

海水流動モデルにおける静水圧・非静水圧領域の動的接続

Dynamic Connection of Hydrostatic and Non-Hydrostatic Zone for Coastal Hydrodynamic Model

長谷部雅伸¹・多部田茂²

Masanobu HASEBE and Shigeru TABETA

Application limit of hydrostatic approximation for coastal hydrodynamic model was investigated, and a dynamic connection method of hydrostatic zone with non-hydrostatic zone was developed. By theoretical consideration employing parameter δ and ε which represent the ratio of mesh size Δz to Δx and the ratio of vertical velocity to horizontal velocity, it was found that hydrostatic approximation can be applied if $\delta\varepsilon$ and ε^2 are minute. To examine the developed method, simulations for vertical jet under oscillating current was conducted. The result by the present model was similar to that of non-hydrostatic model in the case that hydrostatic approximation was applied on the area of $\delta\varepsilon < 0.005$ and $\varepsilon^2 < 0.005$.

1. はじめに

沿岸域における流動・拡散場を取り扱う問題では、潮流や海流など鉛直方向に比べ水平方向の流動スケールが大きな現象が卓越するため、数値シミュレーションにおいて静水圧近似を適用する機会が多い。一方、発電所温排水や海域肥沃化を目的とした深層水の水中放流などでは、放水口近傍における三次元的な噴流の挙動が卓越し、放水口周りの局所的な流れ場の影響が広域の拡散形態に影響を及ぼす可能性も指摘されている(長谷部ら, 2004)。こうした問題は、水中放流の例に限らず海底窪地や人工構造物周りなど地形が局所的に急変する箇所にも発生しうるものであり、少なくともこれらの周囲領域においては静水圧近似を適用しない数値モデル(以下、非静水圧モデルとする)の適用が望ましいと考えられている。ただし計算領域全体を非静水圧モデルとすると計算コストが増大してしまうため、局所的な流れ場を非静水圧モデルで取り扱い静水圧モデルが適用された広い領域との接続によって計算の効率化を図る例が見られる(日本造船学会, 2001など)。一方で静水圧近似の適用範囲については理論的な考察が行われた例は少なく、明確な基準が無いのが現状である。本論では、静水圧近似の適用範囲について理論的な考察を行い、静水圧近似の適否に関する判定手法を提案する。さらに非静水圧領域を流れの状況に応じて時々刻々と変動させることが可能な数値モデルを提案し、従来のモデルとの比較検証を行なう。

2. 静水圧近似の適用性に関する検討

浅水流場を対象とした静水圧モデルと非静水圧モデルとの差異について、木下(2001)は水面波の伝播を対象とした比較計算を行い、水平方向格子間隔が全水深よりも大きくなる場合に両者の結果がほぼ等しくなることを示している。同様の結果は密度流フロントの進行に関する問題(二瓶ら, 2002)や、風環境分野におけるヒートアイランド現象(川本ら, 2006)に関する両モデルの比較検討からも得られている。ただしこれらの検討は静水圧近似の適否を論じたものではなく、非静水圧モデルにおける圧力の算定精度が格子解像度に依存することを個別の現象を対象とした解析結果によって定量的に示したものであるといえる。静水圧近似の適用範囲については、メソスケール風環境解析において水平格子サイズが概ね10km程度以上(斉藤, 1999)という提案がなされているが、本来の静水圧近似の考え方に基づけば計算格子の分割状況だけではなく、対象とする流れ場の特性も考慮して静水圧近似の適否を判断した方が良いと考えられる。すなわち、圧力の非静水圧成分が微小となるような領域では静水圧近似の適用が可能であると判断すべきである。以下、流れの支配方程式を無次元化し、非静水圧成分のオーダーに関する理論的考察を行う。

(1) 静水圧成分と非静水圧成分の分離

支配方程式は連続式および運動方程式からなる。ここでは簡単のため断面二次元のデカルト座標系における方程式系を用いるが、基本的な考え方は三次元でも同様である。座標系原点を静止水面上とし、 x は水平方向、 z は鉛直上方を正とした場合の連続式は以下のとおり。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

1 正会員 工修 清水建設(株)技術研究所(東京大学大学院新領域創成科学研究科 環境システム学専攻)
2 工博 東京大学准教授 新領域創成科学研究科

ここで, u, w : 水平及び鉛直方向流速である.

