

# トレンドを有する極大外力に対して定義できる 2 種の 再現期間とその不確定性

Descriptions of Retrun Period and those Degrees of Experience for a Trend Model of Sea Extremes

北野利一<sup>1</sup>・喜岡 渉<sup>2</sup>・高橋倫也<sup>3</sup>

Toshikazu KITANO, Wataru KIOKA and Rinya TAKAHASHI

It is important to detect the incremental tendency of extremal sea phenomena (sea level, wave height and so on) in recent short record and to predict the future's return level by extrapolating the trend line. It is noted that the extrapolation is adopted here in double senses: one is the extension of regression relation in time domain, another is that of rare occurrence in probability domain. For the statistical uncertainty accompanied with those extrapolations, the degree of experience is introduced and executed for two types of return periods based on the instantaneous and mean occurrence rates.

## 1. まえがき

地球温暖化などの気候変化に伴い、海面上昇や台風の大規模化など水域における外力規模の変化が検討されつつある。気象条件が極端化するという地球シミュレータの報告により、水域災害リスクの傾向が注視されている。シナリオに基づいて、気象および海象モデルによる水域外力の推算も議論される一方で、極大外力の観測記録から実証的に、そのリスクの増大を検出し、将来に向けてトレンド直線をどの程度まで外挿できるかを検討することが不可欠になる。そのためには、トレンド・モデルにおける再現期間を改めて定義する必要がある。

本研究では、トレンドを有する極大外力に対して、リスク増加率を定義し、再現期間に対して、少なくとも 2 つの定義ができることを議論する。それぞれに対応した経験度を導出し、トレンドという時間軸と、低頻度という確率軸で外挿することの不確実性について検討する。

## 2. 極値のトレンドと生起強度

### (1) 年最大値のトレンド・モデル

トレンドの最も単純なモデルは、年最大値  $x$  を時間  $t$  の線形式で表すことである。すなわち、

$$x = \mu_0 + \mu_1 t + \sigma \varepsilon \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\mu_0$ 、 $\mu_1$  および  $\sigma$  は定数であり、 $\varepsilon$  は標準極値分布に従う確率変数と考える。あるいは、

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 t \dots\dots\dots (2)$$

とにおいて、確率変数  $x$  が、時間的に変化する位置母数と尺度母数  $\mu$  をもつ極値分布に従うと考えてもよい。そのように考えると、位置母数  $\mu$  に限らず、尺度母数  $\sigma$

や極値分布の形状を表す母数  $\sigma$  も時間的に変化するものとして取扱うことにより、さらに一般化したトレンド・モデルを構築できることも理解し易い。

図-1 (a) に示されるデータは、1931 年～1982 年までの 51 年間におけるヴェネツィアの年最大 10 位までの潮位記録である (Smith, 1986; Pirazzoli, 1982)。黒丸は年最大潮位を、白丸は年間第 2 位に記録された高潮位を灰色丸は第 3～10 位の高潮位である。Smith (1986) は、年最大  $r$  ( $=10$ ) 位までの潮位記録を用いることにより、上述の年最大値のトレンド・モデルの母数推定を行った。図中の実線は、推定された母数を用いた年最大値のトレンド直線である。Smith (1986) の議論では、母数の推定方法とモデルの選択法が主であり、また、後に示す生起強度の概念は積極的に利用されておらず、トレンド・モデルの特性そのものについては、ほとんど議論されていない。

### (2) 生起強度の導入

年最大値の母数  $\mu$ 、 $\sigma$  および  $\xi$  を用いて、値  $x$  をこえる極大値の単位時間あたりの生起数として、点過程モデルに不可欠な生起強度  $\lambda$  を次式のように導入できる (Coles, 2001; 北野ら, 2008)。

$$\lambda(x) = \begin{cases} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & (\xi \neq 0) \\ \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) & (\xi = 0) \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

