

# 砕波段波の陸上遡上予測モデルの開発

## Prediction Model of Breaking Wave Run-up

稲垣健志<sup>1</sup>・有働恵子<sup>2</sup>・真野 明<sup>3</sup>

Takeshi INAGAKI, Keiko UDO and Akira MANO

For investigation of beach processes, it is necessary to consider wave-driven sand transport. Hydrodynamics in the wave run-up area should be estimated accurately in order to predict the beach processes, however, the accuracy of existing numerical models regarding moving shoreline change are insufficient for the prediction of the shear stress and the sediment transport. This study developed theoretical-based moving shoreline model using shallow water equation. The wave run-up heights obtained from numerical results of this model were approximately proportional to the values calculated from Hunt (1959) formula. This theory-based model can simulate the moving shoreline change accurately.

### 1. 緒言

波打ち帯は砕波帯と並んで最も土砂輸送が活発な場所であり、これを定量化し予測する上で、波の挙動を知ることがまず重要である。波の陸上遡上を計算する数値モデルとして、これまで岩崎ら (1982) の階段型地形モデル、Mano (1994) の特性曲線法、Kennedyら (2000) のスロット型地形モデル等が提案されている。土砂輸送の予測を目標として陸上遡上を考える場合には、底面せん断力の評価が重要であり、この元となる流速を精度よく計算する必要がある。階段型地形を用いた陸上遡上モデルでは波先端が鉛直壁で仕切られる境界条件となっていることから波先端流速はゼロになってしまうという問題点があり、また、スロット型地形モデルは人工的に設けたスロットの幅に先端流速が依存するという問題点がある。

特性曲線法は、地形を改変しない厳密な扱いが可能であるが、平面2次元空間への拡張は難しい。一方、段波領域において浅水流方程式を解く上で、例えばBrigantiら (2009) のようにGodunov scheme (Godunov, 1959) がしばしば用いられる。Godunov schemeは、一般化風上差分法と呼ばれるもので、輸送方程式系を対角化して固有ベクトルの方向の風上差分を導いており、特性曲線法と同じく固有値展開に基づく方法である。著者らは特性曲線法の考え方を利用し、Godunov schemeを用いた、従来の手法に比べ波先端付近でより高精度な計算を行った。また、深海域との接続のため、今回は簡便ではあるが、有働ら (2008) と同様の手法を用いた。本研究は、波打ち帯における土砂輸送問題への展開が可能なる陸上遡上計算法の開発を目的とし、Godunov schemeを用いて解の性質を利用し、可能な限り計算における仮定を排除して陸

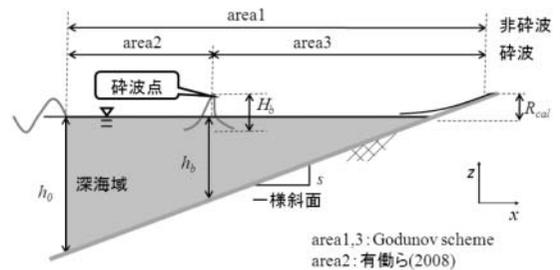


図-1 計算領域

上遡上を計算しようとするものである。

### 2. 計算方法

基礎方程式は浅水流方程式とする。波先端の計算手法の精度を確認するため、まずは砕波が生じない場合 (非砕波) の計算条件について首藤の理論式 (1972) およびCarrier-Greenspan解 (CG解) (Carrierら, 1958) と比較することにより計算結果の検証を行った上で、砕波が生じる条件についてHuntの実験式 (1959) との比較を行う。図-1に、非砕波、および砕波条件での計算領域を示す。非砕波の場合はarea1 (全領域) でGodunov schemeによる計算を行い、砕波の場合はまずarea2で有働ら (2008) の手法を用いて浅水変形式により砕波点の波高 $H_b$ および水深 $h_b$ 計算した後、area3でGodunov schemeにより遡上域までの計算を行う。

#### (1) Godunov schemeによる浅水流方程式の解法

ベクトル表記した連続式および浅水流方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{G} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} (h+\eta)u \\ \frac{u^2}{2} + g\eta \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{gn^2}{D^{4/3}}|u|u \end{pmatrix} \dots\dots (2)$$

1 学生会員 修士 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻  
2 正会員 助教 東北大学大学院工学研究科  
3 正会員 教授 東北大学大学院工学研究科