運動方程式中の圧力 p に関しては静水圧成分 p_{hy} と非静水圧成分 p_{nh} の和で表現する. すなわち,

$$p = p_{hy} + p_{nh} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで, 静水圧 p_{hy} は以下のように書ける.

$$p_{hy} = \rho_0 g(\eta - z) + g \int_z^\eta \Delta \rho dz, \quad \Delta \rho = \rho - \rho_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

η : 水面変動量, ρ : 密度, ρ_0 : 基準密度である. 式(2), 式(3)を用いると, 運動方程式は以下のように書ける.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{nh}}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \Delta \rho dz + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{nh}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

τ_{ij} は渦粘性などによる応力テンソルであり, 渦粘性係数 E_{ij} によって以下の式で表される.

$$\tau_{ij} = \rho_0 E_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

(2) 支配方程式の無次元化

水平および鉛直方向空間スケール, 各流速成分をそれぞれ代表値 L, H, U, W で無次元化する. 各無次元量をそれぞれ x', z', u', w' とすると, 以下のように表される.

$$x' = \frac{x}{L}, z' = \frac{z}{H}, u' = \frac{u}{U}, w' = \frac{w}{W} \quad \dots\dots\dots (7)$$

海域では海流や潮汐, 密度勾配によって駆動される流れが支配的である場合がほとんどであり, 水平方向の運動スケールが鉛直方向に比べて極めて大きくなることから静水圧近似を適用したモデルが用いられてきた. これに対し, 例えば海中でのジェット状の放水のように局所的な流れに関しては, 水平流速に対する鉛直流速の大きさによっては静水圧近似の仮定が成立しない場合が多いと考えられる. そこで局所的に発生される流れの代表値を鉛直流速の代表値 W と等しいと考えることにする. この考え方に基づき時間 t , 非静水圧 p_{nh} を以下のように無次元化する.

$$t' = \frac{t}{T} = \frac{H}{W} t \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$p'_{nh} = \frac{p_{nh}}{\rho_0 W^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

その他, 渦動粘性係数 E_{ij} は以下のように無次元化する.

$$E'_{xx} = \frac{E_{xx}}{UL}, E'_{xz} = \frac{E_{xz}}{UH}, E'_{zx} = \frac{E_{zx}}{WL}, E'_{zz} = \frac{E_{zz}}{WH} \quad \dots\dots\dots (10)$$

また, 以下の微小パラメータを導入する.

$$\delta \equiv \frac{H}{L}, \quad \varepsilon \equiv \frac{W}{U} \quad \dots\dots\dots (11)$$

これらはそれぞれ各方向の空間スケール比, および運動の強さの比であると解釈できる. 運動方程式(4), (5)は以下のように無次元化される.

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + \delta u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) = -\delta \varepsilon^2 \frac{\partial p'_{nh}}{\partial x'} - \frac{\delta^2}{F_r^2} \frac{\partial p'_{hy}}{\partial x'} + 2\delta \frac{\partial}{\partial x'} \left(E'_{xx} \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ E'_{xz} \left(\varepsilon \frac{\partial u'}{\partial z'} + \delta \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\varepsilon \left(\varepsilon \frac{\partial w'}{\partial t'} + \delta \frac{\partial u' w'}{\partial x'} + \varepsilon \frac{\partial w'^2}{\partial z'} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial p'_{nh}}{\partial z'} + \delta \varepsilon \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ E'_{zx} \left(\varepsilon \frac{\partial w'}{\partial x'} + \delta \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \right\} + 2\delta \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z'} \left(E'_{zz} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし F_r は以下で定義されるフルード数である.

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(3) 静水圧近似の適用性について

無次元化された運動方程式(12), (13)について δ, ε が微小であると仮定し, これらが二次以上となる項が無視できるとした場合, 運動方程式が静水圧近似モデルで用いられる式と同一となることがわかる. すなわち本検討からは, $\delta \varepsilon$ および ε^2 が微小であるような場合には静水圧近似の適用が可能であるといえる.