母数  $\mu$ 、 $\sigma$  および  $\xi$  は定数に限らない。本研究では式 (2) に示すトレンドを有する時間関数を考える。その場合、生起強度が時間の経過に伴って変化することに注意を要する。Smith (1986) による母数推定の結果を用いて、一定のレベル  $x$  に対する生起強度の変化を図-1 (b) に示す。図中の黒点は、年最大値  $x_1$  を式 (3) の生起強度に代入して得られる生起強度の値  $\hat{\lambda}(x_1)$  をプロットしてい

1 正会員 博(工) 名古屋工業大学大学院准教授 工学研究科  
2 正会員 Ph. D. 名古屋工業大学大学院教授 工学研究科  
3 工(博) 神戸大学大学院教授 海事科学研究科

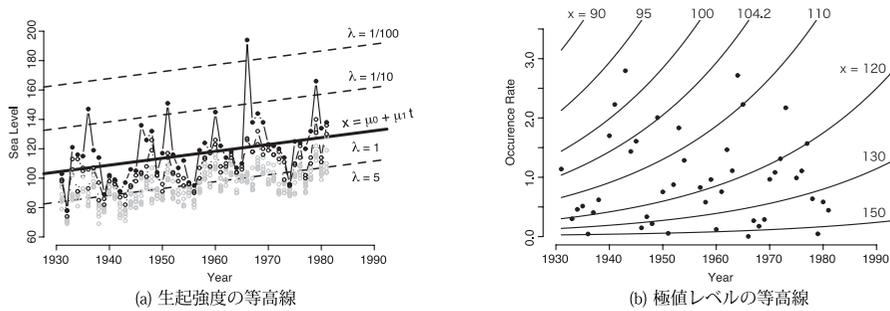


図-1 極値のトレンド・モデル (ヴェネツィアの年最大 10 位までの潮位資料を対象)

る。トレンドがある場合にも、その変化を  $x - \mu$  として差し引いているので、 $\hat{\lambda}(x_t)$  にはトレンド傾向は見られない。

他方、生起強度  $\lambda$  が一定になるように、レベル  $x$  を経時的に変化させたものが、図-1 (a) に示されている点線である。式 (3) を見るとおり、 $x = \mu$  の時、形状母数  $\xi$  の値に依らず、 $\lambda = 1$  となる。すなわち、年最大値のトレンド直線は、生起強度  $\lambda$  の等高線の 1 つとなっている。本研究で対象とするような、時間変化が位置母数  $\mu$  のみに限られる場合には、生起強度  $\lambda$  の等高線は、 $\lambda = 1$  の年最大値のトレンドに平行になる。しかし、尺度母数  $\sigma$  にも経時変化がある場合には、必ずしも直線となるように仮定できない (尺度母数は正值に限られるため)。なお、例示に用いた年最大  $r$  位までの極大値資料のモデル化にあたり、1 年間以内の母数の変化を無視している。このような離散量と連続量の混用を、本研究の随所で行い、近似的に等しいものと扱っていることに注意されたい。

災害に対して、リスクを定義する場合には、従来、災害の結果を表す損失量の期待値を用いている。逆に、災害の原因となる自然外力に対してリスクを考える場合には、外力の期待値 (あるいは最頻値など) として、外力の代表量そのものを扱うよりも、外力の生起強度の大きさを扱う方が適していると考える。すなわち、自然災害の要因となる外力に対して、生起強度  $\lambda$  をリスクと定義するのがよいと考える。図-1 において、年最大潮位のトレンドを直接的に見るよりも、一定の潮位レベルに対する生起強度の増加を見る方が、人間の思考に則していると考える。それは、生起強度が急激に変動するからではない。生起強度は回数としてカウントできる量であり、また、生起強度は、人間の数学的な思考の下で、統計解析の結果として、はじめて明らかとなる量である。一方、推定される潮位のトレンドは、潮位データそのものと対比できるので直感的といえるが、場合によっては、その直感は判断を鈍らせる。

ヴェネツィアの極大潮位に対して、Smith (1986) は  $\xi = 0$  と仮定している。また、本研究では、極大値のトレ

ンド・モデルの基本特性の検討に焦点をあてるため、 $\xi = 0$  の場合に限定する。したがって、式 (3) において、 $\mu = \mu_0$  とした生起強度を  $\lambda_0(x)$  とすれば、経時的に変化する生起強度は、

$$\lambda(x, t) = \lambda_0(x) \exp\left(\frac{\mu_1}{\sigma} t\right) \dots\dots\dots (4)$$

