土木学会論文集B2（海岸工学）
Vol. B2-65, No.1, 2009, 221-225

確率論的ゆらぎモデルによる長周期波の発生·発達の予測に関する研究

Stochastic Forcing Model for the Generation and Evolution of Infragravity Waves by Short Gravity Surface Waves

泉宮尊司[1]・金井　誠[2]

Takashi IZUMIYA and Makoto KANAI

A stochastic forcing model has been developed to estimate the heights of infragravity waves excited by short gravity surface waves. The model includes a wave equation for infragravity waves with the external force term due to pressure disturbances by short gravity waves. The analytical solution of the wave equation was obtained, and the root-mean-square value of the surface elevation of infragravity waves was estimated. The rms value is proportional to the square root of the spectral moment of -2 order, m_{-2}, of short gravity waves, which is also proportional to the product of the wave height and the peak wave period or the significant wave period of short gravity waves. The estimated rms heights of infragravity waves are compared with the observed data compiled by NOWPHAS and show good agreements with them.

1. 緒言

長周期波の特性を把握し，その波高を予測することは，港湾における船舶の長周期動揺や波の遡上高さ等を予測する上で極めて重要である（田端ら，1995；平石ら，1997）．これまで，非線形拘束波による長周期波の発生機構（Longuet-Higgins・Stewart, 1962；Tick, 1963）や砕波点変動による自由長周期波の発生に関する研究（Symondsら, 1982,1984）は精力的に行われ，それらの特性に関しては，ほぼ明らかになってきている．また，合田（1975）は現地観測データより，長周期波の波高予測式を提案している．

しかしながら，渥美ら（1997）の長周期波の現地観測結果によると，長周期波の波高は，短周期波浪の有義波高と有義波周期の積に強い相関関係が見出されており，長周期波の発生・増幅に短周期波浪が強く関っていることを示唆している．また，波浪観測が行われている水深が20mから40m程度の中水深域では，非線形拘束波の振幅は十分に小さく，長周期波の大部分は自由長周期波と呼ばれている成分が占めていることを考えると，未だその自由長周期波の起源と発達機構については未解明な点が多い．特に，渥美ら（1997）や青木（2002）によって得られている長周期波高と短周期波浪諸元やスペクトルとの関係を明らかにする必要がある．

そこで本研究では，固有周期の非常に長い振子に代表周期の短い不規則外力が作用する振動系とのアナロジーにより，長周期波浪系に短周期波浪が外力として作用する確率論的ゆらぎモデルを誘導し，それを理論的に解析することによって，長周期波高と短周期波浪のスペクトルや波浪諸元との関係を見出すことを研究の目的とする．

2. 確率論的ゆらぎモデルの構築

本研究では，長周期波の発生・発達のメカニズムを探るために，まず図-1に示すような固有周期の非常に長い振子に周期の短い不規則外力が作用する振動系を考えることにする．このような振動系の場合，振子の固有周期をT_L，不規則外力の代表周期あるいは代表時間をT_sとすると，$T_L >> T_s$なる関係が成立し，共鳴は勿論発生しないが，不規則外力が振子の固有周期T_Lより十分長い時間あるいは無限時間作用し続けると，振子の振幅は小さいが，ある有限な値を持って動くことは明らかである．ここで重要なことは，代表時間の短い不規則外力が十分に長い時間作用し続けることである．もし，不規則外力が有限の時間しか作用しなければ，振動系の減衰のために振子の振幅はやがて0となると推測される．