3. 数値モデルの構築

(1) 定式化

ここでは σ 座標系での鉛直断面二次元領域における非定常数値モデルを開発した. 本論では海面, 海底面でそれぞれ $\sigma=0, -1$ となるよう座標系を設定した. 連続式(1), 運動方程式(4), (5)は σ 座標系で以下ようになる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (uD)}{\partial x} + D \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \left(D \frac{\partial r_1}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial x} r_2 \right) - \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial p_{nh}}{\partial x} - \frac{1}{D} \frac{\partial p_{nh}}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{x\sigma}}{\partial \sigma} \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \omega \frac{\partial w}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho_0 D} \frac{\partial p_{nh}}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau'_{x\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{\sigma\sigma}}{\partial \sigma} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし h は水深であり,

$$D = h + \eta \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$r_1 = \int_{\sigma}^0 \rho d\sigma, \quad r_2 = \int_{\sigma}^0 \sigma \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} d\sigma \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau'_{xx} = 2\rho_0 E'_{xx} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau'_{x\sigma} = \frac{\rho_0 K}{D} \left(\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau'_{x\sigma} = \rho_0 E'_{xz} \left(\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau'_{\sigma\sigma} = \frac{2\rho_0 K}{D^2} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (20)$$

また、 ω は以下のとおり。

$$\omega = \frac{1}{D} \left\{ w - (\sigma + 1) \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \left(\sigma \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} \dots\dots\dots (21)$$

水面 ($\sigma=0$), 水底 ($\sigma=-1$) では以下の境界条件を課す。

$$p_{nh} = 0, (\sigma = 0) \dots\dots\dots (22)$$

$$\omega = 0, (\sigma = 0, -1) \dots\dots\dots (23)$$

(2) 計算の流れ

連続式および運動方程式の空間的離散化には四角形 iso-parametric 要素による有限要素法を用いた。また、時間発展には移流項と非静水圧項のみ implicit とする半陰解法を用いた。計算の流れを図-1 に示す。1 タイムステップ間において、はじめに領域全体で水面変動量 η を計算する。 η の計算には連続式 (15) を境界条件 (23) を用いて積分した以下の式を用いる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + D(\omega|_{\sigma=0} - \omega|_{\sigma=-1}) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

ここで、

$$Q_x = D \int_{-1}^0 u d\sigma \dots\dots\dots (25)$$

次いで各計算格子毎に微小量 δ , ε の値を求める。 δ については計算格子の縦横比 ($\Delta z/\Delta x$) を用い、 ε に関しては前タイムステップの計算により得られる流速値を用いて $\varepsilon = |w/u|$ として計算した。ここでは前節の検討結果を踏まえ $\delta\varepsilon$ と ε^2 が共に微小となる部分では静水圧近似を適用する。こうすることで静水圧近似の適否に関して p_{nh} を評価せずに判定可能となっており、たとえ静水圧領域が非静水圧領域に遷移するような状況においても対応できる。

静水圧近似が適用される領域では、水平方向運動方程式 (16) に加え、連続式 (15) を鉛直方向に積分し時間微分項を消去した式 (26) より u , w を求める。ただし式 (16) 中において $p_{nh}=0$ とする。

$$\frac{\partial(uD)}{\partial x \partial \sigma} + \frac{\partial^2(\omega D)}{\partial \sigma^2} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

