

# IB法による自由液面流れの数値計算

## Numerical Calculation of Free-surface Flow using Immersed Boundary Method

石原修二<sup>1</sup>

Shuji ISHIHARA

In this paper, a direct extension of the multi-directional ghost-cell immersed boundary method to free-surface flow was proposed. This method allow us to represent a sharp interface with appropriate boundary condition. The numerical method is based on a finite-volume approach on a collocated Cartesian grid together with a implicit HSMAC method for coupling of velocity, pressure and free-surface elevation. A series of numerical experiments have been conducted to verify the accuracy of this method. Good agreements are obtained when numerical results are compared to available analytical, experimental, and other numerical results.

### 1. はじめに

ここ数年、複雑な境界をもつ流れを構造格子で計算する方法として、Immersed Boundary (IB)法への注目度が高まっている。その手法は年々と改良がなされるとともに適用範囲が拡がりつつある。海岸工学の分野では、たとえば沿岸流の計算 (Tsengら, 2005) や浮体の波浪応答計算 (李ら, 2008) などの研究が報告され、その有効性が示された。しかしながら、それらの計算では、IB法の適用は固体面に限られ、自由液面はVOF法などで取り扱われていた。IB法を固体面のみならず自由液面にも応用できれば、界面をより鮮明に表現できるので計算精度の向上が望める。加えて界面の向きを考慮できるので、界面において適切な応力条件を課すことも容易である。さらに、質量保存則を満たす液面境界条件を容易に課すことができ、このことは数値安定性を高めると考えられる。本研究の目的は、固体および自由液面に対して直接的にIB法を適用する手法を提案し、基礎的な計算を通してその有効性を検証することである。

### 2. 数値計算法

自由液面と移動する固体を含む非圧縮性の粘性流体を対象とする。固体の形状と移動の仕方は任意であるが、自由液面は簡単のため、一価関数で記述できるものとし、さらに碎波などが起こらない層流を想定した。以下、基礎式とその有限体積法による離散化手法を概説した後、固体面に適用するゴーストセルIB法を説明し、つづいてIB法の自由液面への応用方法を提案する。

#### (1) 基礎式と離散化

体積  $V$  と表面積  $S$  をもつ検査体積を考えたとき、流速ベクトル  $\mathbf{u}$  と圧力  $p$  は次に示すナビエ・ストークス方程

式の積分形で記述できる。

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial t} \, dV = \int_V \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \right) \, dV \dots\dots\dots (2)$$

$$+ \oint_S (-u_i \mathbf{u} + \nu \nabla u_i) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

ここで、下付の添字  $i (=1,2,3)$  はデカルト座標の方向成分を、 $\mathbf{n}$  は検査体積表面から外向きを指し示す単位法線ベクトルを意味する。 $g_i$  は重力加速度ベクトル、 $\nu$  は動粘性係数である。式 (1) と式 (2) はデカルト座標系の直交格子上で離散化し、主な変数を計算セルの中心点に集中配置 (コロケート配置) する。基本解法は予測・修正子法の一つである陰的HSMAC法 (牛島ら, 2001) を採用する。

予測段階では、移流項と拡散項にクランク・ニコルソン法を適用して予測流速  $\mathbf{u}^*$  を求める。ある一つの計算セルについての離散化式をつぎに示す。

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} \Delta V = \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p^n}{\delta x_i} + g_i \right) \Delta V$$

$$+ \sum_f \left( -\frac{u_i^* + u_i^n}{2} U_f^n + \nu \nabla \frac{u_i^* + u_i^n}{2} \cdot \mathbf{n}_f \right) \Delta S_f \dots\dots\dots (3)$$

ただし上つきの添字  $n$  は時間ステップ数を、下つきの添字  $f$  は計算セルの面を意味する。 $\Delta t$  は時間刻み幅、 $\Delta V$  は計算セルの体積、 $\Delta S$  はセル面の面積である。また、 $U (= \mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$  は計算セル面を通過する流体の速度であり、1時間ステップ内において変化しない変数として扱う。そして  $\delta/\delta x_i$  ならびにこの式における  $\Delta$  は中央差分の演算子を表す。全ての計算セルについて式 (3) を立てて連立させると、 $\mathbf{u}^*$  に関する線形代数方程式が得られ、これをSIP法 (Stone, 1968) により解が収束するまで反復計算する。

