

深水域や砕波点近傍における非線形内部波の挙動

Nonlinear Characteristics of Internal Waves in a Deep-Water Region or near a Wave-Breaking Point

山下 啓¹・柿沼太郎²・中山恵介³・及川正行⁴・辻 英一⁵・西川 学⁶

Kei YAMASHITA, Taro KAKINUMA, Keisuke NAKAYAMA, Masayuki OIKAWA
Hidekazu TSUJI and Manabu NISHIKAWA

A set of nonlinear internal-wave equations, which have been derived on the basis of the variational principle without any assumptions concerning wave nonlinearity and dispersion, is applied to compare numerical results with experimental data of internal waves propagating in a deep-water region. Internal waves propagating over a uniformly sloping beach are also simulated. Internal progressive waves show remarkable shoaling after the interface reaches the critical level, after which the physical variables change discontinuously near the wave-breaking point. In the wave-breaking case of internal waves reflecting at a vertical wall, the vertical velocity of the particles in the vicinity of the interface is different from that of the moving interface on the wall, which means that the kinematic boundary condition on the interface is not satisfied.

1. 序論

沿岸域では、内部セイシュや内部潮汐といった内部長周期波のみならず、数分程度の周期の内部短周期波も観測される。後者の発生原因としては、水底の地形や界面の不安定性が挙げられる。こうした内部波は、広い周波数帯域にわたる成分波間でエネルギーを交換するが、水深波長比が大きな内部波の非線形性及び分散性の研究は、あまり進んでいない。また、内部波の砕波は、沿岸域の物質輸送に関与するが、界面の不安定問題や密度構造等と相互に関連する複雑な機構を有するため、内部波の砕波限界に関しては、不明な点が多い。

そこで、本研究では、まず、水深が相対的に深い水域を伝播する内部波を対象とし、固定水平板に挟まれた水槽内を往復する内部波と、自由水面のある水槽内を往復する表面波・内部波の水理実験を実施し、実験結果を波の強非線形性・強分散性を考慮した変分原理（柿沼, 2001）から導出される非線形内部波方程式により得られる数値解析結果と比較する。次に、内部孤立波の3次解を初期条件として与え、斜面上を伝播する内部進行波及び鉛直壁に衝突する内部重複波の、砕波点近傍における物理量に関して調べる。

2. 非線形表面波・内部波方程式

非粘性かつ非圧縮性である2層流体の非回転運動を対象とする。上層及び下層をそれぞれ第1層及び第2層と呼び、両層の流体が互いに混合しないと仮定する。

第*i*層の速度ポテンシャル $\phi_i(x, z, t)$ を次式のように*N*個のべき関数の重み付き級数に展開する。

$$\phi_i(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{ f_{i,\alpha}(x, t) \cdot z^\alpha \} \quad \dots\dots\dots (1)$$

変分法（柿沼, 2001）を適用すると、固定水平板で挟まれた2層流体に対する非線形内部波方程式（柿沼ら, 2009）、または、上層の上面が自由水面である2層流体に対する次式のような非線形表面波・内部波方程式が得られる。

[第1層（上層）]

$$\zeta^\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \eta^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \{ (\zeta^{\alpha+\beta+1} - \eta^{\alpha+\beta+1}) \nabla f_{1,\beta} \} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} (\zeta^{\alpha+\beta-1} - \eta^{\alpha+\beta-1}) f_{1,\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\zeta^\beta \frac{\partial f_{1,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \zeta^{\beta+\gamma} \nabla f_{1,\beta} \nabla f_{1,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \zeta^{\beta+\gamma-2} f_{1,\beta} f_{1,\gamma} + g \zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

[第2層（下層）]

$$\eta^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \{ (\eta^{\alpha+\beta+1} - b^{\alpha+\beta+1}) \nabla f_{2,\beta} \} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} \{ \eta^{\alpha+\beta-1} - b^{\alpha+\beta-1} \} f_{2,\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\eta^\beta \frac{\partial f_{2,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{2,\beta} \nabla f_{2,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta^{\beta+\gamma-2} f_{2,\beta} f_{2,\gamma} + g(\eta + h_1) - \frac{\rho_1}{\rho_2} \left\{ \eta^\beta \frac{\partial f_{1,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{1,\beta} \nabla f_{1,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta^{\beta+\gamma-2} f_{1,\beta} f_{1,\gamma} + g(\eta + h_1) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ であり、 $\zeta(x, t)$, $\eta(x, t)$, $b(x)$, $h_1(x)$ 及び ρ_1

