内部ソリトン波の3次オーダ解による再現性の検討

Applicability of 3rd Order Theoretical Solutions into Internal Waves

中山恵介¹ · 柿沼太郎² · 及川正行³ · 辻 英一⁴ · 丸谷靖幸⁵

Keisuke NAKAYAMA, Taro KAKINUMA, Masayuki OIKAWA, Hidekazu TSUJI and Yasuyuki MARUYA

Applicability of the 3rd order theoretical solutions for internal waves in a two-layer system is investigated by using a strongly nonlinear and dispersive internal wave model. The 3rd order solution is derived using the 9th order internal wave equations. The 3rd order solution is found to give larger wavelength scale compared to KdV theory. The applicability of the 3rd order solution is confirmed to be high when the amplitude of internal solitary wave is 5% of the lower layer thickness. A fully nonlinear strongly dispersive internal wave model reveals that high frequency internal waves are induced behind an internal solitary wave when the initial shape of internal solitary wave is larger than critical level.

1. はじめに

沿岸域に存在する汽水湖,エスチュアリなどの沿岸域 では、塩水と淡水の存在、および日射の影響により、密度 成層が発達し易いと言える.成層場では、水表面からは想 像しがたいほどの振幅を持った内部波が発生することが知 られており、その内部波が地形の効果により砕波すること で、巻き上げや貫入現象の発生に伴う、物質循環へ影響が 生じることが報告されている(Wallace・Wilkinson, 1988; Helfrich, 1992; Pierson・Weyhenmeyer, 1994; Antenucci・ Imberger, 2001; Nakayama・Imberger, 2010).特に2成層 が成り立つような場合には、内部波の斜面上での砕波に より界面下に明確な貫入が発生することが知られている が、どのように内部波が変形・発達するかについては十 分な検討が行われていない(Nakayama・Imberger, 2010).

2層システムにおける内部波の変形については、 Choi・Camassa (1999) に代表される理論や、長波から 発生するソリトン分裂に関して論じたHornら (2001)の 実験による研究が存在する. 同様な現象について、 Hollowayら (1997) は実現象を対象として検討を行った. 辻・及川 (2006) は、2次元空間における有限小振幅モ デルを用いて、2層流体における孤立波の相互作用に関 する数値解析を行い、初期の4倍にもおよぶ振幅の内部 波の発生可能性を示した. 内部波は多くのケースにおい て、強非線形性と強分散性の釣り合いにより発生する.

1	正会員	博(工)	北見工業大学工学部 教授 社会環境工学科
2	正会員	博(工)	鹿児島大学大学院 准教授 理工学研究科 海洋土木工学専攻
3 4 5	非会員 非会員 受止会員	工博 博(理)	福岡工業大学教授 知能機械工学科 九州大学助教 応用力学研究所 北目工業士学士学院 士本開発工学車攻

そのため、辻・及川により報告された結果が、常に発生 するか否かについては不明であり、強非線形性および強 分散性を考慮した検討を行う必要がある.

辻・及川により報告された相互干渉は、単一の内部波 同士の相互干渉であり、その単一の内部ソリトン波をど のように与えるかという初期値問題も存在する.我々は、 過去に示された9次のオーダの内部波の方程式(Mirie・ Pennell, 1989)を利用して3次のオーダ(本論文では、3 次オーダと記す)までの解を導出し、強非線形性および 強分散性を再現できる可能性を示した.そこで本研究で は、初期値問題に対して、本研究による3次オーダの内 部ソリトン波の解を初期値として与え、強非線形強分散 内部波モデル(柿沼, 2001; Nakayama・Kakinuma, 2010) を用いて内部波の進行を再現することが出来るかを検討 し、その適用限界について論じることを目的とする.

2.2層システムにおける3次オーダの孤立波解

9次オーダの内部波の方程式(Mirie · Pennell, 1989) を利用して,本研究において導出された3次オーダの波 形の解を以下に示す(図-1).

$h = h_0 (1 + \zeta)$ (1)
$\zeta = \varepsilon A_{11}S + \varepsilon^2 \Big(A_{21}S + A_{22}S^2 \Big) + \varepsilon^3 \Big(A_{31}S + A_{32}S^2 + A_{33}S^3 \Big) \dots \dots (2)$
$S = \operatorname{sech}^2 X$ (3)
$X = \frac{\sqrt{3K\varepsilon}}{2h_0} \left(x - x_0 - C_R t \right) \dots \tag{4}$
$C_{R} = \sqrt{gh_{0}}C_{0} \left(1 + \varepsilon C_{1} + \varepsilon^{2}C_{2} + \varepsilon^{3}C_{3}\right) \qquad (5)$
$C_0 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma/R}} \cdots (6)$
$\sigma = \frac{\rho_1}{\rho_2} \dots $



