

# 順序統計量の分散を考慮した極値統計解析の適合度評価法に関する研究

## A New Criterion for Goodness-of-Fit in Extreme Statistics and Its Applicability

泉宮尊司<sup>1</sup>・澁谷仁史<sup>2</sup>

Takashi IZUMIYA and Hitoshi SHIBUYA

A weighted least squares method for extreme statistics has been developed to estimate the parameters of candidate distribution functions. The method employs variances of the order statistics of extreme data, which are analytically evaluated by virtue of asymptotic distributions of the order statistics. A new criterion for goodness-of-fit in extreme statistics has been proposed to select a distribution function best fit to the parent distribution. Monte Carlo simulations with 5,000 and 10,000 samples have been carried out to verify an applicability of the new criterion for goodness-of-fit. The simulations show that the present criterion can select a correct distribution function for the case of FT-I type and generalized extreme value distributions, and Weibull distributions with the shape parameters of 0.75 and 1.0.

### 1. 緒言

再現確率統計量を精度よく推定するためには、精度の高い母数推定法ならびにより検定力の高い適合度評価法が採用されなければならない。母数推定法に関しては、最尤法や最小二乗法と最尤法の長所を取り入れた重み付最小二乗法などの精度の高い方法が提案され、その精度が検証されている（山口ら、1995；泉宮・斉藤、1997）。しかしながら、適合度評価法に関しては、Akaike (1970) による最尤法に適用可能なAIC基準、合田 (1988, 2008) による相関係数を用いた方法、および宝・高埴 (1988) による標準最小二乗基準 (SLSC) などが提案されているが、何れがより精度が高いかは殆ど検討されていない。またAIC基準は、最尤法にしか適用できないため、実用的に用いられている他の母数推定法には適用し難い欠点があった。泉宮・斉藤 (1997) および泉宮・岡本 (2000) は、この欠点を克服すべく漸進理論を用いた新たな重み付最小二乗法を開発し、AIC基準値を評価して、その検定力が高いこともモンテカルロシミュレーションにより検証している。しかしながら、従来の適合度評価基準との比較は行われてはおらず、何れの適合度評価基準がより検定力が高いのかは明らかにされていなかった。

そこで本研究では、順序統計量の分散を考慮した母数推定法と新たな適合度評価基準を提案し、モンテカルロシミュレーションにより、従来より実用的に用いられている相関係数による基準および基準化最小二乗平均誤差適合基準 (SLSC基準) と比較することにより、その精度を検証することを研究の目的とする。

### 2. 一般化極値分布に対する重み付最小二乗法

泉宮・斉藤 (1997) は、順序統計量の分散の違いに着目して、極値統計解析において初めて重み付最小二乗法を開発した。その後、泉宮・岡本 (2000) は順序統計量  $x_i$  および  $x_j$  の同時確率分布が、漸近的に2次元正規分布になることを利用して、重み付最小二乗法を新たに提案すると共に、AIC基準に準拠した適合度評価基準を提案している。しかしながら、行列演算と逆行列を算定しなければならず、実務的にはやや難しい側面があった。そこで本研究では、精度が殆ど劣ることのない泉宮・斉藤 (1997) の重み付最小二乗法を用いて、一般化極値分布に対する母数推定法を開発すると共に、新たな適合度評価法を提案する。

ここで、順序統計量の分散を評価するために、以下に示す一般化極値分布関数 (GEV分布) を考える。

$$F(x) = \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \frac{x-B}{A} \right)^{-1/\xi} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{A} \left( 1 + \xi \frac{x-B}{A} \right)^{-(1+1/\xi)} \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \frac{x-B}{A} \right)^{1/\xi} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここに、 $F(x)$  および  $f(x)$  は、それぞれ一般化極値分布の確率分布関数、確率密度関数である。また、 $A$ 、 $B$  および  $\xi$  は、それぞれ尺度母数、位置母数および形状パラメタの逆数である。この一般化極値分布は、Jenkinson (1955) が3種類の極値分布を統一的に関数表示した分布関数である。