と表される。また、一定の極値レベル  $x$  を与えていることを前提に、時間が離散的 ( $t = 1, 2, \dots$ ) に変化することを強調して、次のように表すことも可能である。

$$\lambda_t = \lambda_0 \omega^t; \quad \log \omega = \frac{\mu_1}{\sigma} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\omega$  は (生起強度の) 増加率であり、現実的には 1 よりわずかに大きい量である (ヴェネツィアの潮位の場合は  $\omega = 1.03$ )。そのため、% で表現して、

$$\Delta\omega = (\omega - 1) \times 100 \dots\dots\dots (6)$$

と簡略化し、これをリスク増加率とよぶことにする。

### 3. 再現期間と再現レベルの定義

生起強度を用いて、少なくとも 2 種類の再現期間が定義できる。まず、第 1 の定義として、再現期間を時間の幅ではなく、単なる値として扱い、年次  $t$  における瞬間生起強度が再現期間  $R$  の逆数 ( $\lambda_t = R^{-1}$ ) となるように定める。したがって、この場合、再現レベルは、

$$\lambda(x, t) = R^{-1} (= \lambda_t) \dots\dots\dots (7)$$

を満たす極値レベルである。このように定められる再現レベルを  $x(t, \lambda_t)$  と記し、この再現レベルは、図-1 (a) に示すような生起強度の等高線である。外力レベルの増大に応じて、経年的に徐々に対応が可能な防災対策の場合は、このような定義でかまわないであろう。しかし、防災施設の設計に対しては、供用期間を想定して、その期間の中でリスクを総計して、管理する必要がある。

第 2 の定義として、再現期間という有限な幅において、極値レベルを固定し、経時変化する生起強度の積分値がちょうど 1 となるように、再現期間を決める (その結果、再現レベルをこえる事象が、再現期間に平均的に 1 回だけ生起する)。すなわち、再現期間  $R$  を与えれば、次式

を満たすように、再現レベル  $x$  が定まる。

$$\int_n^{n+R} \lambda(x,t) dt = 1 \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $n$  は再現区間の起点 (初年次) を表す。第 2 の定義で定められる再現レベルを  $x_R(n)$  と記す。図-2 は、 $n=1931, 1956$  および  $1981$  を起点にとり、再現期間  $R=50$  年として、極値レベル  $x$  に対して、平均生起強度  $\bar{\lambda}$  (式 (8) の積分を再現期間で除した量) を描いている。各曲線と水平線  $\bar{\lambda}=1/50 (=0.02)$  との交点より、再現レベル  $x_{50}(1931), x_{50}(1956)$ , および  $x_{50}(1981)$  を得る。このように、第 2 の定義に従って、所与の再現期間に対する再現レベルを算出する際に、一般的なモデル ( $\xi \neq 0$  など) に対しては煩雑な積分計算を伴い、図-2 の図解法を計算機で行う場合、繰り返し計算による数値解となる。さらに、再現レベルの信頼区間などの推定誤差を検討する際にも、その煩雑な計算が引き継がれる。しかし、供用期間中に生起するリスクを予め総計して管理している点で、第 2 の定義が、防災施設の設計に則しているといえる。

生起強度はポアソン分布の母数であり、年間生起数がゼロとなる条件より、 $i$  年めの年最大値がレベル  $x$  をこえない確率  $p_i$  は、次式で表される。

$$p_i = \exp(-\lambda_i) \dots\dots\dots (9)$$

これを用いて、 $t$  年めの年最大値が、定めた極値レベル  $x$  をはじめてこえる確率 (生起待ち時間  $t$  に対する確率関数) は、次式で与えられる。

$$f(t) = (1 - p_i) \prod_{i=1}^{t-1} p_i \dots\dots\dots (10)$$

ここで、確率  $p_i$  が時間に依存しない一定値  $p_0$  をとるなら、式 (10) は幾何分布の確率関数となる。それは等比級数となるため、 $t$  の増加に伴って単調に減少し、最頻値が存在しないことが特徴である。また、その期待値  $E(t)$  は、再現期間の本来の定義である。したがって、トレンドを有する場合も、式 (10) から得られる期待値  $E(t)$  を用いて、再現期間の第 3 の定義としてもよいが、数式表現が煩雑になるだけで、実用の範囲では第 2 の定義に近似できるので、本研究では扱わない。

