

供用期間を考慮した消波ブロックの損傷度に基づく予防保全問題

A Preventive Maintenance Problem of Armour Blocks with an In-Service Period

佐藤 毅¹・松見吉晴²・角 勇人³・平山隆幸⁴・太田隆夫⁵

Takashi SATOW, Yoshiharu MATSUMI, Hayato SUMI, Takayuki HIRAYAMA and Takao OTA

A maintenance policy for armour blocks is discussed to reduce total maintenance cost over an in-service period. The blocks are subject to waves which occur at a homogeneous Poisson process, suffer a non-negative random damage with an identical distribution. The random damage of armour layer is accumulated to the current damage level. If accumulated damage exceeds a threshold k before catastrophe destruction, then the blocks are maintained preventively. An expected maintenance cost over the in-service period is derived. Numerical examples to minimize the expected maintenance cost are given. An expected value and variance of damage caused by a wave have great impact on an optimal preventive threshold k to minimize the expected cost.

1. はじめに

海岸保全施設の維持管理では、施設の要求性能を維持すべく施設保全を実施する必要がある。しかし、適切な計画に基づかない保全実施は、供用期間中に必要とされる保全費用の増大を招く。とくに消波施設では、突発的な事後保全が保全費用増大の要因となりやすく、適切な予防保全計画の策定が必要とされている。

海岸構造物の保全（補修）問題は、施設の設計フェーズにおいてライフサイクルコスト（LCC）を最小化する問題として考慮されている。鹿島ら（1988）は、供用期間中、被災により補修の可能性がほとんどないように施設を設計するという従来の設計法に対し、一時的にはある程度の損傷を許容する考え方に基づいた設計法の実現性について考察をおこなっている。氏家ら（1991）は、鹿島らと同様な供用期間中における損傷を許容する立場のもと、消波ブロックの安定性係数や波高等の変動性を考慮した損傷確率を考慮した設計法について考察をおこなっている。これら保全を考慮した施設維持管理に関する研究は少なく、しかも、施設設計フェーズにおける問題として捉えられている。設計フェーズで仮定される施設がさらされる環境は、供用期間中に大きく変化することもある。この場合、LCC最小化に対する理論保証は崩れてしまう。つまり、設計フェーズにおける保全問題は無論重要であるが、施設運用開始後の保全についても設

計フェーズから独立して考える必要がある。また、国土交通省・農林水産省（2008）により海岸保全施設の維持管理に対し、ライフサイクルマネジメント（LCM）と呼ばれる概念を導入したマニュアル（案）が作成され、適時、適切な保全対策の必要性について訴えている。

本研究では、消波施設は事後保全と予防保全の2種類の保全を受けることができるとの仮定のもと、新設・既設に依存しない供用期間を考慮した消波ブロックの期待総保全費用を、信頼性工学における保全問題を応用し導出する。また、期待総保全費用を最小化する予防保全実施時期について、数値実験を用いた考察をおこなう。

2. モデルの概要

消波ブロックは、台風や異常発達した低気圧等（以後異常波浪）により損傷を被る。損傷は異常波浪によってのみ発生し、累積される。累積した損傷は、何らかの保全を受けない限り減少することはない。消波ブロックは、施設全体に累積された損傷量が K を越したとき、要求性能を保証できなくなる。つまり、製品としては故障状態であると見なす。本稿では、消波ブロックの損傷について、具体的な事例を用いず、損傷という概念のまま議論を続ける。この損傷が累積される過程は累積損傷過程として知られ、累積損傷過程を背景とする様々な保全モデル（Nakagawa, 2007）が提案されている。消波ブロックは予防保全と事後保全の2種類の保全を受けるが、いずれの保全を受けた場合も新設状態に回復すると仮定する。したがって、この回復時点を再生点と呼ぶ。消波ブロック新設時を第0再生点と呼び、以降順次、番号付けをする。第 $j-1$ 再生点と j 再生点間の区間を第 j （ $j=1, 2, \dots$ ）再生区間と呼ぶ。各再生区間において、 j 回目の異常波浪により発生する損傷量を確率変数 Y_j で表す。この確率変数 Y_j は、 j に対し独立かつ同分布であると仮定する。すなわ