これより泉宮・斉藤 (1997) と同様な手法により、順序統計量の漸近分布を求めることにする。まず、 $N$  個の

1 正会員 工博 新潟大学教授工学部建設学科  
2 新潟大学大学院自然科学研究科

標本のうち小さい方から  $i$  番目の順序統計量  $x_i$  の確率密度関数  $p(x_i)$  は、次式で与えられる (Rao, 1977)。

$$p(x_i) = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} [F(x_i)]^{i-1} [1-F(x_i)]^{N-i} f(x_i) \dots (3)$$

上式より、順序統計量  $x_i$  に対して割り当てられる非超過確率  $\xi_i = F(x_i)$  の確率密度関数  $\psi(\xi_i)$  は、確率変数の変換により次式で与えられる。

$$\psi(\xi_i) = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} (\xi_i)^{i-1} (1-\xi_i)^{N-i} \dots (4)$$

ここで、順序統計量  $x_i$  に対応する非超過確率の最適値  $p$  および  $q$  を、

$$p = \frac{i-\alpha}{N+\beta}, \quad q = 1-p = \frac{N-i+\alpha+\beta}{N+\beta} \dots (5)$$

と表す。ここに、 $i$  は昇順位数、 $N$  は標本数、 $\alpha$  および  $\beta$  は、1 よりも小さいある正の実数とする。次に、次式のような変数変換を行うと、

$$z_i = \frac{\sqrt{N}(\xi_i - p)}{\sqrt{pq}} \dots (6)$$

この変換により、 $z_i$  の確率密度関数  $\psi(z_i)$  は、

$$\psi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} p^{i-1/2} q^{N-i+1/2} \cdot \left(1 + z_i \sqrt{\frac{q}{Np}}\right)^{i-1} \left(1 - z_i \sqrt{\frac{p}{Nq}}\right)^{N-i} \dots (7)$$

となる。上式において、 $N$  を十分大きな数とすると、 $z_i$  の漸近分布は、平均値が 0、分散が 1 の正規分布  $N(0,1)$  となることが示される。したがって、 $\sqrt{N}(\xi_i - p)$  の漸近分布は  $N(0, pq)$  となる。

さらに、 $(x_i - x_{ip})$  の漸近分布を考えると、Rao (1977) の収束定理を用いることで、その分散は次式で与えられる。

$$\sigma^2(x_i) = \frac{pq}{N[f(x_{ip})]^2} \dots (8)$$

ここに、 $x_{ip}$  は非超過確率  $\xi_i$  が、 $\xi_i = p$  となるとき  $x_i$  の値で、 $p = F(x_{ip})$  なる関係より求められるものである。したがって、式 (8) の  $f(x_{ip})$  の値は、

$$\frac{i-\alpha}{N+\beta} = \exp\left\{-\left(1+\xi \frac{x-B}{A}\right)^{-1/\xi}\right\} \dots (9)$$

なる関係が成立するために、

$$f(x_{ip}) = \frac{1}{A} \frac{i-\alpha}{N+\beta} \left[-\ln\left(\frac{i-\alpha}{N+\beta}\right)\right]^{(\xi+1)} \dots (10)$$

となる。したがって、一般化極値分布の順序統計量の分散は、式 (8) より次式で与えられる。

$$\sigma^2(x_i) = \frac{A^2(N-i+\alpha+\beta)}{N(i-\alpha) \left[-\ln\left(\frac{i-\alpha}{N+\beta}\right)\right]^{2(\xi+1)}} \dots (11)$$

なお、降順位  $m$  位の分散は、 $i+m-1=N$  および  $\alpha+\alpha'+\beta=1$  なる関係が成立するため、

$$\sigma^2(x_m) = \frac{A^2(m-\alpha')}{N(N-m+\alpha'+\beta) \left[-\ln\left(\frac{m-\alpha'}{N+\beta}\right)\right]^{2(\xi+1)}} \dots (12)$$

となる。式 (11) および式 (12) より、母数  $A$  および順位が求められれば、容易に順序統計量の分散が求められる。なお、 $\xi=0$  とすれば、泉宮・斉藤 (1997) が求めた FT-I 型分布の結果と完全に一致する。

### 3. 重み付最小二乗法と適合度評価指標

本節では、一般化極値分布に対する順序統計量の分散を評価し、それを考慮した重み付最小二乗法について説明する。さらに、同じく順序統計量の分散を考慮した新たな適合度評価指標を提案する。