- $R = \frac{H h_0}{h_0}$ (8) $a = \varepsilon A_{11} + \varepsilon^2 (A_{21} + A_{22}) + \varepsilon^3 (A_{31} + A_{32} + A_{33})$ (9)

$$A_{22} = \frac{1}{2(1+\sigma R)} \left[\frac{3}{2} K^2 A_{11} (1+\sigma R^3) + 2K(1-\sigma) - 2A_{11} (1+\sigma/R^3) \right]$$
(12)

$$A_{31} = \frac{1}{K(1+\sigma R)} \left[-\frac{K^2}{5} (1-\sigma R^2) + \frac{2}{3} K A_{11} (1+\sigma/R) - \frac{8}{3} (1-\sigma/R^4) - K A_{21} A_{11} (1-\sigma) + 2 A_{22} (1+\sigma/R^3) - 2 K A_{21} C_1 (1+\sigma R) + \frac{4}{3} A_{22} C_2 (1+\sigma/R) - K^2 A_{11} C_1 (1+\sigma R^3) - 2 K C_1 (1-\sigma) + 4 A_{11} C_1 (1+\sigma/R^3) \right]$$
(13)

$$A_{32} = \frac{1}{K(1+\sigma R)} \left[\frac{3}{5} K^{3} A_{11} (1+\sigma R^{5}) - \frac{K^{2}}{3} (1-\sigma R^{2}) - \frac{K}{3} A_{11} (1+\sigma / R) + \frac{3}{4} K^{2} A_{21} (1+\sigma R^{3}) + 2KA_{21} A_{21} (1-\sigma) - \frac{21}{20} A_{22} (1+\sigma R^{3}) + \frac{K}{3} A_{22} A_{11} (1-\sigma) - A_{22} (1+\sigma / R^{3}) + 2KC_{1} (1-\sigma) - 2A_{11} C_{1} (1+\sigma / R^{3}) - 2KA_{22} C_{11} (1+\sigma R) + \frac{4}{3} (1-\sigma / R^{4}) \right] \qquad (14)$$

$$A_{33} = \frac{1}{K(1+\sigma R)} \left[-\frac{3}{5} K^3 A_{11} (1+\sigma R^5) + \frac{9}{20} K^2 (1-\sigma R^2) - \frac{K}{3} A_{11} (1+\sigma/R) + \frac{1}{3} (1-\sigma/R^4) + \frac{31}{20} K^2 A_{22} (1+\sigma R^3) + \frac{4}{3} K A_{22} A_{11} (1-\sigma) - A_{22} (1+\sigma/R^3) \right] \dots (15)$$

$$C_{1} = \frac{1 - \sigma / R^{2}}{2(1 + \sigma / R)} A_{11}$$
 (17)



$$C_{2} = \frac{1}{2(1+\sigma/R)} \left[\frac{K^{2}}{5} (1+\sigma R^{3}) + 3(1+\sigma/R)C_{1}^{2} \right] \dots (18)$$

$$C_{3} = \frac{1}{2(1+\sigma/R)} \left[\frac{2}{35} K^{3} (1+\sigma R^{5}) + \left(\frac{K^{2}}{5} A_{21} A_{11} + \frac{2K^{2}}{5} C_{1} \right) (1+\sigma R^{3}) + (2KA_{21}A_{11}C_{1} + KC_{1}^{2} + 2KC_{2}) (1+\sigma R) - (A_{21}A_{11}C_{1}^{2} + 2A_{21}A_{11}C_{2} + 2C_{1}C_{2}) (1+\sigma/R) \right] \dots (19)$$

ここで、 $\rho_1 \ge \rho_2$ は上層密度と下層密度、 $H \ge h_0$ は全層と 下層厚さ、 ζ は無次元化された界面変位、 $p_1 \ge p_2$ は上層 と下層の圧力、aは無次元化された振幅、hは界面位置、 ε は摂動展開パラメータである。速度場、圧力場につい ては、水平成分に関する抵抗係数などを用いて別式によ り得られるが、紙面の都合上省略する。

3. 強非線形強分散内部波モデルへの適用

2層システムにおける3次オーダの孤立波解がどのよう な性質をもつかを検討するために,界面形をKdV理論と の比較を行った.また,非回転場における2層流体の方 程式である強非線形強分散内部波モデルが,速度ポテン シャルをzのべき乗の関数により再現することから,考 慮する項数による再現性の検討も行った.