1 学生会員	鹿児島大学大学院 理工学研究科 海洋土木工学専攻
2 正会員	博(工) 鹿児島大学大学院准教授 理工学研究科 海洋土木工学専攻
3 正会員	博(工) 北見工業大学教授 社会環境工学科
4	理博 福岡工業大学教授 知能機械工学科
5	博(理) 九州大学助教 応用力学研究所
6	独立行政法人 鉄道建設・運輸施設整備支援機構

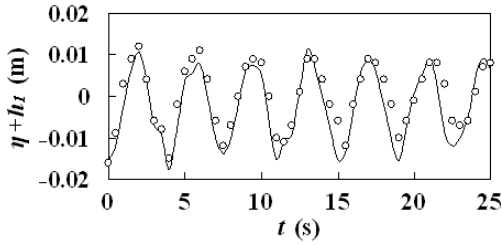


図-1 界面変動の実験値(○)と計算値(—) ($h_1/h_2 = 0.25$, $\theta = 3.8^\circ$, $x = 0.15$ m)

は、それぞれ、水面変動、界面変動、底面形、第 i 層の静水深及び第 i 層の密度である。また、 α , β , 及び γ に対して積の総和規約を適用する。これらの基礎方程式系をNakayama・Kakinuma (2010)と同様の差分法を用いて解く。

3. 固定水平板で挟まれた水槽内を往復する内部波

まず、固定水平板で挟まれた水槽内を往復する内部波を対象とした。長さ0.6m、深さ0.3m及び幅0.1mの水槽を2層流体で満たした。上・下層の層厚比及び密度比は、それぞれ、 $h_1/h_2=0.25$ 及び $\rho_1/\rho_2=0.802$ である。

Hornら (2000) のように水槽を傾斜させ、静止状態になってから水槽を水平に戻した。水槽の底面の一端を傾斜の軸とし、他方の持ち上げた端部を $x=0$ mとする。水槽の傾斜角は、砕波が発生しないよう調節した。発生した内部波をビデオ撮影し、界面変動を得た。

数値解析では、水槽の底面全体が着地した瞬間の界面形を初期界面形として与え、初期速度ポテンシャルを至る所で0とした。速度ポテンシャルの展開項数は、 $N=3$ とした。計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x=0.005$ m及び $\Delta t=0.00005$ sとした。

水槽傾斜角が $\theta=3.8^\circ$ の場合、 $x=0.15$ mの地点における界面変動の実験結果及び計算結果を図-1に示す。この場合、前後壁位置で腹となる湖水振動のような重複波が形成された。内部波の谷の振幅が峰の振幅より大きく、非線形性の比較的強い内部波が発生したことがわかる。時間経過に伴い、特に内部波の谷の振幅が減衰し、時間波形が正弦波形に近付いている。

ところで、数値解析では、粘性を無視しており、実験結果に見られる波高の減衰が再現されない。従って、波高の減衰に伴う波速の低減が考慮されないため、実験結果と計算結果の間に、時間が経過するにつれて位相差が現れてくる。このような、内部波の谷の振幅の過大評価は、相対的に浅い水深条件を対象としたHornら (2000) による粘性を無視した数値計算結果にも、同様に時間の経過と共に顕著に現れている。こうした差異が認められるものの、計算結果は、実験結果に見られる時間波形の上下非対称性と、内部波の周期とを精度よく再現し

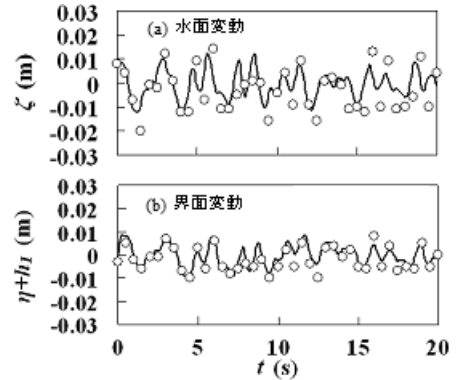


図-2 水面変動(a)及び界面変動(b)の実験値(○)と計算値(—) ($h_1/h_2=0.4$, $\theta=1.8^\circ$, $x=1.065$ m)