修正段階では、流速と圧力の反復過程に水面変位の補正計算も含める。まず初めに、計算セル中心で定義され

1 正会員 修(工) (株)電力計算センター 流体系解析部

る変数の初期値は前時刻  $n$  の値とする。ただし、計算セル面の流速は次のように与えておく。

$$U_f^{k=0} = \tilde{U}_f - \frac{\Delta t}{\rho} (\mathbf{n}_f \cdot \nabla p^n)_{fc} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\tilde{u}_i = u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{\delta p^n}{\delta x_i} \right)_{cc} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、下付きの添字  $cc$  は計算セルの中心、また  $fc$  は計算セル面の中心で定義される値を意味する。 $\tilde{U}$  は隣接する計算セルの  $\tilde{u}$  から線形補間により求める。以下、 $k$  回めの反復計算過程を書き下す。

$$\frac{1}{\rho} \sum_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f \Delta S_f = \frac{1}{\Delta t} \sum_f U_f^k \Delta S_f \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$p^{k+1} = p^k + \phi \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{\delta \phi}{\delta x_i} \right)_{cc} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$U_f^{k+1} = U_f^k - \frac{\Delta t}{\rho} (\mathbf{n}_f \cdot \nabla \phi)_{fc} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \Delta \eta^k \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし式 (10) の  $\eta$  は水面変動であり水平方向座標  $x, y$  の一価関数とし、その補正量  $\Delta \eta$  の計算方法は後の節 2. (3) で説明する。 $k = 0$  において、圧力の補正量  $\phi$  に対するポアソン方程式 (6) の右辺に式 (4) を用いることで、流速と圧力の結合が強められて空間振動を抑制できる。式 (6) は SIP 法で緩和させるが、ここでは必ずしも収束解を得る必要はなく、右辺の絶対値が収束の判定基準  $D^*$  を下回るまで上記の反復計算を行う。これにより、 $u_i$  と  $p$  および  $\eta$  の収束の度合は  $D^*$  によって制御できる。

(2) 固体面に与える境界条件

静止または移動する固体の表面に課す境界条件は、Mittalら (2008) が提案した多方向ゴーストセルIB法を用いて与える。ここにその手法の概略をまとめておく。

まず、固体と流体との境界面を三角形要素からなる集合として表現しておく。そして流体セルと固体セルとを分別し、流体セルに隣接する固体セルを見出し、これをゴーストセル (GC) と呼ぶ。つぎに、ゴーストセルの中心点から最短距離にある三角形を検索し、この三角形についてゴーストセル中心点と鏡像対称にある点 (鏡像点; IP) の位置を計算する。このとき鏡像点とゴーストセル中心点とを結ぶ線分は、三角形に対して垂直となり、さらに線分の中点は、ちょうど線分が固体境界面を貫通する位置 (境界点; BI) となる。

ディリクレ型とノイマン型の境界条件は、物理量が法線方向に線形分布すると仮定して、次のように与える。

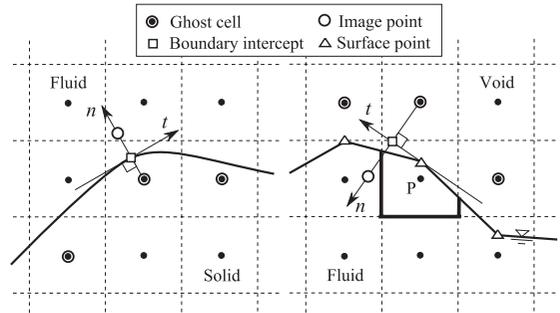


図-1 ゴーストセルIB法の概念図

$$\psi_{GC} = 2\psi_{BI} - \psi_{IP} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\psi_{GC} = \psi_{IP} - \delta l \Psi_{BC} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\psi_{BI}$  と  $\Psi_{BC}$  はそれぞれ壁面で与える物理量と法線方向の勾配値であり、 $\delta l$  はゴーストセル中心点と鏡像点との間の距離である。また IP は鏡像点での物理量を意味し、鏡像点を囲む 8 個 (二次元では 4 個) のセル中心量から三重線補間によって求める。その結果、 $\psi_{IP}$  は近傍にある 8 個 (4 個) の物理量  $\psi_j$  の線形和で表される。

$$\psi_{IP} = \sum_{j=1}^8 \beta_j \psi_j \quad \dots\dots\dots (13)$$

係数  $\beta_j$  の具体的な求め方は Mittalら (2008) を参照されたい。式 (11) を用いて移動する固体面に対する滑りなし条件を課すことができ、また式 (12) を用いると、移動する固体面に対する圧力の境界条件、