#### (1) 重み付最小二乗法

前節で記述したように、順序統計量の分散の値が異なるため、その違いを考慮した母数推定法を用いる方がより望ましいと考えられる。したがって、確率分布関数に応じた基準化変量  $y_i$  を用いて、

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - Ay_i - B)^2}{\sigma^2(x_i)} \rightarrow \min \dots (13)$$

を最小化することを考える。一般化極値分布の順序統計量の分散の評価式 (11) を上式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - Ay_i - B)^2}{\sigma^2(x_i)} \\ &= \frac{N}{A^2} \sum_{i=1}^N \frac{(i-\alpha) \left[-\ln\left(\frac{i-\alpha}{N+\beta}\right)\right]^{2(1+\xi)}}{(N-i+\alpha+\beta)} (x_i - Ay_i - B)^2 \\ &= \frac{N}{A^2} \sum_{i=1}^N w_i^2 (x_i - Ay_i - B)^2 \dots (14) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $w_i^2$  は次式で定義される重み係数である。

$$w_i^2 = \frac{(i-\alpha) \left[-\ln\left(\frac{i-\alpha}{N+\beta}\right)\right]^{2(\xi+1)}}{(N-i+\alpha+\beta)} \dots (15)$$

この重み係数を用いて、母数  $A$  および  $B$  の線形推定式は、

$$A \sum_{i=1}^N w_i^2 y_i^2 + B \sum_{i=1}^N w_i^2 y_i = \sum_{i=1}^N w_i^2 x_i y_i \dots (16)$$

$$A \sum_{i=1}^N w_i^2 y_i + B \sum_{i=1}^N w_i^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 x_i \dots (17)$$

となる。式 (16) および (17) を解いて得られる母数は、式 (13) の値をほぼ最小にするものであり、計算の容易さのため本研究では、この母数推定法を用いる

ことにした。

## (2) 適合度評価指標

確率分布関数の適合度評価指標は、母数推定法とコンシステントであることがより望ましいと考えられる。このため本研究では、重み付最小二乗法で用いた指標である、次式を新たな適合度指標として用いることにした。

$$IC = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - Ay_i - B)^2}{\sigma^2(x_i)} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $\sigma^2(x_i)$ は一般化極値分布の場合には式(11)を、FT-I型分布およびWeibull分布の場合には、泉宮・斉藤(1997)が示しているものを用いた。

従来の最小二乗法では、式(18)の分母をそれぞれの確率分布関数の分散 $\sigma^2$ を用いたものであり、宝・高棹(1988)による標準最小二乗基準(SLSC)は、各確率分布関数の広がりの違いを考慮して、 $\sigma^2(x_i)$ の代わりに $(y_{0.99} - y_{0.01})^2 = \{F^{-1}(0.99) - F^{-1}(0.01)\}^2$ と置いたものに相当している。何れの適合度評価基準の検定力が高いかについては、モンテカルロシミュレーションにより検証することにする。

## 4. 一般化極値分布の順序統計量の分散値の比較

図-1は、モンテカルロ法により5,000資料作成して得られた、一般化極値分布の順序統計量の標準偏差を示したものである。この図において、形状パラメタ $\xi=0.1$ で、式(11)において真の母数を用いたものである。いずれの順位においても、極めて良く一致していることが分かる。また、昇順順位の大きいところでは、順序統計量の標準偏差がかなり大きくなっていることが明確に分かる。図-2は、同じ条件ではあるが、推定された母数を用いて標準偏差を推定したものである。この図に見られるように、推定された母数を用いても十分な近似精度があることが確認された。なお、標本数 $N=50$ の場合にも全てのケースについて計算を行っているが、真の母数を用いた場合には、殆ど誤差がなく、推定された母数を用いた場合には、多少の誤差が見られる程度であった。

図-3は、同じく一般化極値分布の $\xi=0.4$ 、標本数 $N=100$ の場合で、推定された母数を用いて式(11)より推定された標準偏差の比較を示している。この図からもわかるように、本研究で得られた評価式は、十分な近似精度で分散や標準偏差が算定できることを示している。

## 5. 適合度評価基準の比較

適合度評価基準の比較は、合田(2008)が代表分布として挙げている、FT-I型分布、一般化極値分布(GEV:  $\xi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ )、Weibull分布( $k = 0.75, 1.0, 1.4, 2.0$ )の計9種類の分布に対して行った。標本数 $N$ は、50および100とし、資料数は、5,000および10,000として行って