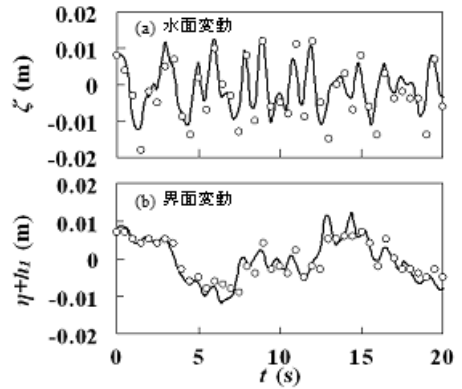


図-3 水面変動(a)及び界面変動(b)の実験値(○)と計算値(—) ($h_1/h_2=2.3$, $\theta=1.9^\circ$, $x=1.065$ m)

ている。

4. 水槽内を往復する表面波・内部波

次に、上層上に水平板を置かず、上層の上面が大気に接する場合を対象とした。この場合、長さ1.663m、深さ0.34m及び幅0.1mの水槽を用いた。上・下層の密度比は、 $\rho_1/\rho_2=0.802$ である。

数値解析では、水槽傾斜角と等しい傾きを有する直線形を初期界面形として与え、初期速度ポテンシャルを至る所で0とした。速度ポテンシャルの展開項数は、 $N=3$ とし、また、計算格子間隔及び計算時間間隔をそれぞれ $\Delta x=0.01663$ m及び $\Delta t=0.0001$ sとした。

上・下層の層厚比が $h_1/h_2=0.4$ であり、水槽傾斜角が $\theta=1.8^\circ$ の場合、 $x=1.065$ mの地点における水面変動及び界面変動の実験結果及び計算結果をそれぞれ図-2 (a) 及び (b) に示す。上層厚が相対的に薄いため、水面変動及び界面変動において、表面波モードが卓越している。計算結果は、特に、界面変動の周期の再現性がよい。

他方、上・下層の層厚比が $h_1/h_2=2.3$ であり、水槽傾斜角が $\theta=1.9^\circ$ の場合、 $x=1.065$ mの地点における水面変

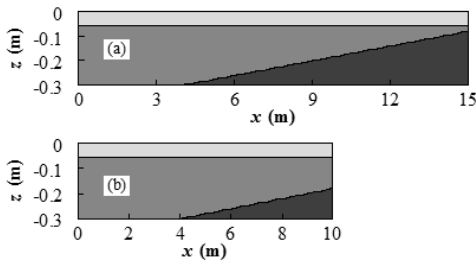


図-4 1/50の勾配の斜面がある計算対象領域

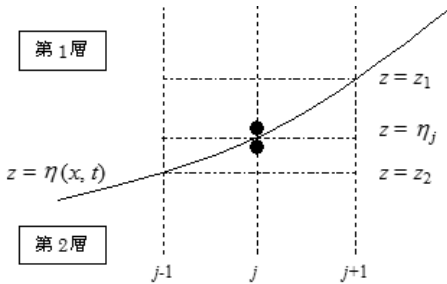


図-5 ある時刻における界面 (●は、界面近傍における上・下層の流体粒子を表わしている。)

動及び界面変動の実験結果及び計算結果をそれぞれ図-3 (a) 及び (b) に示す。上層厚が相対的に厚く、表面波及び内部波の卓越周期が大きく異なっている。

5. 斜面上の碎波点近傍における内部進行波

(1) 内部孤立波の3次解を用いる数値解析の諸条件

図-4 (a) に示す鉛直断面内の斜面上を伝播する内部波を対象とする。2層流体の上面は、固定水平板で覆われているとする。領域の両端に完全反射の鉛直壁がある。上・下層の層厚比及び密度比は、それぞれ、 $h_1/h_2=0.25$ 及び $\rho_1/\rho_2=1.02$ である。初期条件として、内部孤立波の3次解 (中山ら, 2010) を与える。初期振幅が $a=0.02, 0.04, 0.05, 0.07$, または、 0.08m である5ケースを対象とする。速度ポテンシャルの展開項数は、 $N=3$ とする。計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x=0.02\text{m}$ 及び $\Delta t=0.005\text{s}$ である。