であり、 $\eta$ は水位、 $u$ は流速、 $h$ は静水深、 $D$ は全水深 ( $=h+\eta$ )、 $n$ はマンニングの粗度係数 ( $=0.02\text{m}^{-1/3}\cdot\text{s}$ )、 $g$ は重力加速度である。(1)を書き換えると、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = G \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} u & h+\eta \\ g & u \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ヤコビアン $A$ の固有値を求めると、

$$\lambda = u \pm \sqrt{g(h+\eta)} = \lambda_1, \lambda_2 \quad \dots\dots\dots(5)$$

となり、特性曲線の傾き $Z^+, Z^-$ を表している。

$$\frac{dx}{dt} = u \pm C = Z^+, Z^- = \lambda_1, \lambda_2$$

波打ち帯における波先端では、

$$D = h + \eta = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

であり、波速 $C = \sqrt{gD} = 0$ となるから、 $\lambda_1 = \lambda_2$ となって固有値が重根となり、方程式(3)は放物型となる。それ以外の場所では、固有値は相異なる実根となるので、方程式は双曲型である。すなわち、波先端は2つの特性曲線 $Z^+, Z^-$ の包絡線軌跡となる。ここで、フルード数 $F_r$

$$F_r = u/C \quad \dots\dots\dots(7)$$

について考えてみると、波先端付近では、波速が小さくなることから、陸上遡上時 ( $u>0$ ) には、 $F_r>1$ の射流、戻り流れ時 ( $u<0$ ) には、 $F_r<-1$ の射流となる。

次に、LeVeque (1990) にしたがって、式(3)をGodunov schemeに展開する。固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ に対応する右固有ベクトルを $r_1, r_2$ とし、 $R = [r_1, r_2]$ による相似変換を行うと、 $A$ は対角化され $\Lambda$ となる。

$$R^{-1}AR = \Lambda, \quad A = R\Lambda R^{-1} \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(3)に左より、 $R^{-1}$ を掛け、 $R^{-1}U = V$ とおくと、

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} = R^{-1}G \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$R = \begin{pmatrix} C & C \\ g & -g \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(10)$$

式(9)に風上差分を適用すると、空間ステップを $i$ 、時間ステップを $n$ で表して、

$$V_i^{n+1} = V_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+ (V_i^n - V_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^- (V_{i+1}^n - V_i^n) \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$+ \Delta t R^{-1}G$$

ここで、

$$\lambda_p^+ = \max(\lambda_p, 0), \quad A^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+) \quad \dots\dots\dots(12)$$

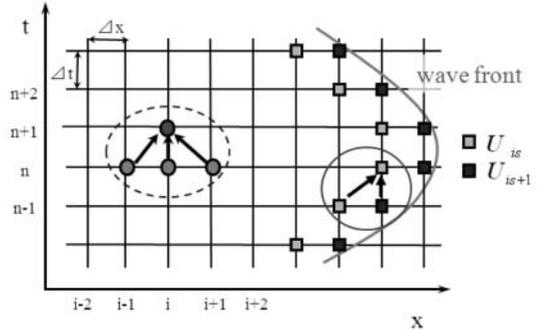


図-2 波の先端におけるrun-up時(実線の丸で片側差分)およびそれ以外(破線の丸で両側差分)での差分、 $i_s$ ;波先端に2番目に近い海域側のメッシュ

$$\lambda_p^- = \min(\lambda_p, 0), \quad A^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-) \quad \dots\dots\dots(13)$$

この式に左側より $R$ を掛けると、一般化した差分式

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+ (U_i^n - U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^- (U_{i+1}^n - U_i^n) \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$+ \Delta t G$$

が得られる。ただし、 $A^+ = R\Lambda^+R^{-1}$ 、 $A^- = R\Lambda^-R^{-1}$ 、 $A = A^+ + A^-$ である。式(14)は、 $n$ 時間ステップの3格子点の既知の値を使って、 $n+1$ 時間ステップの値を計算する陽的差分式である(図-2参照)。

(2) 波先端の計算方法

波先端の流速を $u_s$ 、波先端の $x$ 座標を $\xi_s$ とすると、

$$\frac{d\xi_s}{dt} = u_s \quad \dots\dots\dots(15)$$

の関係があり、 $u_s$ を推定することにより、式(15)を積分して、先端位置を追跡する計算を行う。

特に、陸上遡上時 $u_s>0$ には、波先端付近では、 $F_r>1$ の射流となることから、 $\lambda_p^- = 0$ 、 $\Lambda^- = \mathbf{0}$ 、 $A^- = \mathbf{0}$ となり、式(14)において、右辺第3項は0となる。従って、後退差分で $n+1$ 時間ステップの $U$ が正確に計算できることになる。先端流速 $u_s$ は最寄のメッシュの流速と等しいとして与えた。

