

複雑な移動・回転を考慮した津波漂流物の三次元数値解析手法の開発

Development of a Three Dimensional Numerical Analysis Method for the Drift Behavior in Tsunami

米山 望¹・永島弘士²

Nozomu YONEYAMA and Hiroshi NAGASHIMA

The main purpose of this study is to develop a three dimensional numerical analysis code for the prediction of tsunami drift behavior. First, we developed a numerical method to calculate a shape and external forces for each drift segment divided along the orthogonal grid accurately and stably. The method is based on the vector analyses. Then, we developed the new code by building the method into the three dimensional fluid analysis code which used the FAVOR method and the VOF method. We applied the new code to two types of hydraulic experiments which have different initial conditions. As a result, the code simulated each drift behavior qualitatively and quantitatively.

1. はじめに

津波来襲時には、船舶やコンテナ等が津波により漂流し、港湾部の構造物に衝突して破壊する可能性がある。2004年12月に発生したスマトラ沖地震津波では、多数の瓦礫や乗用車などが漂流物となって津波とともに遡上して構造物を破壊し、破壊された構造物が新たな漂流物となって被害を増幅させたことは記憶に新しい。このような被害を軽減するためには、漂流物の挙動や衝突力を予測することが必要である。

現在、三次元解析を用いた津波漂流物の挙動予測が牛島ら(2006)、川崎ら(2007)によって行われている。

牛島らは、多相場を物性の異なる非圧縮性流体の混合体として扱うことにより、三次元水面流れによる物体輸送現象を予測する数値解法(3D MICS)を提案している。牛島らは、この解法を用いてRayleigh-Taylorの安定問題および一様流中の球体の抗力係数を求める計算を行い、妥当な結果を得ている。さらに、造波水槽を用いた自由水面流れによる球体運動の実験との比較を行い、現象の再現性は良好であるという結論を得ている。

川崎らは、3次元場を対象に、固相-気相-液相の相互干渉を高精度に解析できる数値モデルとして、不等間隔格子、複数剛体の運動解析手法、dynamic二変数混合モデルDTMを導入した、CIP法と拡張SMAC法に基づく3次元固気液多相乱流数値モデルDOLPHIN-3Dを新たに開発している。川崎らは、このモデルを用いてピストン型造波による浮体の動揺運動を解析し、複数剛体-水-空気の複雑な異相界面および流速場を安定して計算可能であることを示している。さらに、水柱崩壊に伴う段波

と矩形剛体の衝突・漂流に関する水理実験にこのモデルを適用し、現象の再現性は良好であるという結果を得ている。

これらの既往研究はそれぞれ高精度な予測が可能であるが、空気の流動も解析する必要があるため、本研究の最終目的として想定している広い範囲での挙動予測には計算時間などの面から適用が困難と考えられる。そこで本研究では、漂流物を剛体として取り扱い、空気の流動解析を必要としない手法を開発することを目的とする。著者らは、鉛直二次元解析においてこの解析手法の妥当性を既に検証している(米山ら, 2008; 永島ら, 2008)。本研究では、並進3自由度および回転3自由度を考慮した漂流物の複雑な挙動が解析可能な三次元数値解析手法を新たに開発し、水理実験結果と比較してその妥当性を検討した。

2. 数値解析手法の概要

本研究では、水面挙動の予測にVOF法(Hirtら, 1981)、境界形状の取り扱いにFAVOR法(Hirtら, 1985)を用いた非圧縮流体解析手法を用いた。漂流物を移動する境界として扱い、その位置及び姿勢はFAVOR法に基づいて各計算セルの空隙率 γ^v 、開口率 γ_j^g により流体解析に認識される(図-1参照)。また、漂流物の移動は、空隙率 γ^v 、開口率 γ_j^g の時間変化として連続方程式を介して流体運動に反映される。これと同時に、重力および流体解析により求められた圧力と粘性力を外力として、剛体運動の基礎方程式より漂流物が移動する(図-2参照)。なお、本研究の解析手法では、平面を組み合わせた表面形状を持つ漂流物を取り扱うことができる。