1	博(工)	鳥取大学助教工学研究科社会基盤工学専攻
2	正会員	鳥取大学教授工学研究科社会基盤工学専攻
3	学生会員	鳥取大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻
4	正会員	三省水工九州支店 設計課
5	正会員	鳥取大学助教工学研究科社会基盤工学専攻

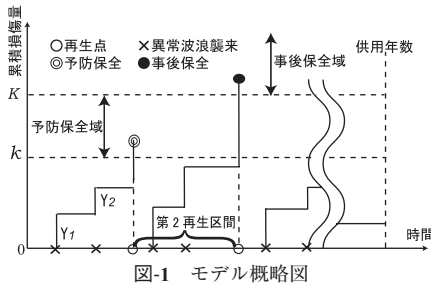


図-1 モデル概略図

ち、 j 回目の異常波浪により被る損傷量分布を、 $P\{Y_j \leq x\} \equiv G(x)$ と定義する。また、 j 回の異常波浪により累積される損傷量 $Z_j (= \sum_{i=1}^j Y_i)$ は、次式として求まる。

$$Pr\{Z_j \leq x\} = G^{(j)}(x) = \int_0^x G(x-y) dG^{(j-1)}(y) \cdots (1)$$

関数 $G^{(j)}(x)$ は、分布関数 $G(x)$ の j 重畳み込みであり、 j 回の異常波浪により累積される損傷量が x 以下である確率を表している。また、以下を付記する。

$$G^{(0)}(x) \equiv \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \cdots (2)$$

異常波浪襲来は、平均 λ の定常ポアソン過程（小和田，1991）に従うと仮定する。関数 $N(t)$ を、時間 t までに発生する異常波浪の回数を表す計数過程とすれば、時間 t までに j 回の異常波浪が襲来する確率は、次式として表される。

$$Pr\{N(t) = j\} = F_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} \exp^{-\lambda t} \cdots (3)$$

消波ブロックに累積された損傷量が K を超えた場合、要求性能が満足できないため緊急に事後保全を実施する。一般的に、事後保全は緊急性を要するため費用がかさむ傾向がある。したがって、故障状態に陥る前、適切な時期に予防的保全対策を講ずる必要性が生まれる。予防保全実施機会として、累積損傷量が k 以上 K 未満の時点において実施すると設定する。つまり、異常波浪襲来後、点検により損傷量が K 以上であれば事後保全を実施、 k 以上 K 未満であれば予防保全を実施、 k 未満では保全を実施しない。また、事後保全費用を c_1 、予防保全費用を $c_2 (< c_1)$ とする。最後に、消波ブロックの供用期間長を T 年とする。なお、供用期間中、保全による再生が繰り返される。以上のモデルと概要について、図-1により概略図を示す。

3. 供用期間を考慮した期待保全費用

供用期間 T における、総期待保全費用 $C_T(k)$ を導出する。各再生区間における期待保全費用は、確率過程の再生性が保たれることから、どの再生区間においても同じ値をとる。予防保全レベル k をもつ消波ブロックにおける第 j 再生区間の保全費用を $V_j(k)$ とする。ただし、 $j \neq N_T(k)+1$ とする。その期待保全費用 $E[V_j(k)]$ は、期待事後保全費用と期待予防保全費用の和としてもとまる。はじめに、

期待事後保全費用 $E[V_j^1(k)]$ は、

$$E[V_j^1(k)] = c_1 \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^k 1 - G(K-x) dG^{(i)}(x) \cdots (4)$$

次に、期待予防保全費用 $E[V_j^2(k)]$ は、

$$E[V_j^2(k)] = c_2 \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^k [G(K-x) - G(k-x)] dG^{(i)}(x) \cdots (5)$$

以上より、第 j 区間における期待保全費用 $E[V_j(k)]$ は次式として導出される。

$$E[V_j(k)] = E[V_j^1(k)] + E[V_j^2(k)] \cdots (6) \\ (j = 1, 2, \dots, N_T(k))$$