戻り流れ時 $u_s<0$ には、波先端付近では、 $F_r<-1$ の射流であり、 $\lambda_p^+ = 0$ 、 $\Lambda^+ = \mathbf{0}$ 、 $A^+ = \mathbf{0}$ となるが、波先端付近に計算点をすべての場合に配置することはできないので、図-1に示すように、先端から1メッシュ以上離れた点で、式(14)を計算し、 $n+1$ 時間ステップの $U$ を求めた。

(3) 沖側境界条件等

沖側境界では無反射境界条件を用い、波高 $H_b$ 、周期 $T$ の正弦波を入射させた。これは非線形長波方程式を解くことと矛盾するが、非線形波を入射させることは難しいため、ここでは正弦波で近似することとする。初期条件は静水状態とした。非砕波・砕波の判定には、入射波振幅 $a_0$ と砕波限界入射振幅 $a_m$ の比( $a_0/a_m$ )による梶浦の砕

波条件 (梶浦ら, 1977) を用いた.

$$\text{非碎波条件} : a_0/a_m < 1 \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\text{碎波条件} : a_0/a_m > 1 \quad \dots\dots\dots(17)$$

$a_m$  は首藤の理論式 (1972) より,

$$(2\pi l/L)^{-2} = 2a_m/h_0 \sqrt{J_0^2(4\pi l/L) + J_1^2(4\pi l/L)} \quad \dots\dots(18)$$

ここで,  $l$ : 斜面の水平距離,  $L$ : 沖側境界での波長,  $h_0$ : 沖側水深,  $J_n$ : ベッセル関数である. 稲垣ら (2009) によれば非碎波条件であっても  $a_0/a_m > 0.1$  の場合には碎波への遷移過程にあると判断されることから, ここでは  $a_0/a_m < 0.1$  の場合を非碎波とした.

非碎波の場合には沖側境界は入射波条件となる. 碎波が生じる場合については, 有働ら (2008) と同様に微小振幅波を仮定して浅水変形の式から沖波波高  $H_0$  および周期  $T$  を用いて深海から碎波点までの各地点における波高  $H$  を算出し, 碎波点 ( $H$  が碎波限界波高  $H_b$  を超える地点) の波浪条件を沖側条件とした. 碎波の判定式としては, 合田の碎波限界波高  $H_b$  の式 (合田, 1973)

$$\frac{H_b}{L_0} = 0.17 \left\{ 1 - \exp \left[ -1.5 \frac{\pi h}{L_0} \left( 1 + 15s^{4/3} \right) \right] \right\} \quad \dots\dots(19)$$

を用いた. ここで,  $L_0$ : 沖波波長,  $s$ : 砂浜勾配である.

計算結果は, 非碎波と碎波の計算条件に分けて整理し, 非碎波の場合には首藤の理論式 (1972) より得られる遡上高  $R_{shuto}$

$$R_{shuto}/2a_0 = l/\sqrt{J_0^2(4\pi l/L) + J_1^2(4\pi l/L)} \quad \dots\dots(20)$$

と比較する. 碎波の場合には Hunt の実験式 (Hunt, 1959) を用い, これより得られる  $R_{Hunt}$

$$R_{Hunt} = s\sqrt{H_0 L_0} = \xi H_0 \quad \text{for } 0.1 < \xi < 2.3 \quad \dots\dots(21)$$

と比較を行う. Hunt 式は数 10% の誤差が含まれるものの, 碎波の場合に適用可能な解析解が見当たらないため, この式を用いた. ここで,  $\xi$ : イリバーレン数 ( $= s/\sqrt{H_0/L_0}$ ) である.