$\delta\varepsilon$ か ε^2 のいずれかがある一定値よりも大きい非静水圧

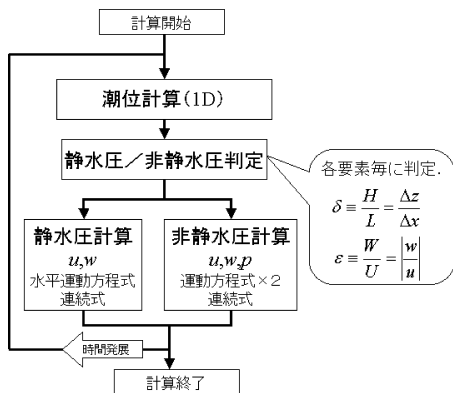


図-1 計算の流れ

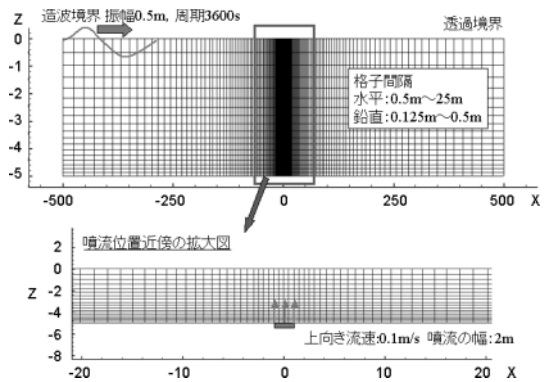


図-2 解析領域の設定

領域では静水圧領域の計算に用いる式 (15), (26) に加え鉛直方向運動方程式 (17) を連立させて解くことで p_{nh} を計算する。このとき静水圧領域と非静水圧領域の接続境界 S 上では、 p_{nh} に関して以下の境界条件を課した。

$$p_{nh} = 0 \text{ on } S \dots\dots\dots (27)$$

4. 解析例

(1) 解析条件

本手法を適用した数値モデルを用いて、振動流中の鉛直噴流を対象とした数値シミュレーションを行なった。図-2 に計算領域の概略を示す。計算領域は水平方向に 1,000m の長さを有しており、水深は 5m で一定とした。鉛直噴流は計算領域の中央部 ($x=0$) で幅 2m の範囲から発生している。噴流の流速は 0.1m/s であり、時間的に変化せず一定値とした。また、ここでは放流水、海域水ともに密度を一定とした。計算領域の左端 ($x=-500$) は振幅 0.5m, 周期 3,600s の潮汐を発生させる造波境界であり、右端は透過境界となっている。水平方向の格子間隔は $\Delta x=25\text{m} \sim 0.5\text{m}$, であり、鉛直噴流の周辺ほど小さな格子間隔となるよう連続的に変化させた。鉛直方向には海底付近ほど格子高さが小さくなるように 18 層に分割した。各層の高さは $\Delta z=0.125\text{m} \sim 0.5\text{m}$ である。時間刻みは 0.1 秒とし、55,000 タイムステップ (時刻 5,500s) までの計算を行った。

(2) 静水圧モデルと非静水圧モデルの比較

図-3 (a) ~ (c) は、計算領域全体を非静水圧モデルによって解析した結果であり、それぞれ静水圧で無次元化した非静水圧成分 $p_{nh}/\rho g(\eta-z)$ および無次元パラメータ $\delta\varepsilon$ と ε^2 の分布を示したものである。なお、図示した計算結果は時刻 5,460s のものである。噴流の放出部分の両端近傍に p_{nh} の絶対値が大きくなる部分が集中しており、急峻な圧力勾配の発生が見られる。このことから、少なくとも噴流の近傍では非静水圧モデルによる解析を行なうのが望ましいと考えられる。 p_{nh} と $\delta\varepsilon$, ε^2 の分布と見比べる

と、両者の値が0.005以下となる範囲では非静水圧成分の絶対値が静水圧成分の0.005%以下と微小であり、噴流近傍に比べて非静水圧成分の勾配も緩やかであることがわかる。図-4 (a), (b) は同時刻における静水圧近似モデルでの解析結果を示したものである。非静水圧モデルでの解析結果では噴流発生地点の右側に時計回りの循環流の形成が明瞭に見られていたが、静水圧モデルではこの循環流が相対的に弱くなっており、水平方向の流れが強く表れた結果となっている。図-5には非静水圧モデルで得られた流速分布との差分を示すが、特に噴流の近傍領域である $x=-4\text{m} \sim 7\text{m}$ の範囲では流速分布の相違が顕著であることから、噴流近傍領域では p_{nh} の影響が強く反映されているといえる。また静水圧近似モデルで得られた $\delta\epsilon$, ϵ^2 の分布は非静水圧モデルでの分布に比べて大きい値を示す領域がやや小さくなっているものの、例えば $\delta\epsilon$, ϵ^2 のいずれかが0.005よりも大きくなっている領域は図-3 (a) に示す p_{nh} の勾配が大きな部分を含んでいる。このことから、 p_{nh} を直接算定せずに δ , ϵ の両無次元パラメータ