供用期間における再生回数について考える。供用期間 T 中に発生する期待再生回数 $H_T(k) = E[N_T(k)]$ は、再生関数の近似式（Cox, 1970）より

$$H_T(k) = \frac{T}{E[R_j(k)]} + \frac{Var[R_j(k)] - E[R_j(k)]^2}{2E[R_j(k)]^2} + o(1) \cdots (7)$$

ここで、 $E[R_j(k)]$ は、第 j 再生区間長 $R_j(k)$ の期待値を表しており、次式として求められる。

$$E[R_j(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} G^{(i)}(k) \int_0^{\infty} F_i(t) dt \cdots (8) \\ = \frac{1 + M(k)}{\lambda}$$

関数 $M(k)$ は損傷過程に対する再生関数とも呼ばれ、次式として定義される。

$$M(k) = \sum_{j=1}^{\infty} G^{(j)}(k) \cdots (9)$$

関数 $M(k)$ の現象的意味は、累積損傷量が k に至るまで、平均何回の異常波浪が襲来するかを表している。

関数 $Var[R_j(k)]$ は、第 j 再生区間長 $R_j(k)$ の分散を表しており、次式として求められる。

$$Var[R_j(k)] = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^k 1 - G(k-x) dG^{(i-1)}(x) \\ \times \int_0^{\infty} (t - E[R_j(k)])^2 dF_i(k) \cdots (10) \\ = \frac{2}{\lambda} \left\{ E[R_j(k)] + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i G^{(i)}(k) \right\} - E[R_j(k)]^2$$

以上、式 (6), (7), およびWald'sの関係式 (Tijms, 2003) より、供用期間 T を考慮した消波ブロックの期待総保全費用は、次式として求めることができる。

$$C_T(k) = [H_T(k) + 1] E[V_j(k)] - E[V_{N_T(k)+1}] \cdots (11) \\ (j = 1, 2, \dots, N_T(k))$$

ここで、関数 $E[V_{N_T(k)+1}(k)]$ は、

$$E[V_{N_T(k)+1}(k)] = c_2 + (c_1 - c_2) \frac{1}{\lambda E[R_j(k)]} \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^k 1 - G(K-x) dG^{(i-1)}(x) \cdots (12)$$

上記、有限な供用期間 $(0, T)$ における期待費用導出にあたり、理論背景はChrister (1978) モデルを用いている。

4. 無限期間における最適保全方策

先章では、供用期間を有限期間として期待保全費用を導出した。多くのLCC法において議論されている最小化問題において、供用期間が有限の場合、解析的に最適保全方策を構築する手法はほとんど示されていない。本章では、供用期間に対する縛りを有限から無限へ緩めた制約のもと、いつ保全を実施すべきかを解析的に議論する。供用期間を無限化するに伴い、本章における評価規範を単位年齢当りの期待保全費用とする。さらに、先の予防保全機会である累積損傷量 k 、もしくは再生点（新設時を含む）からの経過年齢が TR のいずれかに達したとき、予防保全を実施する問題へと拡張する。この拡張問題は、 $TR \rightarrow \infty$ の場合、累積損傷 k の予防保全問題へ、また、 $k \rightarrow \infty$ の場合、年齢 TR の単一制御変数による予防保全問題になる。本章では、 $H_i(x) = \sum_{j=i}^{\infty} F_j(x)$ とする。

(1) 期待保全費用

単位年齢当りの期待保全費用は、再生報酬定理 (Ross, 1970) より、1再生区間の期待長に対する1再生区間に必要とされる期待保全費用の比として導出される。つまり、関数 $C_T(TR, k)$ を供用期間 T 中の総保全費用と考えるとき、単位年齢当りの期待保全費用 $C(TR, k)$ は、

$$C(TR, k) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_T(TR, k)}{T} = \frac{1 \text{ 再生区間に必要とされる期待保全費用}}{\text{期待 1 再生区間長}} \quad \cdots (13)$$