### 3. 計算結果

計算条件を表-1 に示す. 入射波条件を与えた水深は  $h_0 = 24\text{m}$  で, 非碎波条件では Godunov scheme による計算, 碎波条件では有働らの手法での計算を開始する. 時空間ステップ ( $\Delta t, \Delta x$ ) は, 非碎波の場合に (0.04s, 4.0m), 碎波の場合に (0.04s, 2.0m) とした. 非碎波の計算条件としては長波を想定し,  $s$  (0.1, 0.05, 0.02),  $H_0$  (1m, 2m),  $T$  (100s, 200s, 400s, 800s) のすべての組み合わせのうち,

表-1 非碎波条件および碎波条件での計算ケースと遡上高の計算結果の概要

(a) 非碎波条件

case-n	s	$H_0(\text{m})$	$T_0(\text{s})$	$a_0/a_m$	$R_{cal}(\text{m})$	$R_{cal}/R_{shuto}$
case-a1	0.1	1	800	0.001	0.98	0.97
case-a2	0.1	1	400	0.003	0.98	0.95
case-a3	0.1	1	200	0.011	1.10	0.98
case-a4	0.1	1	100	0.064	1.39	0.87
case-a5	0.1	2	800	0.001	1.95	0.97
case-a6	0.1	2	400	0.005	2.05	1.00
case-a7	0.1	2	200	0.023	2.21	0.98
case-a8	0.05	1	800	0.003	0.93	0.90
case-a9	0.05	1	400	0.011	1.10	0.98
case-a10	0.05	1	200	0.064	1.50	0.94
case-a11	0.05	2	800	0.005	2.02	0.98
case-a12	0.05	2	400	0.023	2.37	1.05
case-a13	0.02	1	800	0.019	1.21	1.00
case-a14	0.02	2	800	0.038	2.59	1.07

(b) 碎波条件

case-n	s	$H_0(\text{m})$	$T_0(\text{s})$	$\xi$	$R_{cal}(\text{m})$	$R_{cal}/R_{Hunt}$
case-b1	0.1	1	15	1.87	1.40	0.75
case-b2	0.1	1	5	0.62	0.31	0.49
case-b3	0.1	2	15	1.33	1.81	0.68
case-b4	0.1	2	5	0.44	0.53	0.60
case-b5	0.1	4	15	0.94	2.24	0.60
case-b6	0.1	4	5	0.31	0.74	0.59
case-b7	0.1	6	15	0.77	2.78	0.60
case-b8	0.1	8	15	0.66	3.35	0.63
case-b9	0.05	1	15	0.94	0.58	0.61
case-b10	0.05	1	5	0.31	0.22	0.72
case-b11	0.05	2	15	0.66	0.94	0.71
case-b12	0.05	2	5	0.22	0.41	0.92
case-b13	0.05	4	15	0.47	1.52	0.81
case-b14	0.05	4	5	0.16	0.65	1.04
case-b15	0.05	6	15	0.38	2.00	0.87
case-b16	0.05	8	15	0.33	2.51	0.95
case-b17	0.02	1	15	0.37	0.41	1.10
case-b18	0.02	1	5	0.12	0.20	1.60
case-b19	0.02	2	15	0.27	0.72	1.35
case-b20	0.02	4	15	0.19	1.22	1.63
case-b21	0.02	6	15	0.15	1.69	1.84
case-b22	0.02	8	15	0.13	2.07	1.95

せのうち,  $a_0/a_m < 0.1$  の場合を与えた. 碎波の計算条件としては, 海岸で実際に観測される波浪条件を想定し,  $s$  (0.1, 0.05, 0.02),  $H_0$  (1m, 2m, 4m, 6m, 8m),  $T$  (5s, 15s) の組み合わせのうち,  $0.1 < \xi < 2.3$  の場合を与えた.

非碎波条件である case-a4 での数値解と CG 解との波面

包絡線の比較を図-3に、砕波条件である case-b5 および b13 での空間波形、平均海面変化および波面包絡線の計算結果を図-4、5にそれぞれ示す。η は初期水面（静水面）を基準とした水位を、x は初期汀線を基準とした岸沖方向距離を示す。CG 解を求める際の沖側境界での振幅は数値解の振幅と一致するように与えた。数値解の空間波形は CG 解とほぼ一致した。砕波の場合には、砕波後の波は減衰し、平均海面は岸へ近づくにつれて上昇した。また、勾配が緩やかなケースほど遡上高は小さかった。図-5では波峰に起伏がみられるが、これは岸からの反射波の影響によるものと考えられる。以上のように、空間波形、平均海面変化および波面包絡線については既存の知見と同様の特性を再現可能であった。