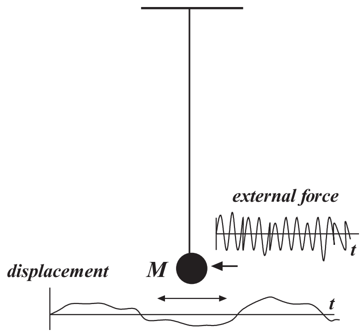

図-1　固有周期が非常に長い振子に作用する不規則外力

1 正会員　工博　新潟大学教授工学部建設学科
2 　富山市役所

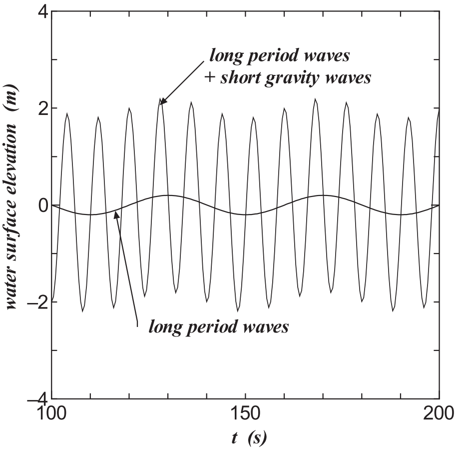

図-2　長周期波と短周期波浪の共存場の自由表面

このような固有周期の非常に長い振子のアナロジーは，短周期波浪と長周期波浪が共存する波浪場に適用可能であると考えられる．すなわち，短周期波浪と長周期波浪の共存場では，長周期波の自由表面において圧力はゲージ圧で0ではなく，短周期波が共存しているために，常にその撹乱を受けている状態にある．

ここで，図-2に示すように長周期波と短周期波浪の共存場における自由表面における境界条件について考えることにする．いま，長周期波の水位を$z=\eta_\ell$，短周期波浪の水位を$z=\eta_s$，共存場の水位を$z=\eta_\ell+\eta_s$とすると，長周期波の自由水面（$z=\eta_\ell$）上では，一般化されたベルヌーイの式を用いて，1次のオーダまでとると

$$\varphi_t + g\eta_\ell + P/\rho = 0, \qquad z=\eta_\ell \quad \cdots\cdots(1)$$

となる．ここに，φは速度ポテンシャル，Pは$z=\eta_\ell$での圧力を示し，下添字の ℓ およびsはそれぞれ長周期波成分および短周期波浪成分の諸量であることを示す．共存場の自由表面（$z=\eta_\ell+\eta_s$）では，厳密に圧力P=0となり，

$$\varphi_t + g(\eta_\ell+\eta_s) = 0, \qquad z=\eta_\ell+\eta_s \quad \cdots\cdots(2)$$

なる関係が成立する．式（2）において，$z=\eta_\ell$の回りにTaylor展開し，式（1）と比較することにより，次式が得られる．

$$P=\rho g\eta_s, \qquad z=\eta_\ell \quad \cdots\cdots(3)$$

すなわち，長周期波の自由表面では，1次のオーダで短周期重力波による圧力の撹乱を受けており，圧力が常に0とはならないことに注目すべきである．

ここで，短周期波浪の圧力撹乱の影響を考慮するために，まず長周期波の連続式および底面摩擦を考慮した運動方程式を考えることにする．

$$\frac{\partial \eta_\ell}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[hu_\ell\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[hv_\ell\right] = 0 \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_\ell}{\partial x} - 2\beta u_\ell \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\frac{\partial v_\ell}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta_\ell}{\partial y} - 2\beta v_\ell \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに，u_ℓおよびv_ℓはxおよびy方向の長周期波の流速成分，hは水深，βは線形化された底面摩擦項の比例係数で，底面摩擦によるエネルギー逸散量が等しくなるように係数βを決めると（例えば，Dingemans, 1997），

$$\beta = \frac{2f_w}{3\pi h}u_b \quad \cdots\cdots(7)$$

となる．ここに，f_wは摩擦係数，u_bは底面流速振幅である．式（4）の時間微分をとり，u_ℓおよびv_ℓを消去すると，

$$\frac{\partial^2 \eta_\ell}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial \eta_\ell}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[gh\frac{\partial \eta_\ell}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[gh\frac{\partial \eta_\ell}{\partial y}\right] = 0 \quad \cdots(8)$$