(2) 波速及び界面近傍における水平方向流速

内部波の谷の、水平方向の移動速度を波速と考える。

一方、界面近傍における上・下層の水平方向流速 $u_{i,\eta}$ は、次式で表わされる。

$$u_{i,\eta} = \frac{\partial \phi_{i,\eta}}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (6)$$

図-5を参照して、 $z=\eta_j$ に位置する界面の近傍における第 i 層の流体粒子の水平方向流速 $u_{i,j,\eta}$ を $z=z_i$ における値を用いて近似し、次式で定義する。

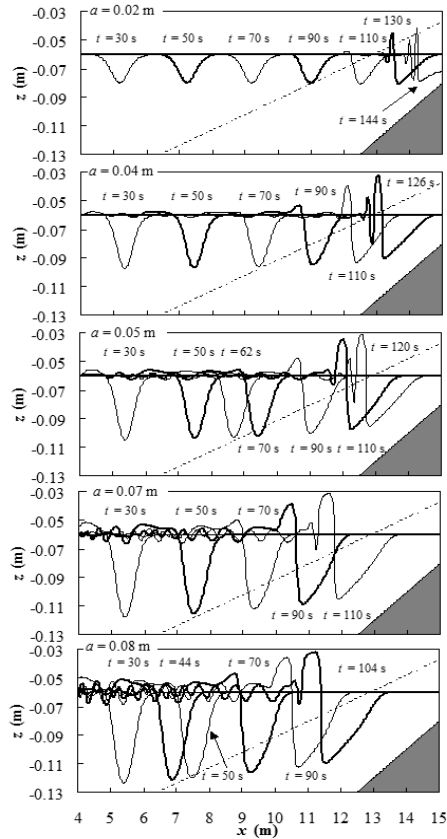


図-6 図-4 (a) の領域における各時刻の界面形 (点線は、KdV 理論による critical level の位置を示している。)

$$u_{i,j,\eta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{z=\eta_j} = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{\Delta z_i^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right\} \Big|_{z=z_i} \\ = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \frac{\Delta z_i^\beta}{\beta!} \frac{f_{i,\alpha,j+1} - f_{i,\alpha,j-1}}{2\Delta x} z_i^{\alpha-\beta} \quad (\alpha \geq \beta) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、添え字 j は、計算格子番号を表わし、 $\Delta z_i = \eta_j - z_i$ である。

(3) 斜面上における非線形内部波

図-6に、各時刻における界面形の計算結果を示す。ここで、図中の点線は、内部孤立波解の界面が存在し得る最低位置を示す critical level (船越・及川, 1989) である。KdV 理論による critical level z_c は、次式で表わされる。

$$z_c = b / \left(1 + \sqrt{\rho_2/\rho_1} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

いずれの初期振幅の場合も、界面が critical level に到達すると、谷背面の勾配が急に、谷前面の勾配が穏やかになり始める。このような谷の後傾化は、非分散モデルを適用して得られた、斜面上を伝播する内部波の計算結果 (柿沼, 2001) と類似している。図-6には、界面が critical level に到達した後、分裂波が生じ、波高が増大する過程

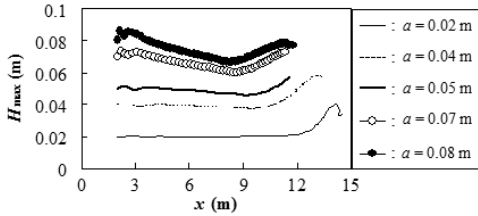


図-7 図-6の第1谷が各地点を通過するときの第1波の波高

も示されている。

図-7に、内部波の谷が各地点を通過するときの波高を示す。界面がcritical levelに到達するまでは、波高の増大が認められない。このうち、初期振幅が $a=0.07$ 及び 0.08m の場合、初期条件として与えた内部孤立波の3次解が保存波でないため、内部波は、水平床上で変形して波高を減じ、斜面上においても、同様の変形過程にあり、伝播に伴い波高が減少している。しかしながら、界面がcritical levelに到達した後、次第に波高が増大している。