以降、上式における期待確率量を求める。消波ブロックが要求性能を喪失する前に、予防取替年齢 TR において予防保全される確率は、次式として求まる。

$$A_1(TR, k) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) G^{(j)}(k) \quad \cdots (14)$$

消波ブロックが要求性能を喪失する前に、異常波浪襲来後、累積損傷量が k 以上 K 未満となり予防保全される確率は、次式として求まる。

$$A_2(TR, k) = \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(TR) \int_0^k [G(K-x) - G(k-x)] dG^{(j)}(x) \quad \cdots (15)$$

消波ブロックが、予防保全を実施する前に要求性能を喪失する確率、つまり故障確率は次式として求まる。

$$A_3(TR, k) = \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(TR) \int_0^k \bar{G}(K-x) dG^{(j)}(x) \quad \cdots (16)$$

ここで、 $\bar{G}(x) \equiv 1 - G(x)$ である。以上、式 (14) ~ (16) より、1再生区間に必要とされる期待保全費用は、次式として導出される。

$$A(TR, k) = c_2 \sum_{j=1}^2 A_j(TR, k) + c_1 A_3(TR, k) \quad \cdots (17)$$

期待1再生区間長は、次式として求まる。

$$L(TR, k) = \sum_{j=0}^{\infty} G^{(j)}(k) \int_0^{TR} F_j(t) dt \quad \cdots (18)$$

以上より、単位年齢当りの期待保全費用は次式として導出される。

$$C(TR, k) = \frac{A(TR, k)}{L(TR, k)} \quad \cdots (19)$$

(2) 最適方策

単位年齢当りの期待保全費用最小化を目的とする、最適予防保全方策について考察する。はじめに、予防取替年齢 TR により、式 (19) を最小化するための必要条件を導く。式 (19) を、予防取替年齢 TR で偏微分し、0と置くことにより、必要条件は次式として導出される。

$$\sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(TR) B_j(k) - \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(TR) G^{(j)}(k) \times \left[\frac{\sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) B_j(k)}{\sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) G^{(j)}(k)} \right] = c_2 \quad \cdots (20)$$

ここで、

$$B_j(k) = (c_1 - c_2) \int_0^k G(K-x) dG^{(j)}(x) \quad \cdots (21)$$

式 (20) の左辺を $P1(TR, k)$ とする。次に、式 (19) を最小化する予防損傷量 k の必要条件を導く。式 (19) を k で偏微分し、0とおくことにより、次式が求まる。

$$(c_1 - c_2) \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(TR) \int_0^k \int_{K-k}^{K-x} dG(y) dG^{(j)}(x) = c_2 \quad \cdots (22)$$

式 (22) の左辺を $P2(TR, k)$ とする。

次式より、関数 $P2(TR, k)$ は任意の $TR(0 < TR < \infty)$ 、 $k(0 < k \leq K)$ に対し、常に $P1(TR, k)$ より大きい。

$$P1(TR, k) - P2(TR, k) = (c_1 - c_2) \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(TR) G^{(j)}(k) \times \left\{ \frac{\sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) \int_0^k \int_{K-k}^{K-x} dG(y) dG^{(j)}(x)}{\sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) G^{(j)}(k)} \right\} < 0 \quad \cdots (23)$$

これより、式 (20) と (22) を同時に満足する有限な制御変数組 (TR^*, k^*) は、理論上存在しない。つまり、単位年齢あたりの期待保全費用を最小化する方策としては、 $k^* = K$ とし、必要条件式 (21) を満足する有限な $TR^* < \infty$ を選択するか、もしくは $TR^* \rightarrow \infty$ とし、必要条件式 (22) を満足する有限な $k^* < K$ を選択するほかない。以上より、2制御変数による最適化は、1制御変数の極限化によってのみ得られることがわかる。したがって、以下に単一制御変数による最適予防保全方策について述べる。