なる関係式を得る．ここで，長周期波自由表面における圧力擾乱の影響を考慮し，その時間積分として有意な影響を受けるものとし，短周期波浪による強制項を導入する．また，海底勾配は十分に小さいものと仮定し，水深hの空間微分は無視できるものとする．

$$\frac{\partial^2 \eta_\ell}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial \eta_\ell}{\partial t} - gh\frac{\partial^2 \eta_\ell}{\partial x^2} - gh\frac{\partial^2 \eta_\ell}{\partial y^2} = \alpha\int_{-\infty}^{t}\eta_s d\tau \quad \cdots(9)$$

ここに，αは比例係数である．ここで，長周期波および短周期波浪の水位変動をFourie･Stieltjes積分を用いて，

$$\eta_\ell(\vec{x},t) = \int_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}dA(\vec{k},t) \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\eta_s(\vec{x},t) = \int_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}dB(\vec{k},t) \quad \cdots\cdots(11)$$

と表し，式（9）に代入すると，

$$d\ddot{A}(\vec{k},t) + 2\beta d\dot{A}(\vec{k},t) + \omega_\ell^2 dA(\vec{k},t) = \alpha\int_{-\infty}^{t} dB(\vec{k},\tau)d\tau \quad \cdots(12)$$

を得る．ここに，$\vec{x}$は位置ベクトル，$\vec{k}$は波数ベクトル，$\omega_\ell{}^2=ghk^2$である．なお，式（9）および式（12）の右辺の時間積分は，長周期波と短周期波浪の時間スケールの違いを一致させるための操作とも解釈することができる．

式（12）の理論解は，初期条件をt=0で$\eta_\ell=0$とすると，

$$dA(\vec{k},t) = \frac{\alpha}{\omega_1}\int_0^t\int_0^\tau dB(\vec{k},\tau_1)d\tau_1\exp[-\beta(t-\tau)] \cdot\sin\omega_1(t-\tau)d\tau \quad \cdots(13)$$

となる．上式において，$\omega_1{}^2=\omega_\ell{}^2-\beta^2$である．ここで，簡便のため，

$$dC(\vec{k},\tau) = \int_0^\tau dB(\vec{k},\tau_1)d\tau_1 \quad \cdots\cdots(14)$$

とおき，式（13）の共役数との期待値をとると，

$$<dA(\vec{k},t)dA^*(\vec{k},t)> = \frac{\alpha^2}{\omega_1^2}\int_0^t\int_0^t <dC(\vec{k},\tau)dC^*(\vec{k},\xi)> \exp[-\beta(t-\tau)-\beta(t-\xi)]\cdot\sin\omega_1(t-\tau)\sin\omega_1(t-\xi)d\tau d\xi \quad \cdots\cdots(15)$$

と表せる．上式は非定常解も含まれているが，定常解をとると，最終的に長周期波の二乗平均値は，

$$\overline{\eta}_{\ell}^{2} = K^2 \int_0^{\infty} \frac{S_w(f)}{f^2} df \cong K^2 \int_{f_o}^{\infty} \frac{S_w(f)}{f^2} df \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

となる．ここに，$S_w(f)$は短周期波浪のスペクトル密度関数，Kは比例係数，f_oは短周期波浪成分の最小周波数で，一般に周期20sあるいは30sに相当する周波数であり，0.05 Hzあるいは0.033 Hz程度の値が用いられる．

式（16）で表される長周期波の二乗平均値は，短周期波浪のスペクトルのモーメントm_{-2}で与えられることになるが，この量は波浪の諸元を用いて表現することが可能である．

いま，短周期波浪のスペクトル密度関数の一般形が次式のように表されるものとする．

$$S_w(f) = \alpha_1 H_{1/3}^2 T_p \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-m} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-n}\right\} \cdots\cdots (17)$$