式 (10) を連続化することにより、ある一定に定められた極値レベルをこえる極大値が生起するまでの待ち時間  $t$  の確率密度関数  $f(t)$  も導出できる。第 2 の定義に

基づく再現期間 50 年の再現レベル  $x_{50}$  (この場合は、起点  $n$  は無関係) をこえる極値の生起待ち時間に対して、確率密度  $f(t)$  および  $f(n)$  を図-3 に示す。リスク増加率 ( $\Delta\omega = 0 \sim 5$ ) の増大と共に、最頻値が顕在化して、再現期間 50 年に確率密度が集中する様子が明確にわかる。なお、 $f(t)$  の最頻値  $t_{mod}$  は、

$$t_{mod} = \frac{\log(\omega^R - 1)}{\log \omega} \dots\dots\dots (11)$$

と導かれる。よって、増加率  $\omega$  が高いか、再現期間  $R$  が長ければ ( $\omega^R \gg 1$ )、再現期間の周辺に最頻値をとる ( $t_{mod} \approx R$ ) ことが、式 (11) より確認できる。さらに注意すべきは、トレンドが有れば ( $\omega \neq 0$ )、必ずしも最頻値が存在するとは言えないことである (条件:  $t_{mod} > 0$ )。例えば、再現期間  $R = 50$  年に対して、リスク増加率  $\Delta\omega$  が 1.4 % より低い場合、 $f(t)$  は単調減少となる。

### 4. 経験度

推定誤差を具体化するのに、従来から、再現レベルの信頼区間が用いられる。しかし、その信頼区間の大小は、相対的な議論しかできない。したがって、短い観測期間の極値資料に対しても、信頼区間さえ付せば、極端に長い再現期間の再現レベルを推定することも容認されるという問題がある。そこで、北野ら (2008) は、生起強度の推定誤差分散  $V(\lambda)$  を生起強度の期待値で規格化することにより、推定に伴う誤差の大きさを表す指標を提案した。すなわち、経験度  $K$  は次式で与えられる。

$$K = \frac{E^2(\lambda)}{V(\lambda)} \dots\dots\dots (12)$$

上式を単純に見れば、経験度の逆数が、生起強度の変動係数 (標準偏差を平均で除したもの) の自乗であることがわかる。変動係数そのものを指標にすればよからう、と考える向きもあるが、そうではない。経験度の導入にあたり、生起強度はポアソン分布の母数であることから、生起強度のベイズ推定に、自然共役分布となるガンマ分布を仮定している背景がある。経験度は、そのガンマ分布の形状母数であり、個数として数えられる量となっている。したがって、観測データという個数で数えられる情報で、パラメトリックなモデルを用いて推定される再現レベルの情報を数えたものが経験度であると解釈も可能である。

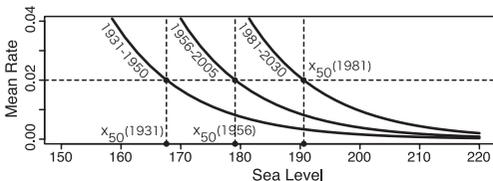


図-2 第 2 の定義に基づく再現レベルの算出

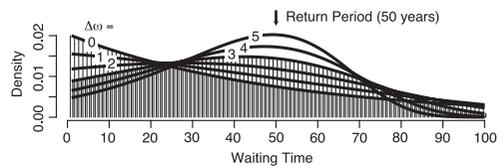


図-3 生起待ち時間の確率密度

年最大  $r$  位までの極大値を用いる場合、トレンド・モデルの情報行列  $I$  は、以下のように得られる。

$$\sigma^2 I = \begin{pmatrix} rN & r(N+1)/2 & -rNb \\ r(N+1)/2 & (2N+1)(N+1)/6 & -r(N+1)b/2 \\ -rNb & -r(N+1)b/2 & rc \end{pmatrix} \quad (13)$$