(3) 累積損傷量 k による最適予防保全方策

本節では、累積損傷量 k のみによる予防保全方策について考察をおこなう。単位年齢当りの期待保全費用は、式 (19) において $TR \rightarrow \infty$ とすることにより求めることが

できる。したがって、

$$C_B(k) \equiv \lim_{TR \rightarrow \infty} C(TR, k) = \lambda \left\{ \frac{c_2 + (c_1 - c_2) \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^k \overline{G}(K-x) dG^{(j)}(x)}{1 + M(k)} \right\} \cdots (24)$$

式 (24) を、制御変数 k で偏微分し、0 と置くことにより、 $C_B(k)$ を最小化するための必要条件は次式として導出される。

$$\int_0^k [1 + M(K-x)] dG(x) = \frac{c_2}{c_1 - c_2} \cdots \cdots \cdots (25)$$

式 (25) は、制御変数 k に関する 0 から $M(K)$ までの増加関数であることから、以下の最適予防保全方策を提案することができる。

(i) もし、 $M(K) > c_2/(c_1 - c_2)$ ならば、式 (25) を満足する有限かつ唯一の $k^* (0 < k^* < K)$ が存在する。また、最小化された期待保全費用は、次式となる。

$$C_B(k^*) = \lambda(c_1 - c_2) \overline{G}(K - k^*) \cdots \cdots \cdots (26)$$

(ii) もし、 $M(K) \leq c_2/(c_1 - c_2)$ ならば $k^* = K$ である。つまり、消波ブロックが故障状態になるまで、一切の保全活動を実施しないことが、期待保全費用最小化に対する最良の選択となる。この場合の期待保全費用は、次式となる。

$$C_B(k^*) = C(K) = \frac{\lambda c_1}{1 + M(K)} \cdots \cdots \cdots (27)$$

(4) 年齢 TR による最適予防保全方策

本節では、予防取替年齢 TR のみによる予防保全方策について考察をおこなう。単位年齢当りの期待保全費用は、式 (19) において $k \rightarrow K$ とすることにより求めることができる。したがって、

$$C_A(TR) \equiv \lim_{k \rightarrow K} C(TR, k) = \frac{c_2 + (c_1 - c_2) \sum_{j=1}^{\infty} F_j(TR) \overline{G}^{(j)}(K)}{L(TR, K)} \cdots (28)$$

式 (28) を、制御変数 TR で偏微分し、0 と置くことにより、 $C_A(TR)$ を最小化するための必要条件は次式として導出される。

$$\lambda Q_1(TR) \sum_{j=0}^{\infty} G^{(j)}(K) \int_0^{TR} F_j(t) dt - \sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) \overline{G}^{(j)}(K) = \frac{c_2}{c_1 - c_2} \cdots \cdots \cdots (29)$$

ここで、

$$Q_1(TR) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) \int_0^K \overline{G}(K-x) dG^{(j)}(x)}{\sum_{j=0}^{\infty} F_j(TR) G^{(j)}(K)} \cdots (30)$$

もし、関数 $Q_1(TR)$ が TR に関する増加関数である場合、式 (29) の左辺も 0 から $Q_1(\infty)[1 + M(K)] - 1$ までの増加関数となる。以上から、 $Q_1(\infty)[1 + M(K)] > c_1/(c_1 - c_2)$ が成立する場合、式 (29) を満たす $C_A(TR)$ を最小とする有限かつ唯

一の最適予防保全年齢 TR^* が存在する。

5. 数値例

供用期間を考慮したモデルにおける総期待保全費用 $C_T(k)$ の数値例を示す。なお、パラメータ λ を目的関数 $C_T(k)$ の変数と見なし、 $C_T(k, \lambda)$ と記す。はじめに、1 回の異常波浪により被る平均損傷 (ダメージパラメータ) を 1、分散 0.25 の正規分布 $N(1, 0.25)$ に従うと仮定し、消波施設の致命的損傷レベル $K=10$ 、供用年数を $T=50$ (年)、予防保全費用を単位費用 $c_2=1$ とし、事後保全費用 $c_1=10$ とする数値実験を実施した。