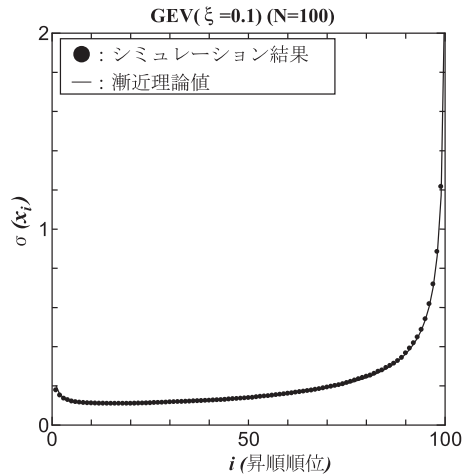


図-1 真の母数 $\lambda$ を用いた順序統計量の標準偏差の変化 (GEV [ $\xi = 0.1$ ],  $N = 100$ )

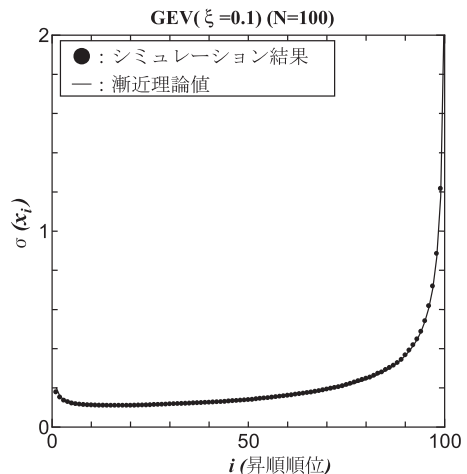


図-2 推定母数 $\lambda$ を用いた順序統計量の標準偏差の変化 (GEV [ $\xi = 0.1$ ],  $N = 100$ )

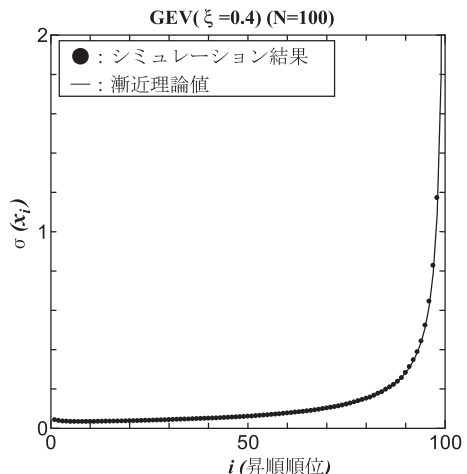


図-3 推定母数 $\lambda$ を用いた順序統計量の標準偏差の変化 (GEV [ $\xi = 0.4$ ],  $N = 100$ )

いる。ここでは紙面の都合もあり、より信頼度のある  $N = 100$  および  $10,000$  資料の結果を示すことにする。

図-4は、真の確率分布関数がFT-I型分布のときの適合度評価基準によって選考された確率分布の割合を示したものである。当然のことではあるが、FT-I型分布であると判断される割合が最も高くなっているが、本研究で提案している適合度評価基準ICが最も正解率が54%と高くなっている。続いて、SLSC基準で約45%、相関係数を用いた方法は正解率約38%であることが分かる。

一般化極値分布の場合の結果は、図-5から図-8に示されている。これらの図より、いずれの $\xi$ の値に対しても本研究の適合度基準の正解率が高く、次いでSLSC基準、相関係数を用いた基準の順番となっている。特に、 $\xi = 0.4$ の場合には、本研究の適合度評価基準の正解率が70%以上と非常に高くなっていることが分かる。

さらにWeibull分布の場合の結果を、図-9から図-12に示す。このWeibull分布の場合には、形状パラメタ $k$ の値が0.75および1.0の場合には、本研究の適合度評価基準ICが最も検定力が高く、特に $k = 0.75$ の場合には正解率90%を超える結果となっている。しかしながら、 $k = 1.4$ では何れの基準もほぼ同程度であり、 $k = 2.0$ では相関係数を用いた方法が最も正解率が高くなっている。Weibull分布の $k = 2.0$ でこのような結果となったことは、不明確ではあるが、母数推定の際に線形推定法を用いたことに関係しているかもしれない。しかしながら、本研究で提案された新しい適合度評価基準は、従来の適合度評価基準よりも、総合的には十分な検定力を有していると判断される。