KdV理論との比較

比較対象とした波は、その差が顕著に現れるように、 比較的大きな振幅の波を対象とした。上層厚さ0.25m, 下層厚さ0.75m,上層密度/下層密度=1.000/1.005,振幅 =0.3×0.75mとした(図-2).2層システムにおけるKdV 理論解については、Nakayama (2006)を参照いただきた い.3次オーダの孤立波解の波長の代表スケールが、 KdV理論解と比較して大きいことが分かる。この点は、 Nakayama・Kakinuma (2010)に示されているとおり、 KdV理論よりも高精度な解を利用するとみられる現象で あり、KdV理論解の適用限界を越えて3次オーダの孤立 波解が内部波の形状を再現していることが示された。

(2) 強非線形強分散内部波モデルでの初期値再現性

強非線形強分散内部波モデルでは,速度ポテンシャル の再現性を向上することにより,計算精度を上げること が出来る.これまでの研究で,べき乗に展開する項数を



図-3 3次オーダの孤立波解とKdV理論解による速度ポテンシャルの空間分布.(a)3次オーダの孤立波解(b)次数1. (c)次数2.(d)次数3.



2次の関数まで考慮することにより、深海波を除く波の 分散性を再現できることが示されている(Nakayama・ Kakinuma, 2010). そこで、べき乗展開の項数を1から3 (次数1:nd=1から次数3:nd=3と呼ぶこととする)ま で変化させることにより速度ポテンシャルの再現性に関 する検討を行うこととした(図-3).

3次オーダの孤立波解による速度ポテンシャル分布で は、下層において緩やかなカーブを描くようなコンタが 形成されていた.そのため、高精度な再現のためには、 べき乗展開において2次関数まで含む必要があり、次数3 が必要であることが確認された.しかし、あくまでも大 振幅の内部波に関して検討を行った結果であり、3次オ ーダの孤立波解が、そのような大振幅の波に対して十分 な再現性を持っているかどうかは疑問が残る.そこで次 章にて、強非線形強分散内部波モデルによる3次オーダ の孤立波解の適用性に関する検討を行うこととする.

4.3次オーダの孤立波解の適用性について

検討対象とした条件は,表-1に示されるものとした. 上層厚/下層厚<<1もしくは>>1において内部ソリトン

表-1 解析対象とした孤立波条件

case	上層厚 /下層厚	上層密度 /下層密度	振幅 (×下層厚)
case 1	0.2/0.8	1.000/1.005	0.05
case 2	0.2/0.8	1.000/1.005	0.30
case 3	0.2/0.8	1.000/2.000	0.05
case 4	0.2/0.8	1.000/2.000	0.30
case 5	0.4/0.6	1.000/1.005	0.05
case 6	0.4/0.6	1.000/1.005	0.30
case 7	0.4/0.6	1.000/2.000	0.05
case 8	0.4/0.6	1.000/2.000	0.30

波は存在し易くなることが知られていることから,比較 のために<<1であるケース(case 1~case 4)と≒1のケ ース(case 5~case 8)の8ケースを用意した.成層の強 さ,層厚,振幅の条件が決まれば,内部ソリトン波の波 長の代表スケールが決定される.当然のことであるが, 振幅が大きくなるほど波長スケールが小さくなることが 確認された(図-4).

(1) 層厚比による非線形性が強い場合: case 1-case 4

case 1からcase 4までの上層厚/下層厚=0.8は,孤立波 が発生し易い条件であると言える.その条件下での下層 厚×0.05の振幅を与えた場合(case 1とcase 3の場合), nd=1では高周波への分裂が発生するが,nd=3では初期形 状がそのまま維持されることが確認された(図-5).case 2のように,他と比較して大きい下層厚×0.30を与えた 場合,nd=1における分裂はより激しく,nd=3の場合でも 後方に高周波な内部波を発生させていた.そのため,下



層厚×0.30を振幅として与える場合,3次オーダの孤立 波解の再現限界を越えてしまっている可能性が示された (図-6).

続いて、critical levelを越えてしまうような初期波形が 与えられる場合に、波形がどのように変化するかを検討 した.critical levelは、 $\sqrt{\rho_1}$: $\sqrt{\rho_2}$ となるように全層厚を分 割するような位置に存在することから、case 4では底面 から0.586mに存在していたことが分かる(図-7). これ までの研究で、critical levelを越える初期波形は、波の後 方から崩れてゆくことが示されている(辻, 1996).本 ケースでも同様な傾向がみられ、nd=1では台形型に近い 形状の波が発生していた.nd=3では、孤立波の特徴であ るとがった形状が滑らかになっており、Nakayama・ Kakinuma (2010)に示されているように高精度近似が必 要な内部波が発生していたことが示唆された.