ここに，f_pはピーク周波数，$T_p=1/f_p$, α_1は比例係数，mおよびnはある定数である．0次および -2次のスペクトルモーメントを求めると，

$$m_o = \frac{\alpha_1}{n} \frac{\Gamma[(m-1)/n]}{(m/n)^{(m-1)/n}} H_{1/3}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

$$m_{-2} = \frac{\alpha_1}{n} \frac{\Gamma[(m-3)/n]}{(m/n)^{(m-3)/n}} H_{1/3}^2 T_p^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

$$\frac{m_{-2}}{m_0} = \frac{(m/n)^{2/n}\Gamma[(m-3)/n]}{\Gamma[(m-1)/n]} T_p^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

となる．ここに，Γ[ ]はガンマ関数である．式（18）から式（20）より，0次モーメントm_oは有義波高の2乗に比例し，m_{-2}/m_oはピーク周期T_pの2乗に比例することになる．ゆえに，長周期波の二乗平均波高は，比例係数をK_1, K_2として，

$$\sqrt{\overline{\eta}_{\ell}^{2}} = K\sqrt{\int_{f_o}^{\infty} \frac{S_w(f)}{f^2} df} = K_1 H_{1/3} T_p = K_2 H_{1/3} T_{1/3} \quad \cdots\cdots (21)$$

で近似的に評価される．上式の関係は，正に渥美ら（1997）や青木（2002）が現地観測で見出した関係式であり，本研究により初めて理論的裏付けが得られたことになる．

3. 自由長周期波高の比較

本研究の確率論的ゆらぎモデルの妥当性を検証するために，NOWPHASの波浪データを用いて，長周期波と短周期波浪諸元との関係を調べた．比較に用いたデータは，直江津，金沢，輪島および福井の4波浪観測地点で，2008年11月7～9日，12月17日～20日，12月30日～2009年1月2日までの3期間である．これらの期間には，冬季風浪が発達し，長周期波高および冬季風浪の有義波高や有義波周期共に有意な変化を示していたので採用した．

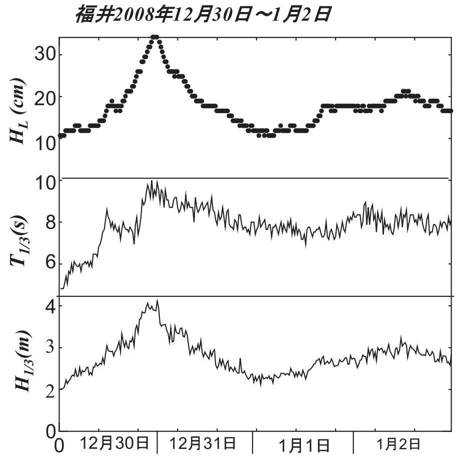

図-3　長周期波高と有義波高，有義波周期の変化

図-3は，2008年12月30日から2009年1月2日までの福井港における長周期波高と有義波高，有義波周期の変化を示したものである．有義波高が4m程度にまで発達し，長周期波高も30cm以上に達している．有義波周期は，5s程度から10s程度にまで変化しているが，1月1日以降の周期の変化はやや小さくなっている．長周期波高の変化は，有義波周期よりも有義波高の変化傾向に類似している．

長周期波高と短周期波浪諸元との関係をもう少し詳しく調べるために，長周期波高と短周期波浪の有義波高$H_{1/3}$，$H_{1/3}T_{1/3}$，$H^2{}_{1/3}T_{1/3}$，および$H^2{}_{1/3}T^2{}_{1/3}$との相関関係を調べた．その結果を，表-1に示す．長周期波は，その周期が30s以上，30s～60sおよび60s～300sの波高と比較しており，金沢および福井の結果を示している．何れの地点においても，有義波高と有義波周期との積である$H_{1/3}T_{1/3}$との相関係数が最も高く，0.92から0.96程度となっている．

金沢では，有義波高$H_{1/3}$との相関も高く，いずれの周期帯においても0.9以上の相関係数となっている．また，福井では，$H^2{}_{1/3}T^2{}_{1/3}$との相関も高く，何れの周期帯にお