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{du}{dt} \cdot \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (14)$$

を課すことができる。式 (14) の右辺は、固体面に作用する力の法線方向成分であり、固体が加速度運動するときのみ値を持つ。

(3) 自由液面の計算

まず、水面変位の補正式 (10) における補正量の計算方法を説明する。水面直下にあるセル P (図-1 の右側を参照) について離散化した連続式をたてて、補正量  $\Delta \eta$  を次のように見積もる。

$$\Delta \eta^k = \frac{\Delta t}{\Delta S_b} \sum_f U'_f \Delta S'_f \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし  $\Delta S_b$  は計算セル底面の面積を表す。この式において、下付きの添字  $f$  はセルの側面と下面 (図中、太線で示した面) のみを指し示しており、上面は考慮しない。 $U'$  は、 $k = 0$  では式 (4) により求めた  $U^{k=0}$  とし、 $k > 0$  では式 (9) の右辺第二項の値とする。 $\Delta S'_f$  はセル面  $f$  の面積を意味するが、側面については水面高さを考慮する。たと

えば、セルPと東側に隣接したセルEとの境界で定義される面積 $\Delta S'_e$ は、

$$\Delta S'_e = \max[0, \min\{(\eta_P + \eta_E)/2, z_t\} - z_b] \quad \dots\dots (16)$$

と算定する。ただし $z_b$ と $z_t$ はセルPの下面と上面の高さである。他の側面の面積についてもこれと同様に計算する。

ここに述べた水面変位の求め方では、修正段階の反復計算が十分収束して式(6)の右辺が十分小さくなると、水面近傍を含んだ局所的かつ大域的に質量保存則を満たすようになる。また附言すると、式(15)の評価において、連続式をたてる領域を水面直下のセルから水底面直上のセルまで延長することで、収束の度合に関わらず大域的な質量保存則を満たすことができる。しかしながらこの方法は、液面下に移動固体などが存在する場合、水底面直上のセルの処理が繁雑となるために注意を要する。

つぎに液面を与える応力条件を考える。気液界面において、気体側の応力は液体側のそれに比べて小さく、無視できるものとし、また、気体側の表面圧力をゼロとおく。液面上で定義される単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ 、液面に接し互いに直交な単位接ベクトルを $\mathbf{t}$ と $\mathbf{s}$ とすると、液面流速ベクトル $\mathbf{u}_{sf}$ はつぎのように分解できる。

$$\mathbf{u}_{sf} = \mathbf{n}u_n + \mathbf{t}u_t + \mathbf{s}u_s \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{sf}$ 、 $u_t = \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_{sf}$ 、 $u_s = \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}_{sf}$ 。また液体側の界面圧力を $p_{sf}$ と表記すると、液面で成り立つ応力条件は次式のように表される。

$$-p_{sf} + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} = \sigma \kappa \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\mu \left( \frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\mu \left( \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $\mu$ と $\sigma$ は液体の粘性係数および表面張力係数であり、 $\kappa$ は液面の曲率を表す。

デカルト座標系で定式化する場合、応力条件式(18)~(20)を直接的に満足させることは容易ではない。ここではWatanabeら(2008)にならい、式(18)と他の二式とを分けて考える。すなわち、式(18)は式(11)を用いて圧力方程式に対するディリクレ型境界条件として直接的に与え、式(19)と式(20)は流速の境界条件に反映させる(ゼロ剪断応力条件)。式(19)と式(20)それぞれに $\mathbf{t}$ および $\mathbf{s}$ を乗じた式の和をとると、接流速ベクトル $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{t}u_t + \mathbf{s}u_s$ についての式、

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial n} = -\mathbf{t} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \mathbf{s} \frac{\partial u_n}{\partial s} \quad \dots\dots\dots (21)$$