## 6. 結論

順序統計量の分散を考慮した新たな適合度評価法を提案し、モンテカルロ法によりその精度を検証したところ、以下の事柄が明らかとなった。

- (1) 一般化極値分布 (GEV) に対して、順序統計量 $x_i$ の分散を漸近理論により理論的に求め、モンテカルロシミュレーションを行った結果、推定値は十分な精度を有していることが明らかとなった。

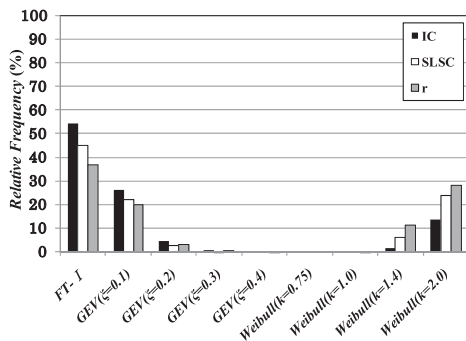


図-4 適合度評価基準の比較 (FT-I型分布,  $N = 100$ )

- (2) 候補母分布関数を9種類として、適合度検定を行った結果、真の母分布関数がFT-I型分布の場合、本適

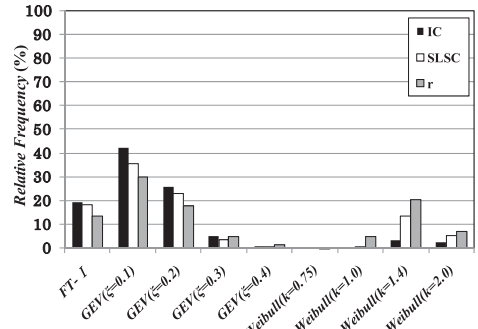


図-5 適合度評価基準の比較 (GEV [ $\xi = 0.1$ ],  $N = 100$ )

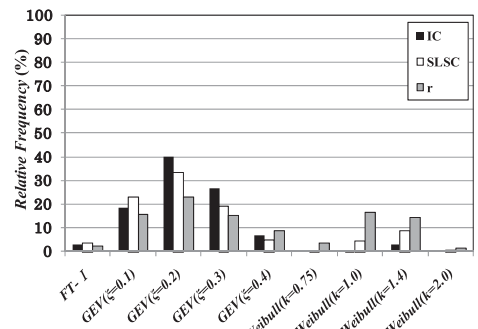


図-6 適合度評価基準の比較 (GEV [ $\xi = 0.2$ ],  $N = 100$ )

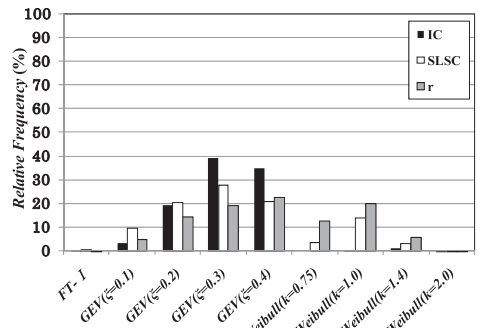


図-7 適合度評価基準の比較 (GEV [ $\xi = 0.3$ ],  $N = 100$ )

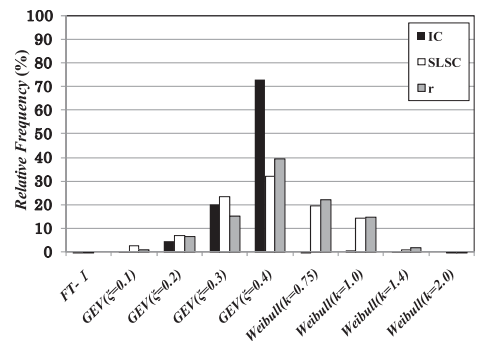


図-8 適合度評価基準の比較 (GEV [ $\xi = 0.4$ ],  $N = 100$ )