(1) 流体の基礎方程式

流体運動の基礎方程式を以下に示す。

・連続方程式

1 正会員 博(工) 京都大学防災研究所准教授
2 正会員 修(工) (株)ニュージェック河川グループ

	空セル $\gamma^v=0.8$ $F=0.0$	空セル $\gamma^v=0.5$ $F=0.0$	空セル $\gamma^v=0.4$ $F=0.0$	空セル $\gamma^v=0.6$ $F=0.0$
水面セル	物体セル $\gamma^v=0.5$ $F=0.6$	物体セル $\gamma^v=0.0$ $F=0.0$	物体セル $\gamma^v=0.0$ $F=0.0$	水面セル $\gamma^v=0.4$ $F=0.6$
内部セル	内部セル $\gamma^v=0.7$ $F=1.0$	内部セル $\gamma^v=0.1$ $F=1.0$	内部セル $\gamma^v=0.2$ $F=1.0$	内部セル $\gamma^v=0.5$ $F=1.0$

図-1 漂流物の取り扱い

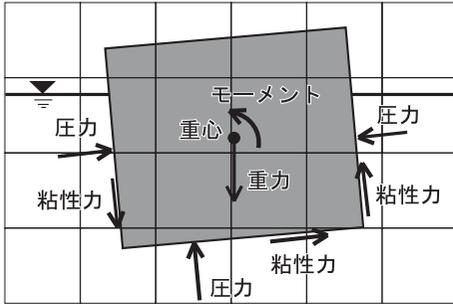


図-2 漂流物に作用する外力

$$\frac{\partial \gamma^v}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_j^v \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

・運動方程式 (Reynolds 方程式) ($i=1,2,3$)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\gamma_j^v \bar{u}_j}{\gamma^v} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right) \dots (2)$$

・流体体積の移流方程式

$$\frac{\partial \gamma^v F}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_j^v F \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 u_i : 流速の各方向成分、 g_i : 重力加速度 (ベクトル表示は \mathbf{g})、 p : 圧力、 ρ : 流体密度、 ν : 動粘性係数、 F : 計算セルの流体充填率 (=セル内の流体体積/セル内の空隙体積)、 $\bar{\quad}$: レイノルズ平均量、 $'$: レイノルズ平均量からの変動量である。また、式 (2) 中のレイノルズ応力 $-\overline{u_i' u_j'}$ を求めるため、以下の標準型 $k-\epsilon$ モデルを用いる。

$$-\overline{u_i' u_j'} = \frac{C_\mu k^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{i,j} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{\gamma^v} \frac{\partial \gamma_j^v k \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \epsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\gamma^v} \frac{\partial \gamma_j^v \epsilon \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{C_\mu k^2}{\sigma_\epsilon \epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $k(\equiv \overline{\nu u_i' u_i'})/2$: 乱流エネルギー、 $\epsilon(\equiv \overline{\nu u_i' u_i' u_i'})$: 乱流エネルギー散逸率であり、式 (4) ~ 式 (6) 中の定数は $\sigma_k=1.0$ 、 $\sigma_\epsilon=1.3$ 、 $C_{\epsilon 1}=1.45$ 、 $C_{\epsilon 2}=1.92$ 、 $C_\mu=0.09$ とした。