表-1　長周期波高と波浪緒元との相関係数

金　沢	30s～	30～60s	60～300s	平均
$H_{1/3}$	0.935	0.944	0.906	0.928
$H_{1/3}T_{1/3}$	0.940	0.960	0.924	0.941
$H^2{}_{1/3}T_{1/3}$	0.767	0.777	0.802	0.782
$H^2{}_{1/3}T^2{}_{1/3}$	0.684	0.700	0.742	0.709

福　井	30s～	30～60s	60～300s	平均
$H_{1/3}$	0.921	0.904	0.889	0.901
$H_{1/3}T_{1/3}$	0.945	0.937	0.926	0.936
$H^2{}_{1/3}T_{1/3}$	0.915	0.923	0.910	0.915
$H^2{}_{1/3}T^2{}_{1/3}$	0.930	0.920	0.920	0.923

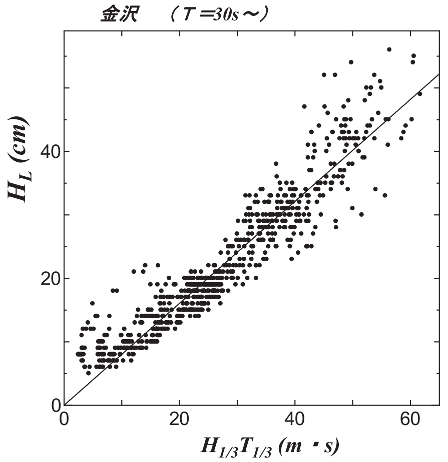

図-4　長周期波高H_Lと$H_{1/3}T_{1/3}$との関係（金沢）

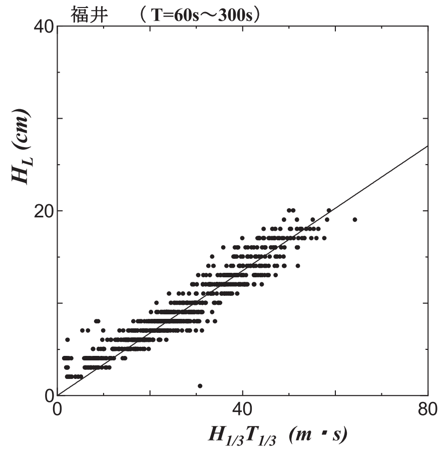

図-5　長周期波高H_Lと$H_{1/3}T_{1/3}$との関係（福井）

いても，0.92以上の相関係数を有している．しかしながら，全体を通して最も相関が高いのは，理論的に予測された$H_{1/3}T_{1/3}$であり，最も直線性が高いと言うことができる．なお，それぞれの説明因子の相関が高いので，それを考慮した主成分分析および因子分析については，次節で詳しく説明することにする．

図-4は，周期30s以上の長周期波の波高と短周期波浪の有義波高と有義波周期との積$H_{1/3}T_{1/3}$との比較を行ったものである．観測値にデータのばらつきが見られるが，直線性は$H_{1/3}T_{1/3}$=40あたりまでかなり高いと言える．他の周期帯においてもほぼ同様な関係が確認されている．

図-5は，同じく福井における長周期波の周期60s～300sの波高と短周期波浪の有義波高と有義波周期との関係を示したものである．これらの図に見られるように，長周期波高と波浪の$H_{1/3}T_{1/3}$との関係は1対1対応していることが伺える．

このように，長周期波高は短周期波浪の有義波高と有義波周期との積$H_{1/3}T_{1/3}$で表されるので，長周期波高の予測が可能である．図-6は，福井港，金沢港および直江津港における長周期波高の予測を行った結果である．実線が観測された有義波高および有義波周期を用いて予測したもの，●印は周期30s以上の長周期波の観測値を示している．3地点共に予測値はよく一致しており，非線形拘束波の影響が殆ど無視できる20m～40m程度の中水深域では，かなり有効な予測法であると言える．