(4) 碎波点近傍における物理量

図-8に、内部波の谷が各地点を通過するときの、波速と、谷位置の界面近傍における上・下層の水平流速とを示す。各物理量が不連続的に急変する地点が見られる。内部波の谷がこれらの地点を通過後、暫くして計算が発散した。こうした、物理量の計算値が不連続となった地点が、内部波の碎波点であると考えられる。なお、図-6に示した、各場合における最終の時刻の界面形状は、計算が発散する直前の界面形状である。

鉛直積分型の本モデルによる数値解析では、界面変動 η を x の1価関数として取り扱うために、 $\partial\eta/\partial x$ が非常に大きくなると計算が発散する。しかしながら、図-6に示す場合においては、 $|\partial\eta/\partial x|_{\max} \approx 1$ であり、計算が発散するほど大きくなっていない。本モデルによる数値解析では、速度ポテンシャルの近似の範囲内で、界面における運動学的境界条件を物理量が満足するような数値解が、変分法により求められる。すなわち、界面の法線方向において、界面の移動速度と水粒子の速度成分とが一致するような解を見付けようとするのである。ところが、碎波点近傍では、こうした解が求められない。その結果、物理量の計算値の、空間的に不連続な変化が現れたと考えられる。

この運動学的境界条件は、界面が鉛直面に近付くと、波速と水粒子の水平方向流速との一致として近似されるため、進行波性の表面波の碎波条件に対しては、渡辺ら(1983)で行なわれたような波速流速比の検討がなされている。

なお、内部界面では、Kelvin-Helmholtz不安定が発生し得る。線形浅水波に対するKelvin-Helmholtz不安定の発生条件は、次式で表わされる。

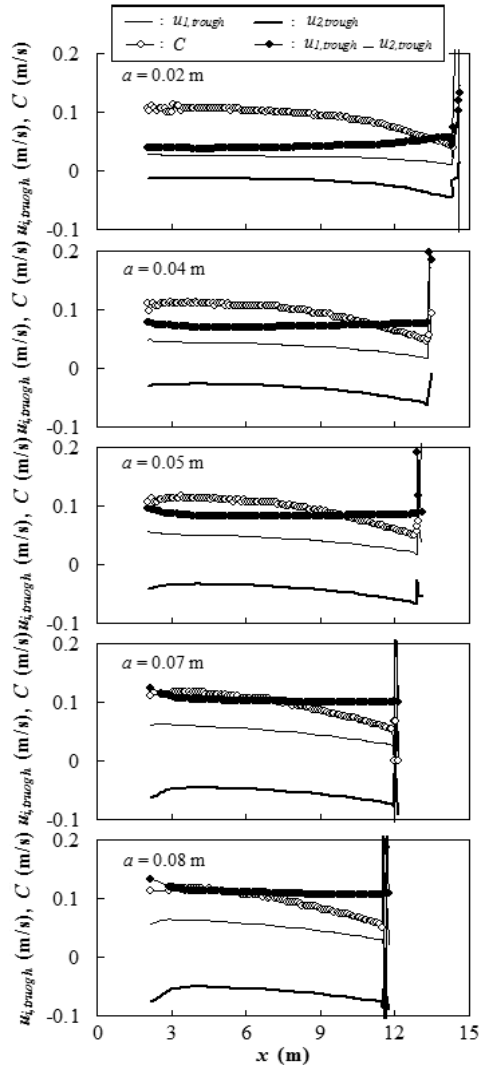


図-8 図-6の第1谷が各地点を通過するときの界面近傍における上・下層の水平方向流速及び谷の位相速度

$$\left(\frac{|U_1 - U_2|}{\sqrt{g h_2}} \right)^2 > \frac{\tanh k h_1 + \tanh k h_2}{k h_2} \approx \frac{h_1 + h_2}{h_2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 k は、波数であり、 $\varepsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ である。また、 $|U_1 - U_2| = |u_{1, \text{trough}} - u_{2, \text{trough}}|$ とする。

図-8より、内部波が伝播するにつれて、内部波の波速及び水平方向流速が減少し、上・下層間の水平方向流速の差は、振幅が小さい場合ほど顕著に増加することがわかる。図-8の各場合に対して、式(9)の条件を調べたところ、すべての場合においてKelvin-Helmholtzの不安定が発生しないことがわかった。すなわち、この不安定によって碎波が発生したわけでないことが確認された。