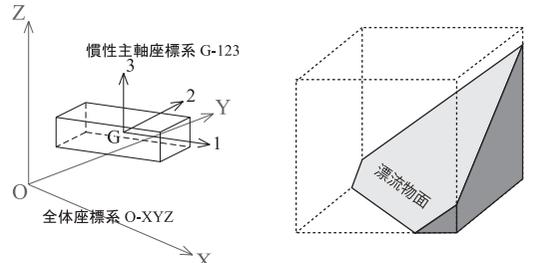


図-3 座標軸と漂流物回転軸

図-4 セグメントの一例

以上の方程式を直交座標系上で離散化して SIMPLE 法 (Patankar ら, 1972) に基づいて解析した。各物理量の定義点は、流速のみを計算セルの境界面中央、その他の物理量を計算セルの中央で定義するスタッガード配置とし、離散化は時間について前進差分、移流項は三次精度風上差分、その他は中央差分とした。また、式 (3) は VOF 法に基づいて離散化し、移流はドナアクセプタ法により行った。これに関して、流体体積を保存するためのいくつかの工夫を行った (米山, 1998)。

(2) 剛体運動の基礎方程式

剛体運動は流体計算で用いる全体座標系の他に剛体の重心を原点とした慣性主軸座標系を設定し解析する (図-3 参照)。また、以下では各計算セル内に含まれる漂流物の一部をセグメントと呼び、セグメントの表面のうち、漂流物表面と一致する面を漂流物面 A_{seg} とする (図-4 参照)。剛体運動の基礎方程式を以下に示す。

・漂流物重心の運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}_g}{dt} = m\mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k^{pr} + \sum_k \mathbf{F}_k^{vis} \dots\dots\dots (7)$$

・漂流物重心まわりの回転運動の運動方程式

$$\mathcal{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} = \sum_k \{ \tilde{\mathbf{r}}_{s,k} \times (\mathbf{F}_k^{pr} + \mathbf{F}_k^{vis}) \} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 m は漂流物の質量、 \mathbf{v}_g は漂流物重心の速度ベクトル、 \mathbf{F}_k^{pr} および \mathbf{F}_k^{vis} はセグメントの漂流物面 A_{seg} が受ける圧力を積分した流体力ベクトル、粘性力ベクトルである。また、 $\boldsymbol{\omega}$ は慣性主軸座標系を基準とした角速度ベクトル、 \mathcal{I} は漂流物の慣性モーメントからなる慣性テンソル、 $\tilde{\mathbf{r}}_{s,k}$ は慣性主軸座標系での漂流物面 A_{seg} の重心位置ベクトルである。

(3) 漂流物が受ける流体力の計算法

剛体の運動方程式を解く際に必要になる流体力の計算法について以下に述べる。

a) 圧力 \mathbf{F}^{pr}

あるセグメントの漂流物面 A_{seg} (面積 S 、法線ベクトル \mathbf{n}) が受ける圧力 \mathbf{F}^{pr} の計算には、図-5 に示すように、計算セルの圧力値 P を、 \mathbf{r}_c (圧力定義点=計算セルの中心点) ~ \mathbf{r}_s (漂流物面の重心) 間で静水圧分布を仮定して補正

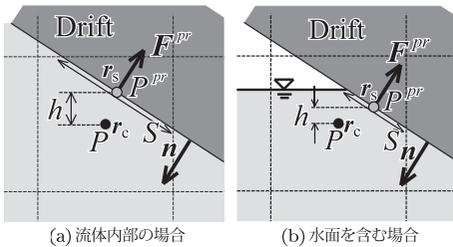


図-5 圧力の評価方法

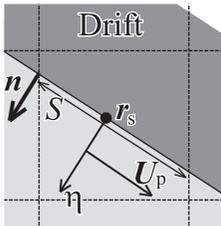


図-6 粘性力の評価方法

した値 P^{pr} を用いる。 P^{pr} は次式となる。

$$P^{pr} = P - \rho gh = P - \rho g (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_c)_z \dots\dots\dots (9)$$