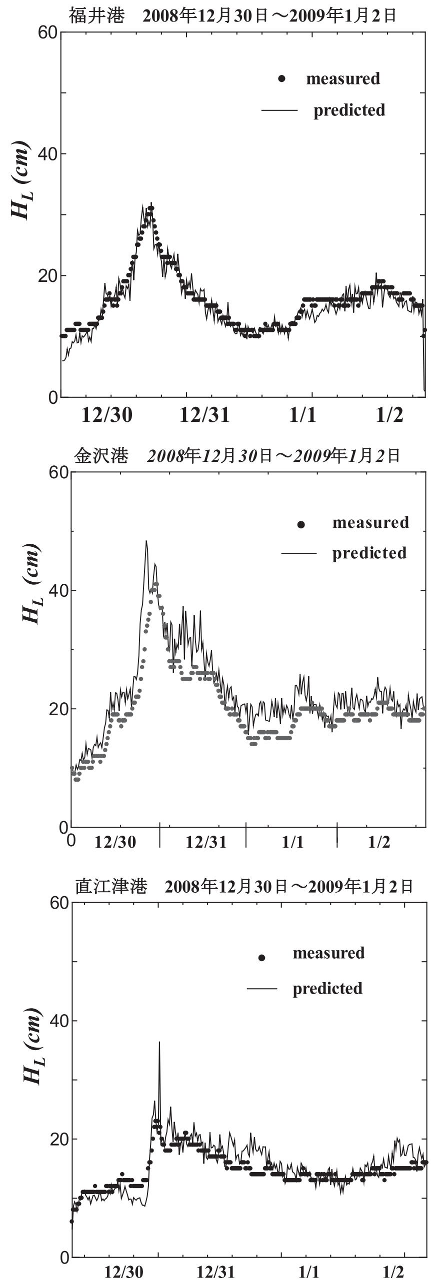

図-6　長周期波の実測値と予測値との比較

表-2　波浪諸元と因子負荷量

金　沢	因子負荷量	福　井	因子負荷量
$H_{1/3}$	0.2814	$H_{1/3}$	0.3102
$H_{1/3}T_{1/3}$	0.5014	$H_{1/3}T_{1/3}$	0.4863
$H^2_{1/3}T_{1/3}$	0.2654	$H^2_{1/3}T_{1/3}$	0.2486
$H^2_{1/3}T^2_{1/3}$	-0.1136	$H^2_{1/3}T^2_{1/3}$	-0.1155
直江津	因子負荷量	輪　島	因子負荷量
$H_{1/3}$	0.4095	$H_{1/3}$	0.3311
$H_{1/3}T_{1/3}$	0.4653	$H_{1/3}T_{1/3}$	0.4899
$H^2_{1/3}T_{1/3}$	0.1066	$H^2_{1/3}T_{1/3}$	0.1989
$H^2_{1/3}T^2_{1/3}$	-0.2465	$H^2_{1/3}T^2_{1/3}$	-0.1906

4. 主成分分析および因子分析による結果

本モデルにより得られた結果の妥当性を更に検討するために，長周期波高と短周期波浪緒元を用いて，主成分分析および因子分析を行った．用いた波浪諸元は，相関係数を算定したものと同じく，$H_{1/3}$，$H_{1/3}T_{1/3}$，$H^2_{1/3}T_{1/3}$，および$H^2_{1/3}T^2_{1/3}$である．まず，主成分分析を行い第1主成分および第2主成分の寄与率を調べた．その結果，第1主成分の寄与率が何れの地点においても75％以上であり，金沢（79.3％），福井（82.9％），直江津（77.0％）および輪島（75.1％）であった．すなわち，第1主成分が大部分（8割程度）を占めており，この主成分を用いて因子分析を行った（柳井・高木，1995）．

表-2は，第1主成分に対して因子分析を行った結果で，波浪諸元と因子負荷量を示している．因子負荷量に符号が付いているが，その絶対値の大きさが因子に対する負荷量を表している．この表より，本研究で理論的に予測されたように，短周期波浪の有義波高と有義波周期との積$H_{1/3}T_{1/3}$の因子負荷量が一番大きく，最も有効であることを示している．このように，説明変数との間に高い相関がある場合に，何れが本当の起源因子であるかを判断するのに，主成分分析と因子分析を併用することは有効な一つの手段であると考えられる．