次に、遡上高 R について検証する。波先端水位の計算結果を case-b5 について図-6に例示する。入射波の sin θ が 0 となる時刻を t = 0 とする。R の計算値は波先端の水位 η が定常に達したときの値とした。図-7に非砕波の場合の R<sub>cal</sub> と R<sub>shuto</sub>、および砕波の場合の R<sub>cal</sub> と R<sub>Hunt</sub> の比較を示す。非砕波の場合には、R<sub>cal</sub> と R<sub>shuto</sub> はほぼ一致した。このことは、本計算方法により算定される波の先端の推定精度が極めて高いことを示す。

砕波の場合には、R<sub>cal</sub> と R<sub>Hunt</sub> は概ね比例関係にあった。s = 0.05 の場合に、R<sub>cal</sub> と R<sub>Hunt</sub> は概ね一致し、また同じ砂浜勾配において比例する結果が得られたものの、s = 0.1 の場合、R<sub>cal</sub> は R<sub>Hunt</sub> と比べて全体的に過小評価となり、s

= 0.02 の場合は全体的に過大評価となった。

非砕波の場合に、R<sub>cal</sub> と R<sub>shuto</sub> がいずれの砂浜勾配の場合にも概ね一致したことを考慮すると、砕波条件において砂浜勾配により異なる結果が得られた原因は、境界条件である砕波点の判定法によるものと考えられる。砕波点は合田式により判定したが、この式は経験式であり 10% 程度の誤差を含むことが報告されている。また、先に述べたように Hunt 式にも条件によっては数 10% の誤差が含まれる。合田の式と Hunt 式はいずれも砂浜勾配 s を変数に持つため、これらがそれぞれ R<sub>cal</sub> と R<sub>Hunt</sub> に誤差を与えた可能性がある。

以上のように、砕波の計算条件の場合に、有働ら (2008) と同様に簡便な手法を用いて沖から砕波点までの計算を行ったため、今後の課題として分散性を考慮する必要があるものの、高い近似度を有する波の先端の新たな計算手法が提案された。

4. 結論

遡上する波の先端を理論的に高い近似度で解く、Godunov Scheme を用いた新しい計算方法が提案された。計算結果から、非砕波の場合（長波）には数値解による遡上高は首藤の理論式により算定される遡上高と一致した。