漂流物面 A_{seg} の重心 \mathbf{r}_s に圧力 P^{pr} が作用すると、この面にかかる力 \mathbf{F}^{pr} は

$$\mathbf{F}^{pr} = P^{pr} S (-\mathbf{n}) \dots\dots\dots (10)$$

と求められる。ただし、図-5 (b) のように漂流物面が水面セルに接する場合には、漂流物面のうちの水面下にある部分の面積と重心位置を用いる。

b) 粘性力 \mathbf{F}^{vis}

位置 $\mathbf{r} = (xyz)^T$ における流速ベクトルを $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ とすると、 \mathbf{U} の漂流物面 A_{seg} (面積 S , 法線ベクトル \mathbf{n}) に平行な成分 \mathbf{U}_p は、

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{U} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n} \dots\dots\dots (11)$$

と書ける。点 \mathbf{r}_s におけるせん断応力 $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_s)$ は、漂流物面 A_{seg} に垂直表向きの座標軸を η とすると、

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_s) = \mu \frac{\partial \mathbf{U}_p}{\partial \eta} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s} \dots\dots\dots (12)$$

である。ここで、 μ は流体の粘性係数である。漂流物面 A_{seg} に作用する粘性力 \mathbf{F}^{vis} は次式となる。

$$\mathbf{F}^{vis} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_s) S = \mu S \frac{\partial \mathbf{U}_p}{\partial \eta} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s} \dots\dots\dots (13)$$

(4) 衝突時の計算方法

漂流物の移動回転計算により次計算ステップ ($t + \Delta t$) での漂流物の一部が壁面等の内部に含まれることが見込まれる場合、 Δt の間に、漂流物が壁面等に衝突したと見なし、以下のように計算した。

- i) 剛体の運動方程式を用いた収束計算により、対象壁面に接触した時刻 ($t + \Delta t_{col}$; ここで $0 < \Delta t_{col} < \Delta t$) と衝突時の漂流物の重心位置、重心移動速度 \mathbf{v}'_g 、姿勢および

角加速度 $\boldsymbol{\omega}'$ 等を求める。

- ii) 剛体の衝突に関するラグランジュの衝撃運動方程式およびニュートンの仮定 (鶴井, 1986) より、反発係数 e を用いて導かれる次式から接触後の重心移動速度 \mathbf{v}''_g および角加速度 $\boldsymbol{\omega}''$ を求める。

$$\mathbf{v}''_g = \mathbf{v}'_g + \frac{J}{m} \mathbf{n}_{col} \dots\dots\dots (14)$$

$$\boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{I}^{-1} (\mathbf{r}_{col} \times J \mathbf{n}_{col}) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 \mathbf{r}_{col} は衝突点の慣性主軸座標系における位置ベクトル、 \mathbf{n}_{col} は対象壁面の法線ベクトル、 J は衝撃力 (スカラー) であり次式で表せる。

$$J = \frac{-(e+1)(\mathbf{v}'_g + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{col}) \cdot \mathbf{n}_{col}}{1/m + \{[\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{r}_{col} \times \mathbf{n}_{col})] \times \mathbf{r}_{col}\} \cdot \mathbf{n}_{col}} \dots\dots\dots (16)$$

- iii) \mathbf{v}''_g および $\boldsymbol{\omega}''$ を初速として、時間ステップの残りの時間 $\Delta t - \Delta t_{col}$ の間、漂流物を移動回転させて Δt 秒後の漂流物の位置及び姿勢とする。なお、 \mathbf{F}^{pr} と \mathbf{F}^{vis} は衝突前後で不変とした。

(5) 解析のながれ

解析のながれの概略を以下に示す。

- i) 時刻 t において、すべての物理量が既知とする。
- ii) 時刻 $t + \Delta t$ における乱流量を計算。
- iii) 時刻 $t + \Delta t$ における漂流物の重心位置および回転角を計算。必要に応じて衝突時の処理を行う。
- iv) 時刻 $t + \Delta t$ における流速の推定値 \tilde{u}_i^{n+1} を計算。
- v) \tilde{u}_i^{n+1} を用いて連続方程式の誤差 D を計算し、誤差許容値 D_{max} より小さければ流速を真値として次に進み、大きければ圧力の修正を行い iv) に戻る。
- vi) 流速の境界条件を更新する。
- vii) 時刻 $t + \Delta t$ における F^{n+1} を計算し、水面形状を更新する。
- viii) 圧力の境界条件を更新し、ii) に戻る。