ここで、 $N$  は観測年数であり、 $b$  および  $c$  はディガンマ関数  $\Psi$  およびトリガンマ関数  $\psi$  を用いて、

$$b = \Psi(r+1); \quad c = \Psi^2(r+1) + \Psi'(r+1) + 1 \quad \dots\dots (14)$$

である。生起強度の勾配ベクトル  $\nabla \lambda_t$  に対して、

$$\sigma \frac{\nabla \lambda_t}{\lambda_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ t/N \\ -\log \lambda_t \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

となるので、年次  $t$  における瞬間生起強度の誤差分散は、

$$V(\lambda_t) = (\nabla \lambda_t)' I^{-1} \nabla \lambda_t \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる（デルタ法）。以上を用いて、再現期間  $R$  の第1の定義に基づいて、年次  $t$  の瞬間生起強度  $\lambda_t (=1/R)$  に対する経験度  $K_1$  が得られ、次式の関係が得られる。

$$\frac{rN}{K_1} = 1 + \frac{(\log \lambda_t - b)^2}{c - b^2} + \frac{3(2t - N - 1)^2}{(N+1)(N-1)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

上式を見るとおり、再現期間（の逆数  $\lambda_t$ ）のみに依存する第2項と、年次  $t$  のみに依存する第3項に分解されている。あるいは、極値資料のサイズを決める量  $r$  および  $N$  の観点で言えば、母数推定のために用いることのできる年間のデータ数  $r$  のみに依存する第2項と、観測期間長  $N$  のみに依存する第3項に分解されている。年次が観測期間の中央（ $\bar{t} = (N+1)/2$ ）になる時に、第2項は最小値をとる（したがって、経験度  $K_1$  は最大値をとる）ことがわかる。

$$\sum_{t=1}^N (t - \bar{t})^2 = \frac{(N+1)N(N-1)}{12} \left( = \frac{S}{r} \right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

を用いて、式 (17) は次式のように書き改められる。

$$\frac{1}{K_1} = h(t) + \frac{(\log \lambda_t - b)^2}{rN(c - b^2)}; \quad h(t) = \frac{1}{rN} + \frac{(t - \bar{t})^2}{S} \quad (19)$$

ただし、毎年  $r$  個のデータの年次が重複することを考慮に入れて、式 (18) で表される量の  $r$  倍を  $S$  とおいている。式 (19) で定義された  $h$  は、説明変数の影響を調べるために、回帰分析で用いられる楕円比（例えば、Belsley et al. 1980; Huber, 1981; Cook・Weisberg, 1982; Chambers・Hastie, 1992）に相当する。ところで、式 (17) あるいは (19) の第2項は、次式を満たす時に最小値ゼロとなる。

$$\lambda_t = \exp\{\Psi(r+1)\} \approx r + 0.5 \quad \dots\dots\dots (20)$$

この時、経験度は楕円比の逆数に完全に一致する。したがって、経験度は楕円比を拡張した重要な概念であると言えよう。その特別な値として、観測期間の中央とな

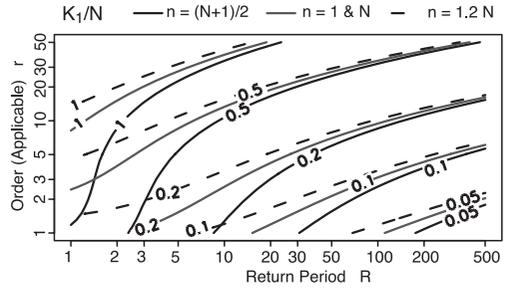


図-4 第1の再現期間の定義に基づく経験度の比

る年次  $\bar{t}$  に対し、楕円比  $h$  は最小値  $1/(rN)$  をとり、その時、経験度  $K_1$  は最大値をとり、その最大値は総データ数  $rN$  に一致する。このことは、推定に伴う情報をデータの個数で数えたものが経験度であるという概念を裏付ける証拠となっている。これと同様の議論は、正規誤差を想定した回帰分析で、平均に対する楕円比が総データ数の逆数に一致することにも見られる。また、Huber (1981) では、外れ値の影響を理論的に考察して、説明変数の範囲が実験計画などで制御可能な場合には、楕円比が 0.5 以上となることは避けるべきであると主張している。前述のとおり、楕円比と経験度が逆数の関係にあるので、これは経験度が 2.0 未満は避けるべきであるという北野ら (2008) の主張と一致している。