5. 結論

本研究では，固有周期の非常に長い振子とのアナロジーにより，短周期波浪による長周期波の発生・発達モデルを考案し，解析解を得ると共に現地波浪データとの比較も行った結果，以下の事柄が明らかとなった．

(1) 短周期波の存在により，表面圧力場が撹乱を受けて長周期波が発生・発達する確率論的モデルを開発した．その結果，長周期波高と短周期波浪のスペクトルモーメントの関係が得られ，$m_{-2}= m_0m_{-2}/m_0$なる関係を用いると，長周期波高は短周期波浪の有義波高$H_{1/3}$とT_pとの積で表されることが示された．

(2) 本モデルで得られた有義波高とピーク周期T_pおよび有義波周期$T_{1/3}$を用いた関係式は，従来より経験的に用いられており，長周期波高と相関が高いことが示されていたが，本研究でその理論的根拠が与えられた．

(3) 本研究の確率論的ゆらぎモデルの妥当性を検証するために，NOWPHASの波浪データを用いて，長周期波高の予測精度を調べた．その結果，いずれの観測地点においても，十分な精度で予測できていることが分った．

(4) 長周期波高と波浪緒元を用いて，主成分分析および因子分析を行った結果，第1主成分は，寄与率75％以上であった．さらに，その主成分と4つの波浪緒元を用いて，因子負荷量を求めたところ，本研究で予測された$H_{1/3}T_{1/3}$は因子負荷量の絶対値が最も大きいことが示され，相関係数以外の観点からも本研究で得られた結果の妥当性が検証された．

なお本研究は，平成20年度科学研究費基盤研究Cの補助を受けたことを付記し，感謝いたします．また，現地波浪データに関しては，NOWPHASのデータを使用させて戴いた．ここに記して，関係各位に感謝いたします．

参　考　文　献

青木伸一（2002）：沿岸長周期波の発生と伝播特性に関する研究，海洋開発論文集，第18巻，pp.155-160.

渥美洋一・若山義樹・国田　淳・関口信一郎・川口　勉・平石哲也・青木伸一・上田　茂（1997）：長周期波の港内侵入過程の現地観測と長周期波高予測式の検討，海岸工学論文集，第44巻，pp. 221-225.

合田良実（1975）：浅海域における波浪の砕波変形，港湾技術研究所報告，第14巻，第3号，pp. 59-106.

田端竹千穂・田所篤博・平石哲也・玉城重則（1995）：港湾における長周期波の増幅現象に関する現地観測，海岸工学論文集，第42巻，pp. 301-305.

平石哲也・河野信二・玉城重則・長谷川準三（1997）：港湾構造物の設計に用いる長周期波の標準スペクトルについて，海岸工学論文集，第44巻，pp. 246-250.

柳井春夫・高木廣文（1995）：多変量解析ハンドブック，現代数学社，pp. 70-97, pp. 183-223.

Dingemans, M.W.(1997): Water Wave Propergation over Uneven Bottom, Part 1, World Scientific, pp. 286-289.

Longuet-Higgins, M.S. and R.W., Stewart (1962): Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to surf beat, Jour. of Fluid Mech., Vol.13, pp481-504.

Symonds, G, D.A. Huntley and A. J. Bowen (1982): Two-dimensional surfbeat： long wave generated by a time-varying breakpoint, Jour. Geophys. Res., Vol.87, No.C1, pp.492-498.

Symonds, G and A. J. Bowen (1984): Interaction of nearshore bars with incoming wave groups, Jour. Geophys. Res., Vol. 89, No. C2, pp. 1953-1977.

Tick, L.J.(1963): Nonlinear probability models of ocean waves, Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall, Inc., pp. 163-169.