3. 解析手法の適用と検証

本章では、初期条件が異なる2種類の水理模型実験に適用して、漂流物挙動解析手法の妥当性を検証する。

(1) ケース1-水面に浮かぶ漂流物が流される場合-

池野らは、単純形状の漂流物が津波により運ばれて構造物に衝突する場合の衝突力を明らかにし、衝突力の概略が把握できる算定式を提案するために水理模型実験を行っている (池野ら, 2001)。その実験模型の概要を図-7 に示す。模型縮尺は1/100である。漂流物模型は、喫水深が漂流物高さの半分程度となるような木材が使用され、実験装置の正面ガラスより手前に高解像度ビデオカメラを設置し、漂流物の動きが撮影された。

本研究では $H_1=40\text{cm}$, $H_2=5\text{cm}$ で、漂流物の形状が直径8cm, 長さ20cmの円柱、縦向き配置、受波圧板と配置地点の距離が80cm (重心初期位置 $Y=8.95\text{m}$) の場合について

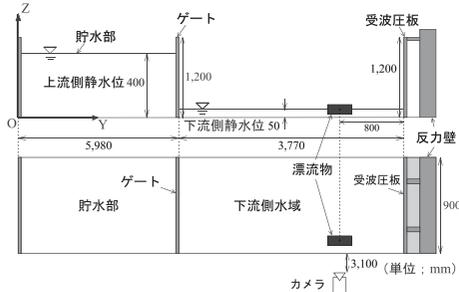


図-7 実験模型 (ケース1)

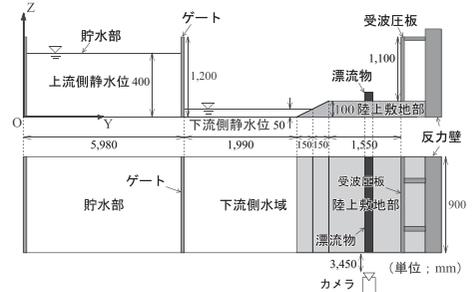


図-10 実験模型 (ケース2)

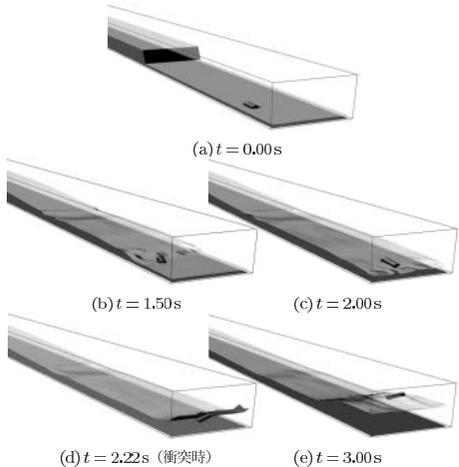


図-8 解析結果の例 (ケース1)

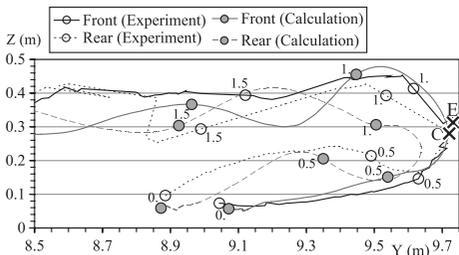


図-9 漂流物先端と後端の鉛直二次元移動軌跡の比較 (ケース1)