を得る。式(21)をデカルト座標系の各方向成分に分解し、予測流速を計算する式(3)の境界条件として適用する。そ

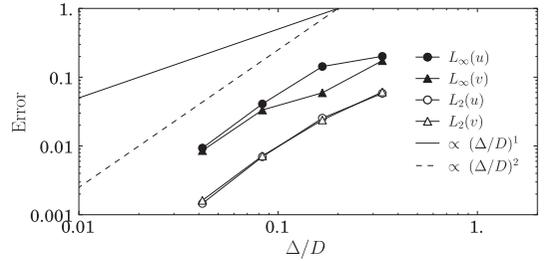


図-2 空間誤差の格子解像度依存性

の際、左辺を陰的に、また右辺を陽的に取り扱うことで、ノイマン型の境界条件を課すための式(12)が利用できる。

### 3. 検証計算

提案した手法の基礎的な検証を目的とし、比較的単純な4種類のケースを実施した。はじめに、格子解像度に対する空間誤差の依存性をみるために、静止した円筒まわりの粘性流の計算を行い、ついで移動固体に課す境界条件の適用性を確認するために、線形振動する円筒まわりの粘性流の計算を実施した。そして、IB法の自由液面への適用性を調べるために静振波の計算を行った。最後に、移動固体と自由液面とが共存するケースの例として、隆起床により発生・伝播する水面波を取りあげた。

#### (1) 空間解像度に対する誤差の収束性

正方形の閉区間に直径 $D$ の円筒を中心部に配置し、その周辺に満たされた粘性流体が下面のスライドによって起きる流れを考える。境界条件として全ての壁面には滑りなし条件を課し、円筒直径とスライド速度および動粘性係数とで定義されるRe数は40とした。計算格子は等間隔格子とし、5種類の異なる格子解像度を用意して、それぞれについて流れ場が定常状態に達するまで計算を実施した。最も高い解像度の結果を真値とみなし、それとその他の解像度の結果との差をとり、 $L_2$ ノルムと $L_\infty$ ノルムを評価した(図-2)。格子幅( $\Delta$ )がある程度小さく( $0.1 < \Delta/D$ )なると、各流速成分の誤差は両ノルムとも格子幅の2乗に比例し、空間について2次の精度を持つことが確認できた。

#### (2) 振動する円筒まわりの粘性流

Dütschら(1998)によって実験がなされた、直線上を正弦振動する円筒まわりの粘性流を計算した。取りあげたケースの条件は、振動振幅と動粘性係数とで定義されるKC数が5、最大移動速度 $U_{max}$ と円筒直径 $D$ および動粘性係数とから決まるRe数が100である。計算格子は最小格子幅を $0.025D$ とする不等間隔格子とした。図-3上段に計算で得られた瞬時の圧力分布を示す。この図から流体セルの発生・消滅時に滑らかな流況場を再現できていることが判り、また、境界適合格子を使った計算結果(Dütschら(1998)の258頁上段左図)と合致していることが視認で

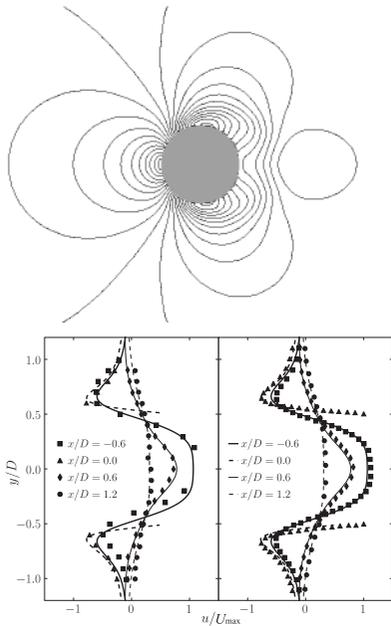


図-3 線形振動する円筒まわりの流れ(上図: 圧力の等値線図, 線の間隔は0.1無次元量。下図: 振動方向流速の垂直方向分布, 実線は本計算値, 左図のシンボルは実験値, 右図のシンボルは境界適合格子による計算結果)

きる。図-3下段は、上段に示した圧力分布図と同時刻における流速分布を、実験値ならびに境界適合格子による計算値と比較した図である。得られた計算結果と実験結果を比べたとき、一部の断面 ( $x = -0.6D$ ) において不一致がみられるものの、それ以外の個所ではよく一致した。また、境界適合格子による計算結果とは全般的に極めて良く一致した。

(3) 静振波

平均水深  $h_0=1m$  の水槽に初期の水面変位を

$$\eta_0(x) = a \cos \{k(x + \lambda/2)\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