図-2 は、異常波浪の襲来頻度 λ 、および予防保全レベル k に対する総期待保全費用 $C_T(k)$ を表している。襲来頻度 λ が大きい場合、つまり、期待襲来間隔が短いほど、期待保全費用 $C_T(k)$ の k に対する感度が大きいことがわかる。これは、頻繁な異常波浪襲来は、保全実施回数の増加を招くためであると考えられる。また、予防保全レベル k が高い場合、事後保全費用の増大を招き、結果として供用期間における期待保全費用の急激な増加を引き起こしている。

図-3 は、図-2 の $\lambda=1$ 、 $\lambda=2$ における断面図と、新たに $\lambda=4$ の場合を合成した図である。総期待保全費用 $C_T(k)$ を最小とする k^* は 7.9 前後に集中している。また、最小化された総期待保全費用 $C_T(k^*)$ も、 λ の増加とともに高く

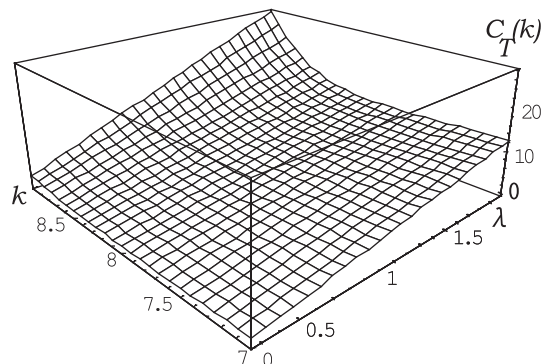


図-2 襲来頻度・予防保全レベルに対する期待保全費用

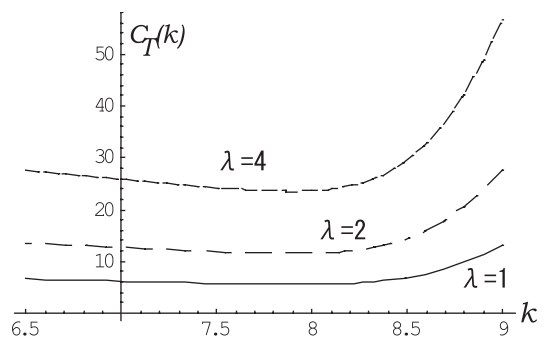


図-3 予防保全レベルに対する期待保全費用

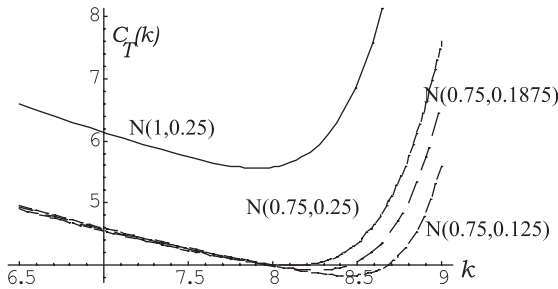


図-4 損傷の平均・分散に対する期待保全費用（ケース1）

なる様子が明白である。したがって、頻繁な異常波浪襲来が予想される環境下であるほど、適切な予防保全レベル設定の必要性が強くなると考えられる。

図-4、図-5は、1回の異常波浪により被る期待損傷量と分散 $N(1, 0.25)$ を基準とし、図-4は相対的に損傷程度が小さい場合、図-5は損傷程度が大きい場合における期待保全費用 $C_T(k)$ を表している。図-4において、異常波浪1回あたりの平均損傷が小さいほど k^* は大きく、 $C_T(k^*)$ は小さくなる。平均損傷が小さくなる場合、各異常波浪により引き起こされる事後故障確率は減少する。このため、予防保全レベル k は過剰な安全マージンの削減を目的とし、高い値へと動く。さらに、高い k 値を探るため、期待再生期間長が長くなり、供用期間中に必要な保全活動回数の減少が発生し、結果として期待保全費用が減少する。また、平均損傷が同じ場合においても、損傷分散が大きいほど、 $C_T(k^*)$ が大きくなる。これは、異常波浪の大きさにばらつきがあるほど事後故障のリスクが増加するため、早期予防保全が要求されるためと考えられる。図-5においても、図-4と同様な理由で期待保全費用 $C_T(k)$ 、および最適予防保全レベル k^* について説明ができる。