(2) 層厚比による非線形性が弱い場合: case 5-case 8

case 5からcase 8までのケースは, case 1からcase 4と 比較して上層厚/下層厚が1に近く, 振幅が小さい場合, 長波近似でもそれなりの再現性を得ることが期待され る.実際, case 5やcase 7のような微小振幅のケースでは, nd=1で若干の前傾化がみられるが, それほど大きな形状 に関する差は見つけられなかった(図-8).

上層厚/下層厚が1に近い場合,上下層の密度にも関 係するが,内部波の振幅が大きくなるとcritical levelを横 切る条件が与えられるケースが増える(case 6とcase 8). case 6におけるnd=1とnd=3において,前傾化が抑えられ るケースであったことから,case 4の考察で述べた波の 後方における高周波への分裂が明確に確認された(図-9). その結果,critical levelと交差しない波形になって以降, 形状変化はほぼなく進行することが確認された.



図-9 case 6における (a) 初期条件と4000秒後の (b) nd = 1と (c) nd = 3

5.おわりに

本研究により示された3次オーダの孤立波解の強非線 形強分散方程式への適用性について検討し、以下のよう な結論を得た.

- a) KdV理論解と比較し、3次オーダの孤立波解は尖りが 抑えられていることが確認された.
- b) 3次オーダの孤立波解の速度ポテンシャルを再現する ためには、強非線形強分散方程式において次数3: nd=3を利用する必要があることが分かった。
- c) 上層と下層の層厚比が大きく非線形性が強い場合, 下層厚×0.05程度であれば,密度差が大きなケースで あっても、3次オーダの孤立波解は良好な初期条件を 与えることが分かった.しかし,下層厚さ×0.30程度 であると,適用性に問題が生じることも確認された.
- d)上層と下層の層厚比が大きく非線形性が弱い場合, 下層厚×0.05程度であれば,非線形性が強い場合と同

様に,3次オーダの孤立波解は良好な初期条件を与え ることが分かった.

 e) critical levelを横切るような初期条件を与えた場合, 波の後方から高周波の内部波が発生し,振幅がcritical level以下に落ち着くことが確認された.

参考文献

- 柿沼太郎(2001): 透水性海浜における内部波の挙動の数値計 算,海岸工学論文集,第48巻, pp.146-150.
- 辻 英一(1992):二層流体におけるソリトンとその相互作用, 九州大学大学院総合理工学研究科修士論文, pp.15-16.
- 辻 英一・及川正行(2006): Extended Kadomtsev-Petviashvili 方程式の孤立波解の斜め相互作用,応用力学研究集会報告,No.17ME-S2,No.37,http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/ fluid/meeting/17ME-S2/content.html.
- Antenucci, J.P., and J. Imberger. (2001) : Energetics of long internal gravity waves in large lakes, Limnology and Oceanography., Vol.46, pp. 1760-1773.
- Choi W, and R. Camassa (1999) : Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, Journal of Fluid Mechanics., Vol. 396, pp. 1-36.
- Helfrich, K.R. (1992) : Internal solitary wave breaking and run-up on a uniform slope, Journal of Fluid Mechanics., Vol.243, pp. 133-154.
- Horn, D.A., J. Imberger, and G.N. Ivey. (2001) : The degeneration of large-scale interfacial gravity waves in lakes, Journal of Fluid Mechanics., Vol.434, pp. 181-207.
- Holloway, P.E., E. Pelinovsky, T. Talipova, and B. Barnes. (1997): A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf, Journal of Physical Oceanography., Vol.27, pp. 871-898.
- Mirie, R.M. and S.A. Pennell. (1989): Internal solitary waves in a two-fluid system, Physics of Fluids, A1(6), pp.986-991.
- Nakayama K. (2006): Comparisons of using CIP, compact and CIP-CSL2 schemes for internal solitary waves, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.51, pp.197-219, doi:10.1002/fld.1112.
- Nakayama K. and J. Imberger. (2010): Residual circulation due to internal waves shoaling on a slope, Limnology and Oceanography., Vol. 55, pp. 1009-1023.
- Nakayama K. and T. Kakinuma. (2010) : Internal waves in a twolayer system using fully nonlinear internal-wave equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.62(5), pp.574-590, doi: 10.1002/fld.2037.
- Pierson, D.C., and G. A. Weyhenmeyer. (1994) : High resolution measurements of sediment resuspension above an accumulation bottom in a stratified lake, Hydrobiologia , Vol.284, pp. 43-57.
- Wallace, B.C., and D. L. Wilkinson. (1988) : Run-up of internal waves on a gentle slope in a twolayered system, Journal of Fluid Mechanics., Vol.191, pp. 419-442.