と与えたときに起きる静振波を計算対象とする。ここで、波長  $\lambda = 2m$ , 波数  $k = 2\pi/\lambda$ 。計算は2種類の振幅  $a = h_0/100$  (微小振幅ケース) および  $a = h_0/10$  (有限振幅ケース) について行った。また、水槽の長さは波長に等しくし、重力加速度係数  $g$  は  $1m/s^2$  とした。両ケースとも、水平方向については幅  $0.05m$  の等間隔格子とし、鉛直方向は最小格子幅を  $0.02m$  とする  $30$  個の不等間隔格子とし、また収束の判定規準  $D^*$  を  $10^{-10}$  とした。水槽中央部における水面変動は、振幅・水深比に関して二次までの摂動解として次式で与えられる (Wu・Taylor, 1994)。

$$\eta_{center}(t) = -a \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{8g} \left[ 2(\omega_2 a)^2 \cos(2\omega_2 t) + \frac{a^2}{\omega_2^2} \{ k_2^2 g^2 + \omega_2^4 - (k_2^2 g^2 + 3\omega_2^4) \cos(\omega_4 t) \} \right] \quad \dots(23)$$

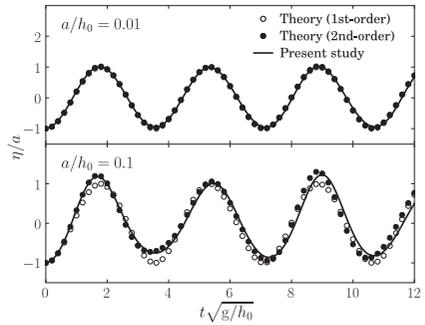


図-4 静振波

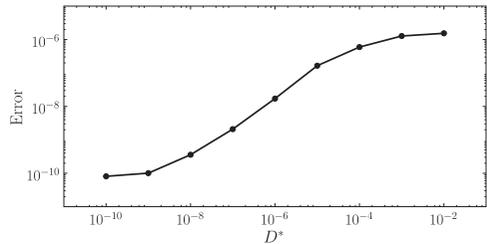


図-5 質量保存性と収束性の関係 (Errorは質量保存誤差を、 $D^*$ は収束誤差のしきい値を表す)

ここに、 $k_m = m\pi/\lambda$ ,  $\omega_m = \sqrt{k_m g \tanh(k_m h)}$  であり、右辺第一項は一次摂動解である。

図-4に水面変位  $\eta$  の時間変化をプロットする。解が線形的に振る舞う微小振幅ケースでは、計算値と摂動解とは極めて良く一致した。また有限振幅ケースでは、水面が鉛直格子を  $10$  個ほど跨いでいるが、滑らかな時間変動が再現できており、非線形効果も良く捉えられている。

ここで、流速-圧力-水面変位の反復過程が質量保存性に及ぼす影響を見ておく。 $D^*$ を変えた有限振幅ケースを実施し、大域的な質量保存に関わる誤差、

$$\text{Error} \equiv \langle \eta(x; t) \rangle^{x,t} - \langle \eta(x; t = 0) \rangle^x \quad \dots\dots\dots(24)$$

を評価した。ただし  $\langle \cdot \rangle^{x,t}$  は時空間平均量を、 $\langle \cdot \rangle^x$  は空間平均量を表している。図-5に  $D^*$  に対する誤差をプロットした。誤差は、 $D^*$  に対して滑らかに単調増加しており、また、 $10^9 < D^* < 10^{11}$  においては  $D^*$  に比例することが認められる。

(4) 隆起床により発生・伝播する水面波

Hammack・Segur (1974) によって実施された実験のケース (図-6を参照) を取りあげた。長さ  $31.6m$ , 幅  $0.394m$ , 平均水深 ( $h_0$ )  $0.05m$  の水槽の底に、側壁に接した長さ (b)  $0.61m$  のピストンを設け、その上昇によって孤立波を造波し伝播させる。ピストンは初期にその天端位置を水槽床に合わせておき、1秒間に  $0.01m$  上昇させる。参照した論文にはピストンの具体的な上昇のさせ方が明記されていないため、論文の Figure.6 からデジタイズにより

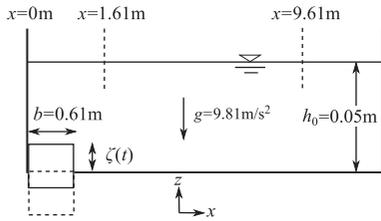


図-6 Hammack・Segur (1974) の実験概要(左下のピストンを上昇させて造波)