図-4 に観測期間長  $N$  に対する経験度の比  $K_1/N$  を図示したものを示す。このような比で一般的な表現ができるのは、式 (17) の第3項を、次のように近似して、起点の表現  $\tau (=t/N)$  に  $N$  を依存させるため、第3項そのものは  $N$  に依存しないからである。

$$\frac{3(2t - N - 1)^2}{(N+1)(N-1)} \approx 12(\tau - 0.5)^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

3つの線種の違いは、対象とする年次と観測期間の相対的な関係による。すなわち、対象とする年次が、観測期間の中央から離れるにつれて、経験度が低下する。また、その影響は、1年あたりに使用できるデータ数が少ない時（ $r$  が小さい時）に現れやすいことがわかる。

再現期間の第2の定義に基づいて、経験度  $K_2$  を導こう。起点  $n$  年とする  $R$  年間の平均生起強度は、

$$\bar{\lambda} = \int_n^{n+R} \lambda(x,t) dt / R \quad \dots\dots\dots (22)$$

であり、微分と積分の演算の順序を入れ替えることにより、その勾配ベクトル  $\nabla \bar{\lambda}$  は、式 (15) の左辺の  $\lambda_t$  を  $\bar{\lambda}$  に、その右辺の  $t$  を次式の  $t'$  に変更したものになる。

$$t' = n + M; \quad M = \int_{-1}^R \left( 1 - \frac{t \log \omega}{\omega'} \right) \frac{\omega' dt}{\omega' - 1} \quad \dots (23)$$

したがって、右辺の  $\lambda_t$  は  $\lambda_{n+M}$  に変更される。トレンド・モデルの情報は変わらないので、式 (13) の  $I$  を用

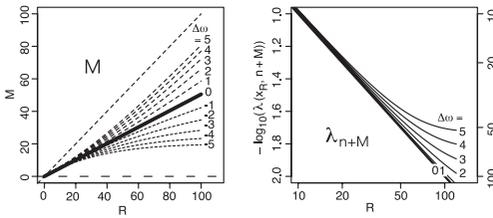


図-5 平均生起強度の勾配に含まれる  $M$  と  $\lambda_{n+M}$

いて、式 (16) と同様に、平均生起強度の分散  $V(\bar{\lambda})$  が得られる。その結果、経験度  $K_2$  に対しても、次式のように、経験度  $K_1$  と同じ形式の関係が得られる。

$$\frac{rN}{K_2} = 1 + \frac{(\log \lambda_{n+M} - b)^2}{c - b^2} + \frac{3\{2(n+M) - N - 1\}^2}{(N+1)(N-1)} \dots (24)$$

新たに付与される  $M$  は、トレンドが無ければ ( $\omega = 1$ )、再現期間の中央  $(R + 1)/2$  の値をとり、トレンドが有る場合には、リスク増加率  $\Delta\omega$  に応じて、図-5 (左) に示すように変化する。また、 $\lambda_{n+M}$  は、 $M$  を経由して、 $R$  と  $\omega$  に依存する。ただし、 $\bar{\lambda}(x_R) = 1/R$  となるように  $x_R$  を定めるため、式 (4) あるいは (5) で表されるモデルに対しては、 $\lambda_{n+M}$  すなわち  $\lambda(x_R, n+M)$  は、起点  $n$  には依存しない。その変化は、図-5 (右) に示すとおりである。