の値を評価することで静水圧近似の適否を判断することが可能であり、 $\delta\epsilon$, ϵ^2 のいずれかが大きくなる領域で p_{nh} を算定することで非静水圧モデルに近い計算結果が得られるものと考えられる。

(3) 動的接続モデルによる解析結果

動的接続モデルを用いて同様の解析を行なった。先の検討結果を踏まえ、 $\delta\epsilon < 0.005$ かつ $\epsilon^2 < 0.005$ となる部分に静水圧近似を適用した。図-6 (a) ~ (c) に解析結果を示す。図-3の非静水圧モデルでの計算結果と比べて p_{nh} の値は小さくなっているが、図-4の静水圧近似モデルでは見られなかった噴流近傍右側の循環流がわずかではあるが再現されている。図-7に非静水圧モデルの計算結果との差分を示すが、非静水圧モデルにおいて強い循環流が発生する噴流近傍の右側領域での流速分布に依然差異が見られるものの、噴流の直上と左側近傍領域における流速分布は静水圧近似モデルでの計算結果に比べ近いものとなっている。図-8には非静水圧計算を行う領域の時間変化を図示したものであるが、流れの状況に応じて時々刻々変

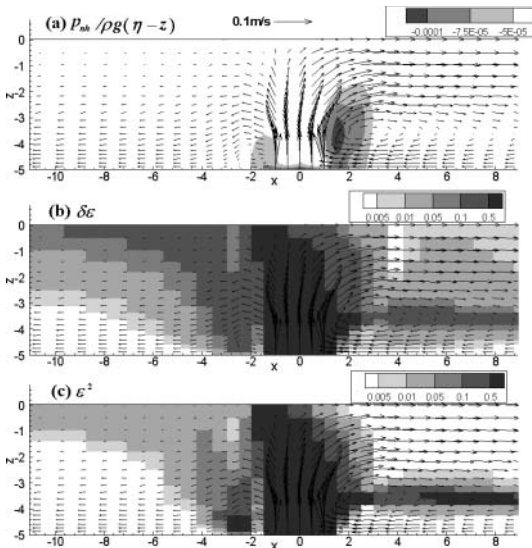


図-3 非静水圧モデルでの解析結果

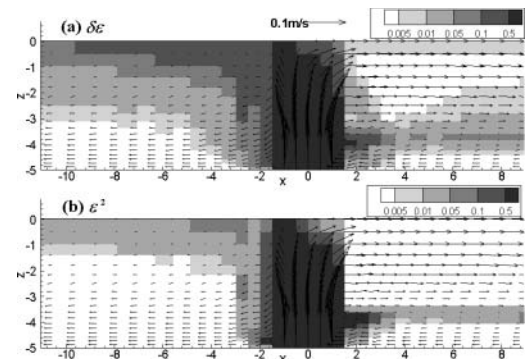


図-4 静水圧モデルでの解析結果

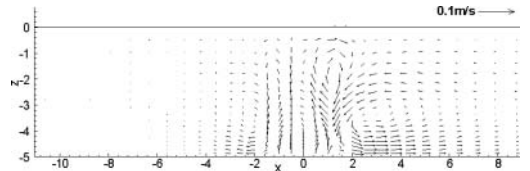


図-5 非静水圧モデルと静水圧モデルの流速分布の差

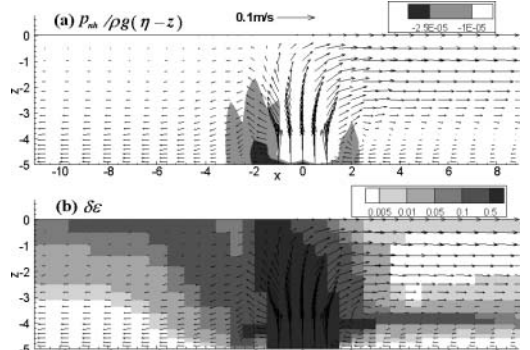


図-6 動的接続モデルによる計算結果

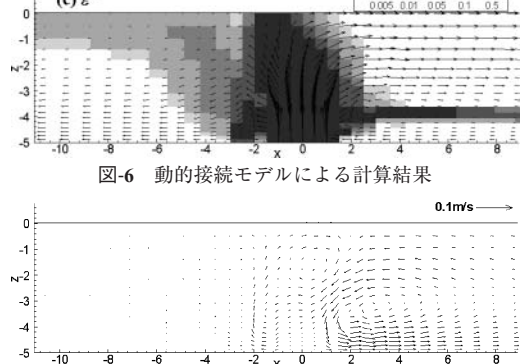


図-7 非静水圧モデルと動的接続モデルの流速分布の差

化する様子が見て取れる。図-8 (b) のように場の振動流の水平流速が強くなる位相では、相対的に ε が小さくなるため非静水圧近似が適用される領域が小さくなる。

なお、領域全体に非静水圧モデルを適用した場合での計算時間を1とすると、静水圧モデルでは0.22、動的接続モデルでは0.89となり、10%程度の計算時間短縮が可能となった。本解析例ではいずれのモデルにおいても流速計算に半陰解法を用いており、連立方程式を解くための反復ルーチンを用いている。このため、非静水圧の計算回数の減少による時間短縮の効果が現れにくいものと考えられる。