て、計算開始と同時に図-7のゲートが4.0m/sで上がるとし、計算時間刻み幅 $\Delta t=1.0 \times 10^{-3}$ s、連続方程式の誤差許容値 $D_{max}=1.0 \times 10^{-5}$ 、流体の密度 $\rho=1.0 \times 10^3$ kg/m³、流体の動粘性係数 $\nu=1.0 \times 10^{-6}$ m²/s、漂流物の密度 $\rho_d=0.5 \times 10^3$ kg/m³、漂流物の反発係数 $e=0.5$ として解析を行った。また、計算メッシュの間隔は、奥行き方向に0.065m、水路幅方向に0.06m、鉛直方向に0.03mとした。なお、漂流物の形状は、断面積および体積が円柱と等しい正八角柱とした。

漂流物挙動を比較するため、実験と同様に、漂流物の先端（受波圧板側の面の重心）と後端（貯水部側の面の重心）の位置の時間変化を出力した。

解析結果の例を図-8に示す。時間は実験開始からの経過時間である。図-9は、側面カメラから計測した漂流物の先端および後端の鉛直二次元軌跡の実験結果と比較したものである。図-9中の○印は、衝突前後の位置を示し、その近傍に移動開始からの経過時間 [s] を記載した。×印は、鉛直壁に衝突した位置を示し、実験結果には“E”、解析結果には“C”をその近傍に記載した。

図-9より、解析における漂流物の移動軌跡および位置の時間変化は、実験のそれらとほぼ一致していると言える。また、漂流物の鉛直壁への衝突位置もほぼ一致した。

以上より、本解析手法により、水面に浮かぶ漂流物が津波によって流され、鉛直壁に衝突してはね返る挙動がおおむね再現できた。

(2) ケース2-陸上に置かれた漂流物が流される場合-

陸上に置かれた漂流物が流される水理模型実験（池野ら、2003）の模型概要を図-10に示す。この模型は、受波圧板前面に高さ10cmの陸上敷地部が設けられていること以外は図-7と同様である。

漂流物の形状は一辺が4.5cmの正方形断面、長さ89cmの角柱とし、横向き配置、初期位置は、受波圧板と配置地点の距離が80cm（重心初期位置 $Y=9.02$ m）とした。この他の実験及び計算条件はケース1と同じである。漂流物挙動を比較するため、実験と同様に漂流物の重心の位置の時間変化を出力した。なお、解析では、漂流物が動き出す際に、漂流物と地面の間に流体が流れ込み、流体からの鉛直上向きの力が作用するように、漂流物底面の初期位置を陸上部敷地部の上面より0.005m高くした。

解析結果の例を図-11に示す。また、図-12は、漂流物の先端および後端の鉛直二次元軌跡の実験結果と解析結果を比較したものである。また、図-12中の○印および×印は図-9と同様である。

図-12より、鉛直壁に衝突した回数は、実験では3回であったのに対し、解析では1回のみであった。この原因は、静止した状態から鉛直壁に衝突するまでの解析結果が実験結果よりも高い位置を移動したため、実験でみら

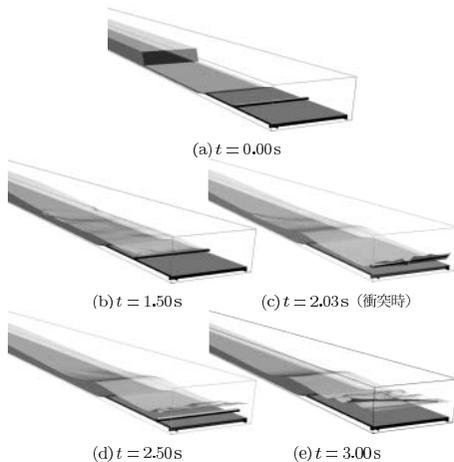


図-11 解析結果の例 (ケース2)

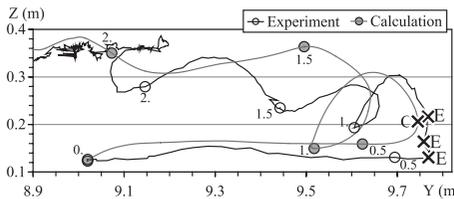


図-12 漂流物重心の鉛直二次元移動軌跡の比較 (ケース2)