図-6は、供用期間に対する期待保全費用について示している。供用期間の違いに、最適予防保全レベル k^* は影響を受けていないことがわかる。

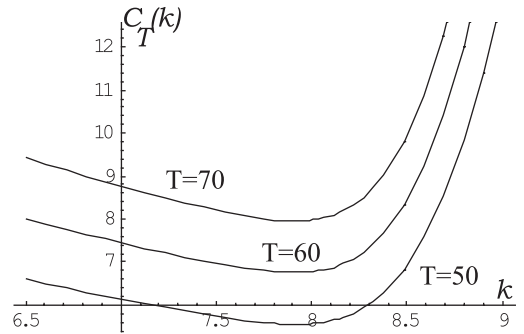


図-6 供用期間に対する期待保全費用

6. まとめ

本研究では、異常波浪襲来頻度、損傷分布を考慮した消波施設の予防保全に関する確率モデルの提案、および数値実験をおこなった。消波施設劣化においては、具体的な劣化スケールを採用せず、損傷量という概念による一般化をおこない、用途に応じ劣化進捗を損傷量を変数とした関数として再定義できる柔軟性を持たせた劣化モデルとして提案した。数値例より、予防保全レベルは総期待保全費用に大きな影響を与え、最適予防保全レベル k^* は、供用期間長や異常波浪襲来頻度よりも各異常波浪により被る損傷程度に大きな影響を受ける様子が示された。また、頻繁に異常波浪襲来を受ける場合にも、適切な予防保全を実施することにより、理論上期待保全費用の大幅な削減が可能であることも判明した。しかし、維持管理現場における本提案モデルの妥当性・精度に関する検証が今後の課題として残される。

謝辞：本研究は、科学研究費補助金基盤研究（C）（課題番号 20560479，研究代表者：松見吉晴）により実施された。

参考文献

- 氏家久芳・奥野敏彦・鈴木 誠・稲田 裕（1991）：消波ブロックへの信頼性設計法の適用，第38回海溝論文集，pp.601-605.
- 鹿島遼一・島田真行・山本正明・奥津一夫・今泉正次（1988）：ライフサイクルコスト最小設計法 - 補修を考慮した防波堤の設計 -，第35回海溝論文集，pp.727-731.
- 小和田正（1991）：確率過程とその応用，実教出版，183 p.
- 農林水産省・国土交通省（2008）：海岸・防災課ライフサイクルマネジメントのための海岸保全施設維持管理マニュアル（案）～堤防・護岸・胸壁の点検・診断～，105 p.
- Christer, A. H. (1978): Refined Asymptotic Costs for Renewal Reward Processes, J. Opl. Res. Soc. Vol.29, pp.577-583.
- Cox, D. R. (1970): Renewal Theory, Methuen, London, 142p.
- Nakagawa, T. (2007): Shock and Damage Models in Reliability Theory, London, Springer-Verlag, 186p.
- Ross, S.M. (1970): Applied Probability Models with Optimization Applications, San Francisco, Holden-Day, 198p.
- Tijms, H. C. (2003): A First Course in Stochastic Models, England, John Wiley and Sons, 478p.

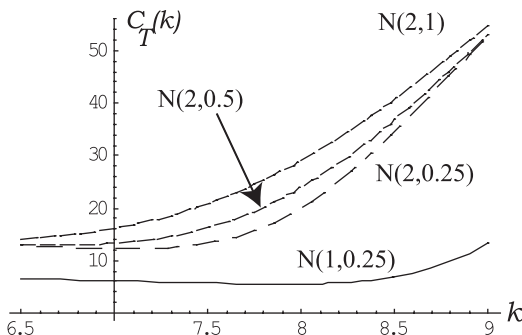


図-5 損傷の平均・分散に対する期待保全費用（ケース2）