6. 鉛直壁に衝突した内部波の碎波

(1) 界面近傍における鉛直方向流速

図-4 (b) に示す計算対象領域内を伝播する内部波を対象とする。他の計算条件は、5. における数値解析と同一である。

鉛直壁のある位置での、界面の近傍における第*i*層の流体粒子の鉛直方向流速 $w_{i,\eta}$ は、次式により求められる。

$$w_{i,\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \alpha f_{i,\alpha} \eta^{\alpha-1} \dots\dots\dots (10)$$

(2) 碎波点近傍における内部重複波

鉛直壁位置 ($x=10.0\text{m}$) における界面変動及び界面近傍の鉛直方向流速の時間変化を図-9に示す。相対波高が小さい $a=0.02\text{m}$ の場合、上・下層の界面近傍の鉛直方向流速が一致している。

ところが、相対波高が大きい $a=0.08\text{m}$ の場合、鉛直壁位置 ($x=10.0\text{ m}$) において、内部波が最大振幅を示した直後、 $w_{1,\eta} > w_{2,\eta}$ となっている。すなわち、界面の法線方向において、界面の移動速度 $\partial\eta/\partial t$ と水粒子の速度成分とが一致していない。このことは、界面における運動学的境界条件が満たされていないということを示している。そして、この場合の内部波は、上層と下層の間に間隙を生じさせようとするような碎波形態を見せていると言える。

7. 結論

強非線形・強分散内部波方程式系を適用し、表面波及び内部波の数値解析を行なった。固定水平板で挟まれた2層流体及び自由水面を有する2層流体における表面波や内部波を対象として計算結果と実験結果を比較し、相対的に深い水域を伝播する分散的な内部波に対して、提案した数値モデルによる水面変動並びに界面変動の再現性が高いことを示した。

また、斜面上を進行する内部波では、内部波の谷がcritical levelに達した後、分裂波が発生し、波高が増大することが確かめられた。流速が不連続的な変化を示す地

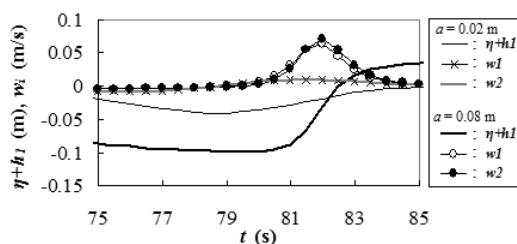


図-9 図-4 (b) の $x=10.0\text{m}$ にある鉛直壁位置における界面変動及び界面近傍における上・下層の鉛直方向流速

点が存在し、この地点が内部波の碎波点と考えられる。なお、内部進行波の碎波限界には、線形理論によるKelvin-Helmholtzの不安定との関係性が見られなかった。

更に、内部波が鉛直壁に衝突する場合、相対波高が大きい条件では、内部波が最大振幅を示した後、界面の法線方向における界面の移動速度と水粒子の速度成分との不一致、すなわち、界面における運動学的境界条件の破綻が生じ、内部重複波の碎波が発生したと考えられる。

以上の数値解析結果は、展開項数が限られた速度ポテンシャルを導入した際の現象を示している。より高次の展開項を考慮した数値計算を実施し、特に内部波の碎波限界に関して検討を進めたい。

参 考 文 献

- 柿沼太郎 (2001) : 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 146-150.
- 柿沼太郎・山下 啓・中山恵介 (2009) : 潜堤上における非線形内部波の伝播特性, 海岸工学論文集, 第56巻, pp. 66-70.
- 中山恵介・柿沼太郎・及川正行・辻 英一・丸谷靖幸 (2010) : 内部ソリトン波の3次オーダー解による再現性の検討, 海岸工学論文集, 第57巻, pp. 1-5.
- 船越満明・及川正行 (1989) : 成層流体中の非線形波動, ながれ, 日本流体力学会, 第8巻, pp. 311-335.
- 渡辺 晃・原 哲・堀川清司 (1983) : 重合した波浪場における碎波について, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 5-9.
- Horn, D. A., L. G. Redekopp, J. Imberger and G. N. Ivey (2000): Internal wave evolution in a space-time varying field, J. Fluid Mech., Vol. 424, pp. 279-301.
- K. Nakayama and T. Kakinuma (2010) : Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 62, pp. 574-590.