流線 (細実線) 計算値の空間分布。

がより粗な格子で実現できることを確認した。また、本モデルではImplicit LES (ILES) の概念から陽な乱流モデルを採用していないが、構造物周りでの渦の挙動を含め、十分な再現性を有することを確認した。移流項に5次精度のWENO法を採用することで、比較的粗な一様格子と乱流モデルに関するパラメータチューニングや境界条件の設定が不要なILESの組み合わせにより、モデルセットアップが容易で計算効率の高い実用的な数値モデルが構築可能であることを示した。

謝辞：本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (B) 課題番号 19360220 によるものである。

参 考 文 献

磯部雅彦・高橋重雄・余 錫平・榊山 勉・藤間功司・川崎浩司・蔣 勤・秋山 実・大山洋志 (1999)：数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究—VOF法基本プログラムの作成—, 海洋開発論文集, 第15巻, pp. 321-326.

- Barrett, R., Berry, M., Chan, T., Demmel, J., Donato, J.M., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. and Van Der Vorst, H. (1993): Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, (Mathematical Institute, Society for Industrial Mathematics).
- Beji, S. and Battjes, J.A. (1994): Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar, *Coast. Eng.*, Vol. 23, pp. 1-16.
- Chang, K.A., Hsu T.J. and Liu P.L.F. (2001): Vortex generation and evolution in water waves propagating over a submerged rectangular obstacle: Part I. solitary waves, *Coast. Eng.* Vol. 44, pp. 13-36.
- Cooker, M.J., Peregrine, D.H., Vidal, C. and Dold, J.W. (1990): The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder, *J. Fluid Mech.* Vol. 215, pp. 1-22.
- Dean, R.G. and Dalrymple, R.A. (1991): *Water wave mechanics for engineers and scientists*, World Scientific.
- Drikakis, D. (2003): Advances in turbulent flow computation using high-resolution methods, *Progress in Aerospace Sciences*, 39, pp. 405-424.
- Jiang, G.S. and Shu, C.W. (1996): Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.*, Vol. 126, pp. 202-228.
- Kasem, T. and Sasaki, J. (2009): Modeling of multiphase flow using level set methods and accurate hyperbolic solvers, *Annual J. Civil Eng. in the Ocean*, Vol. 25, pp. 843-848.
- Lee, J., Skjelbreia, J. and Raichlen, J. (1982): Measurement of velocities in solitary waves, *J. Waterway, Port, Coast. and Ocean Div.*, ASCE, Vol. 108, pp. 200-218.
- Lin, P. and Liu, P.L.F. (1998): A numerical study of breaking waves in the surf zone, *J. Fluid Mech.*, Vol. 359, pp. 239-264.
- Shen, L. and Chan, E.S. (2008): Numerical simulation of fluidstructure interaction using a combined volume of fluid and immersed boundary method, *Ocean Eng.* Vol. 35, pp. 939-952.
- Shu, C.W. (1998): Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, in Cockburn, B. et al. (Eds.), *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*, in Quarteroni, A. (Ed.), *Lecture Notes in Mathematics*, 1697, pp. 325-432.
- Sussman, M. and Fatemi, E. (1999): An efficient, interfacepreserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow, *SIAM J. Sci. Comput.*, 20, pp. 1165-1191.
- Thornber, B., Mosedale, A., and Drikakis, D. (2007): On the implicit large eddy simulations of homogeneous decaying turbulence, *J. Comput. Phys.*, Vol. 226, pp. 1902-1929.
- Zhuang, F. and Lee, J.J. (1996): A viscous rotational model for wave overtopping over marine structure, *Proc. 25th Int. Conf. Coastal Eng.*, ASCE, pp. 2178-2191.