式 (24) の第 3 項は、 $R$  と  $\omega$  に依存する  $M$  が含まれるため、式 (21) のような近似を行っても、経験度の比  $K_2/N$  が  $N$  に依存しない工夫ができない。そのため、観測期間長  $N$  を個別に与えて、経験度  $K_2$  そのものを表示するより他に一般的な表示法はない。図-6 は、ヴェネツィアの潮位データに対応させて、 $N = 51$  とし、起点  $n$  は観測期間の終点に一致させている ( $n = N$ )。比較のため、 $K_1$  の等高線を淡線で付している (図-4 における  $n = N$ ,  $(N+1)/2$  の等高線を参照)。興味の対象となる、比較的長い再現期間 ( $R > 50$ ) で、増加率の違いが顕著になっている。すなわち、推定の可否について議論の対象となる経験度が低い ( $K_2 < 5$ ) 条件で、リスク増加率  $\Delta\omega$  による違いが大きくなる。また、図-5 (右) を見るとおり、 $\lambda_{n+M}$  を  $\omega$  に依存しない定数で、

$$\lambda_{n+M} = \lambda(x_R, n+M) \approx \bar{\lambda}(x_R) = 1/R \dots (25)$$

と近似しうる。式 (25) を用いて得られる経験度  $K_2$  を図中の灰点線 (凡例の approx.) で示す。近似を用いない太実線にほとんど重なり、 $\lambda_{n+M}$  を経由したリスク増加率  $\Delta\omega$  の依存性は、この場合、無視できる程度に小さいようである。すなわち、 $\Delta\omega$  の依存性は、式 (24) の第 3 項の  $M$  に大部分が支配されている。

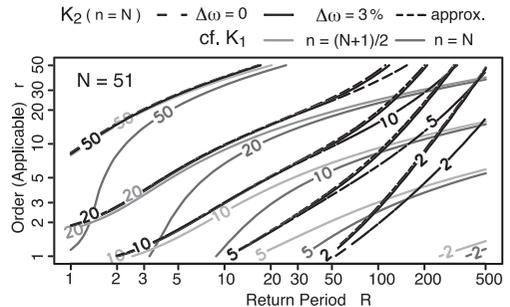


図-6 第 2 の再現期間の定義に基づく経験度

5. むすび

極値のトレンド・モデルに対して、その生起強度が経時的に変化することから、ある年次における瞬間生起強度と、有限な時間の区間における平均生起強度を基に、再現期間が定義されることを示した。リスクの総和を予め管理することが不可欠となる防災施設の設計に対しては、後者の定義を用いることを提案する。また、それぞれの再現期間の定義に基づく経験度を導出し、第 2 のものは、第 1 のものを形式的に拡張したものに帰着できることを示した。その結果、推定の可否の検討対象となる経験度が低い条件で、リスク増加率による経験度の変化が大きかった。また、経験度は、極値解析に伴う推定誤差を表すだけでなく、回帰分析における梶子比を拡張した重要な概念であることがわかった。

謝辞：本研究は、科学研究費 (代表：高橋倫也 教授，課題名：古典的な極値データ解析法の改良) の成果の一部である。

参考文献

北野利一・森瀬喬士・喜岡 渉・高橋倫也 (2008)：確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案，海岸工学論文集，第 55 巻，pp. 141-145.  
 Belsley, D. A., Kuh, E. and R. E. Welsch (1980): Regression Diagnostics - Identifying Influential Data and Sources of Collinearity, Wiley, 292p.  
 Chambers, J. M. and T. J. Hastie (1992): Statistical Models in S, Wadsworth & Brooks/Cole. (柴田里程 訳，S と統計モデル，共立出版，1994)  
 Coles, S. (2001): An Introduction to Stastistical Modeling of Extreme Values, Springer, 208p.  
 Cook, R. D. and S. Weisberg (1982): Residuals and Influence in Regression, Chapman and Hall, 230p.  
 Huber, P. J. (1981): Robust Statistics, Wiley, 308p.  
 Pirazzoli, P. (1982): Maree estreme a Venezia (periodo 1872 - 1981), Acqua Aria, vol.10, pp.1023-1039.  
 Smith, R. L. (1986): Extreme value theory based on the r largest annual events, Jour. Hydrol., vol.86, pp.27-43.