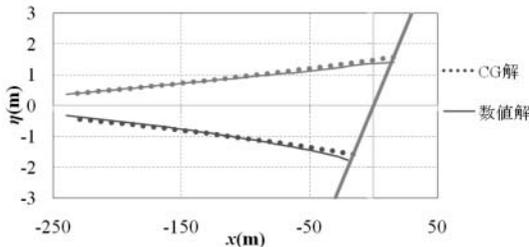


図-3 case-a4 での数値解と CG 解との波面包絡線の比較

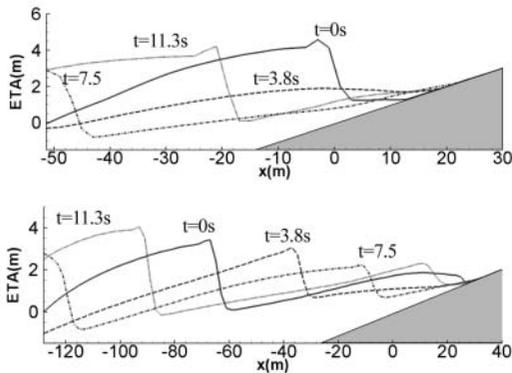


図-4 (a) case-b5 および (b) case-b13 の砕波点から岸までの空間波形

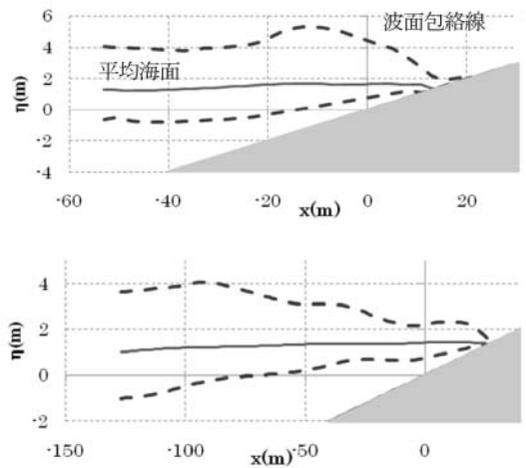


図-5 (a) case-b5 および (b) case-b13 の砕波点から岸までの平均海面（破線）および波面包絡線（実線）

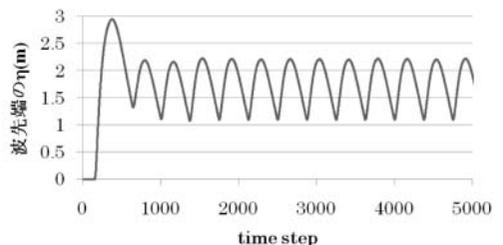


図-6 case-b5 の波先端の水位 η の経時変化

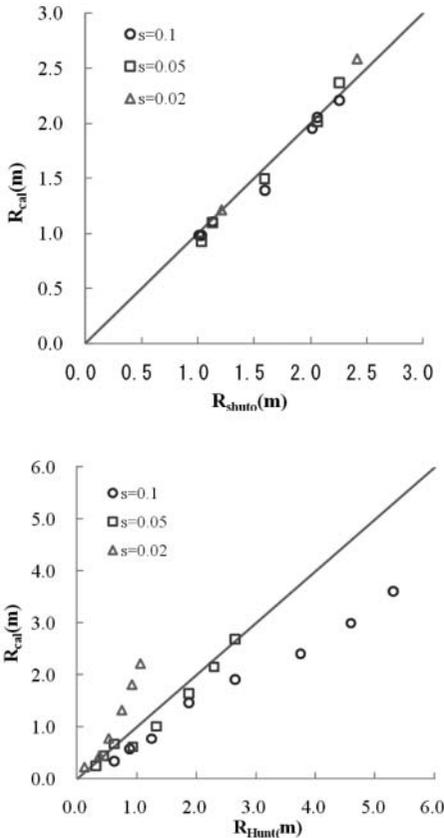


図-7 (a) 非碎波の場合の  $R_{cal}$  と  $R_{shuto}$ , (b) 碎波の場合の  $R_{cal}$  と  $R_{hunt}$  との比較

碎波の場合には、数値解による遡上高と Hunt の実験式による遡上高は概ね比例関係にあり、砂浜勾配  $s = 0.05$  では数値解による遡上高は Hunt 式による遡上高を再現したもの、 $s=0.1$  の場合には過小評価、 $s=0.02$  の場合には過

大評価となった。今後、碎波点における境界条件の与え方についての見直しや今回無視した分散性の考慮方法に関する検討が必要とされる。

参考文献

稲垣健志, 有働恵子, 真野 明 (2009) : 波の遡上位置の推定に関する研究, 東北地域災害科学研究, 第45巻, pp.187-192.  
 岩崎敏夫, 真野 明, 荒井 唯, 吉田行伸 (1982) : 引波を含む津波の一次元遡上に関する実験的研究, 第29回海岸工学講演会論文集, pp.80-84.  
 有働恵子, 田辺博規, 真野 明 (2008) : 茨城県青塚海岸における荒天時の底質粗粒化機構に関する研究, 海岸工学論文集, 第55巻, pp.706-710.  
 梶浦欣二郎 (1977) : 浅海での津波予測法の研究, 文部省科学研究費自然災害特別研究成果, No. A-52-2, pp.115-123.  
 合田良美 (1973) : 防波堤の設計波圧に関する研究, 港研報告, 第12巻, 第3号, pp.31-69.  
 Briganti, R. and N. Dodd(2009) : Shoreline motion in nonlinear shallow coastal modeks, Coastal Engineering, Vol. 56, pp. 495-505.  
 Carrier, G. F. and H. P. Greenspan(1958) : Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid Mech., Vol. 4, pp. 97-109.  
 Godunov, S. K. (1959) : A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations, Math. Sbornik, Vol. 47, pp. 271-306.  
 Hunt, I. A., Jr.(1959) : Design of seawalls and breakwaters, Jour. Of the Waterways and Harbors Division, Proc. Of ASCE, Vol. 85, pp.123-152.  
 Kennedy, A. B., Q. Chen, J. T. Kirby and R. A. Dalrymple(2000) : Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I:1D, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 36, pp.39-47.  
 LeVeque, R. J. (1990) : Numerical methods for conservation laws, Birkhauser Verlag, p.214.  
 Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart(1962) : Radiation stress and mass transport in surface gravity waves with application to 'surf beats.' Journal of Fluid Mechanics, Vol.13, pp.481-504.  
 Mano A. (1994) : Boundary layer developed near surging front, Coastal Engineering in Japan, 37(1), pp.23-40.  
 Shuto, N.(1972) : Standing waves in front of a sloping dike, Coastal Engineering in Japan, Vol. 15, pp.13-23.