れる低い位置での衝突が発生しなかったことによる。上述したように、本解析では、漂流物を予め僅かに浮かした状態で陸上に設置したが、この設置方法を含め陸上設置の漂流物の動きだし挙動は今後の検討課題である。しかし、このような動きだしの差異にも関わらず、漂流物の挙動および位置の時間変化の傾向については実験とおおむね一致した。以上より、本解析手法により、陸上に置かれた漂流物が津波によって流され、鉛直壁に衝突しはね返る挙動がおおむね再現できた。

4. おわりに

本研究で得られた結果を以下にまとめる。

- 漂流物の形状および作用する力を評価する方法として、漂流物を計算セルごとにセグメントに分割し、各セグメントの形状データおよび流体から受ける流体力や粘性力をベクトル解析を用いて厳密かつ安定的に計算する方法を構築した。
- 上記の方法を、水面挙動の予測にVOF法、境界形状の取り扱いにFAVOR法を用いた三次元流体挙動解析手法に組み込むことにより、並進3自由度および回転3自由度を考慮した漂流物の複雑な挙動が解析できる数

値解析手法を開発した。

- 開発した手法を、漂流物が水面に浮かんだ状態および陸上に置かれた状態を初期条件として津波を作用させる水理実験結果と比較した結果、漂流物の挙動および位置の時間変化の傾向は実験のそれらとおおむね一致し、本解析手法の妥当性が確認された。

今後は本解析手法を他の漂流物挙動にも適用して実験結果と比較検証し、多様な場における計算の安定性や本研究のケース2で課題となった動き出し時の取り扱い、さらに本研究では十分検討できなかった衝突力の評価法について検討を行う予定である。

謝辞：財団法人電力中央研究所の池野正明上席研究員に貴重な実験データを快く提供して頂いた。また、本研究は科学研究費補助金、基礎研究C (課題番号：19510189, 研究代表者：米山 望) の助成を受け実施したものである。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 池野正明・森 信人・田中寛好 (2001)：砕波段波津波による波力と漂流物の挙動・衝突力に関する実験的研究, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 846-850.
- 池野正明・田中寛好 (2003)：陸上遡上津波と漂流物の衝突力に関する実験的研究, 海岸工学論文集, 第50巻, pp. 721-725.
- 牛島 省・山田修三・藤岡 奨・襦津家久 (2006)：3次元自由水面流れによる物体輸送の数値解析法 (3D MICS) の提案と適用性の検討, 土木学会論文集, No.810/II-74, pp. 79-89.
- 川崎浩司・袴田充哉 (2007)：3次元気液多相乱流数値モデルDOLPHIN-3Dの開発と波作用下での漂流物の動的解析, 海岸工学論文集, 第54巻, pp. 31-35.
- 鶴井 明 (1986)：工業力学, 培風館, pp. 153-158.
- 永島弘士・米山 望・戸田圭一 (2008)：FAVOR法を応用した津波氾濫時の漂流物挙動解析, 計算工学講演会論文集, Vol.13, pp. 777-780.
- 米山 望 (1998)：自由液面解析コード (FRESH) の開発, 日本流体力学会誌「ながれ」第17巻 第3号.
- 米山 望・永島弘士・戸田圭一 (2008)：津波来襲時の漂流物挙動解析手法の開発, 海岸工学論文集, 第55巻, pp. 886-890.
- Hirt, C.W. and B.D.Nichols (1981): Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *Journal of Computational Physics*, Vol.39, pp.201-225.
- Hirt, C.W. and J.M.Sicilian (1985): A Porosity Technique for the Definition Obstacles in Rectangular Cell Meshes, Proc. 4th Int. Conf. Ship Hydro.
- Patankar, S.V. and D.B.Spalding (1972): A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flow, *Journal of Heat Mass Transfer*, Vol.15, pp.1787.