5. まとめ

沿岸域を対象とした流動モデルにおける静水圧近似の適用限界を明らかにするとともに、静水圧領域と非静水圧領域を動的に接続する手法を開発した。主要な結論を以下にまとめる。

- (1) 代表空間スケールと流速の水平鉛直比 δ 、 ε を導入した支配方程式の無次元化によって、 $\delta\varepsilon$ と ε^2 が微小である場合には静水圧近似が適用できることが示された。
- (2) 静水圧近似領域と非静水圧領域とを動的に接続できる数値モデルを構築し、振動流中の鉛直噴流を対象とした解析を行なった。本解析例では $\delta\varepsilon < 0.005$ かつ $\varepsilon^2 < 0.005$ となる部分において静水圧近似モデルを適用した場合、解析結果は非静水圧モデルにより近いものとなり、さらに計算時間を10%短縮することができた。

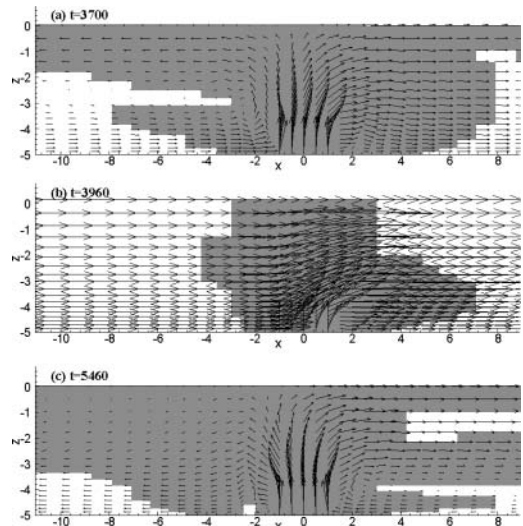


図-8 動的接続モデルにおける非静水圧領域の時間変化

参考文献

- 川本陽一・大岡龍三・黄 弘 (2006) : ヒートアイランド解析における静力学モデルと非静力学モデルの比較, 第19回風工学シンポジウム論文集, pp. 67-72.
- 木下嗣基 (2001) : ネスティングバージョンの現状, 日本造船学会海洋環境研究委員会MECモデルワークショップ (第2回), pp. 59-64.
- 齊藤和雄 (1999) : 非静力学モデルの分類, 気象研究ノート, No. 196, pp. 19-35.
- 二瓶泰雄・山崎裕介・西村 司・灘岡和夫 (2002) : 浅水流場を対象とした三次元数値モデルの近似手法に関する検討 - σ 座標系と静水圧近似に着目して -, 海岸工学論文集, 第49巻, pp.411-415.
- 日本造船学会海洋環境研究委員会 (2001) : MECモデルワークショップ (第1回), 107p.
- 長谷部雅伸・大山 巧・平山彰彦・高月邦夫・池田知司 (2002) : 沿岸海域環境の季節変動に伴う深層水放流時の拡散形態の変化, 海岸工学論文集, 第49巻, pp.971-975.