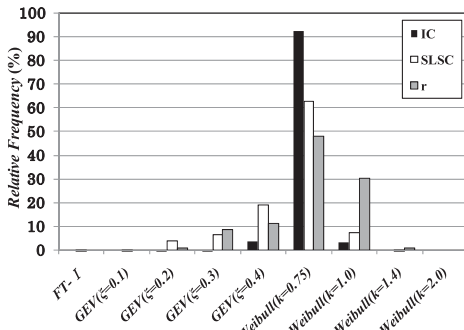


図-9 適合度評価基準の比較 (Weibull [k = 0.75], N = 100)

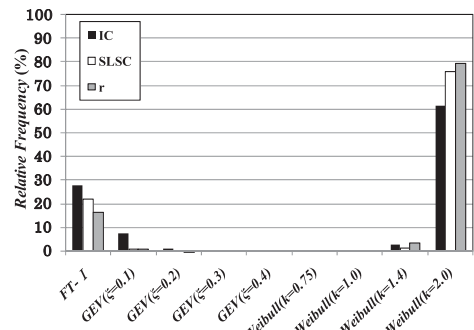


図-12 適合度評価基準の比較 (Weibull [k = 2.0], N = 100)

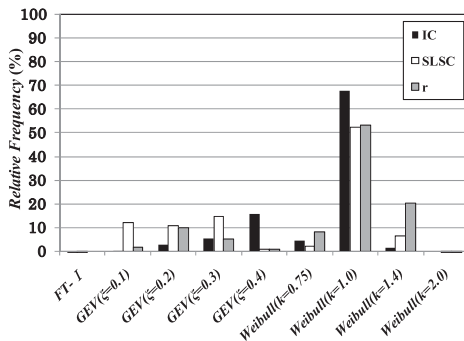


図-10 適合度評価基準の比較 (Weibull [k = 1.0], N = 100)

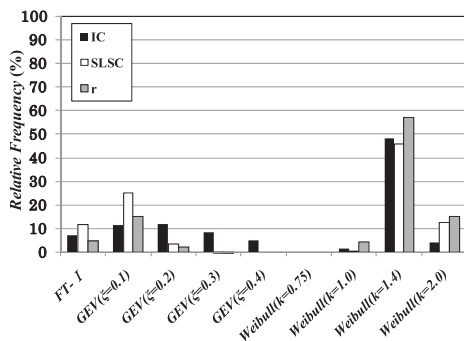


図-11 適合度評価基準の比較 (Weibull [k = 1.4], N = 100)

合度評価基準が最も正解率が高く、ついでSLSC基準、相関係数の順であった。

- (3) 真の母分布関数がGEV分布のとき、形状パラメタ $k$ の値に関わらず、本適合度評価基準が最も正解率が高いことが明らかとなった。

- (4) 真の母分布関数がWeibull分布の場合には、形状母数 $k$ の値が0.75および1.0では、本適合度評価基準が最も正解率が高かったが、 $k = 1.4$ および2.0では相関係数の基準がやや正解率が高い結果であった。

## 参考文献

- 泉宮尊司・斉藤雅弘 (1997) : 極値統計解析における順序統計量の分散を考慮した母数推定法, 海岸工学論文集, 第44巻, pp. 181-185.
- 泉宮尊司・岡本佳世 (2000) : 極値統計解析における不偏性条件式ならびに漸近理論による信頼区間の推定, 海岸工学論文集, 第47巻, pp. 286-290.
- 合田良実 (1988) : 極値統計解析におけるプロットング公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第27巻, 第1号, pp. 31-92.
- 合田良実 (2008) : 耐波工学, 一港湾・海岸構造物の耐波設計一, 鹿島出版会, pp. 327-379.
- 宝 薫・高俣琢馬 (1988) : 水文頻度解析における確率分布モデルの評価基準, 土木学会論文集, 第393号, II-9, pp. 151-160.
- 山口正隆・畑田佳男・中村雄二・大木康憲 (1995) : 波高の極値統計解析における母数推定法の比較, 海岸工学論文集, 第42巻, pp. 231-235.
- Akaike, H. (1970): A new look at the statistical model identification, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-19, No. 6, pp. 716-723.
- Jenkinson, A.F. (1955): The frequency distribution of the maximum or minimum of meteorological elements, Quart. Jour. Roy. Meteorol. Soc., Vol. 81, pp. 158-171.
- Rao, C.R. (1977): Linear Statistical Inference and Its Applications, John Wiley and Sons, 奥野忠一他訳, 統計的推測とその応用, 東京図書, 568 p.