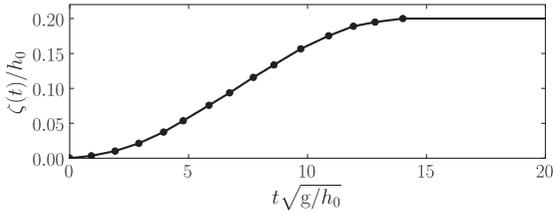


図-7 隆起床変動(黒丸はデジタイズした点)

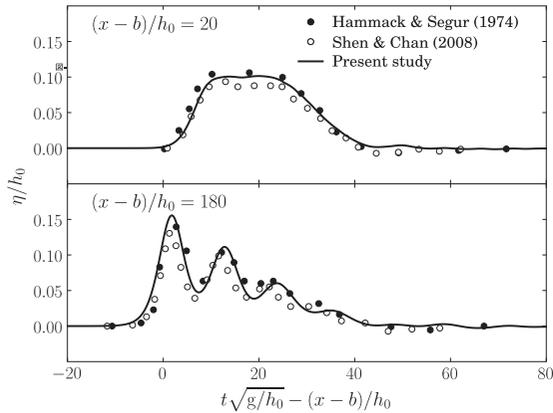


図-8 水面変動(上図は波源近傍(x=1.61m), 下図は波源遠方(x=9.61m)の位置にあたる)

数値データを作成した(図-7を参照)。水の物性値は、密度  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、動粘性係数  $\nu = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ 、表面張力係数  $\sigma = 0.073 \text{ N/m}$  と与えた。計算格子はピストン周辺と水面付近に集中させた不等間隔格子とし、最小格子幅は水平方向および鉛直方向それぞれに、 $\Delta x_{\min} = 0.02 \text{ m}$ 、 $\Delta z_{\min} = 0.0005 \text{ m}$ 、また格子数はそれぞれ、 $N_x = 635$ 、 $N_z = 70$  とした。格子配置の目安として、分裂波の波長と振幅それぞれに約20個および約10個を配することとした。時間刻み幅  $\Delta t$  は0.01s、収束の判定基準  $D^*$  を  $10^{-10}$  とした。

波源近傍 ( $x = 1.61 \text{ m}$ ) ならびに波源遠方 ( $x = 9.61 \text{ m}$ ) における水面変位の経時変化を、計算値と実験値についてプロットした(図-8)。波源近傍における波の形成過程において、波の立上りに遅れがみられるが、最大波高がピストン上昇幅の約1/2になるという特性を良好に再現できている。波源遠方の波形に注目すると、計算結果の波形は実験結果に比べて波数分散性が若干強くでているもの

の、全体の波形形状ならびに分裂した孤立波の個数(実験、計算ともに3個が視認できる)は一致した。

併せて Shen・Chan (2008) が実施した IB-VOF 法による計算結果とも比較した。彼らの計算では、固体表面は IB 法で処理され、液面計算は VOF 法で行われた。また高解像度の計算格子 ( $\Delta x_{\min} = 0.001 \text{ m}$ 、 $\Delta z_{\min} = 0.0002 \text{ m}$ 、 $N_x = 1645$ 、 $N_z = 169$ ) が用いられている。一方で、本計算の結果は比較的粗い格子を使ったにも関わらず、同程度の計算結果が得られた。その主な要因として、本研究で提案した手法は、自由液面に IB 法を適用することでより鮮明な界面の表現が可能であること、また、式(14)に示したように上昇するピストンの加速度を圧力条件に反映させたことが挙げられる。

#### 4. おわりに

多方向ゴーストセル IB 法を、直接的に自由液面に応用する計算手法を提案した。本手法は自由液面を鮮明に表現することができ、同時に、複雑かつ移動する固体境界を含む流れに適用できる。4種の基礎的なケースの計算を実施して、それらの結果が既存の実験ならびに計算結果と良く一致することを確認した。

#### 参考文献

- 牛島 省, 禰津家久(2002): 陰解法を用いたコロケート格子による高次精度の流体解析手法の提案, 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp.21-30.
- 李 光浩, 水谷法美, 後藤政雄(2008): IB法による緊張係留浮体の波浪応答に関する有限変位解析, 海岸工学論文集, 第55巻, pp.891-895.
- Dütsch, H., F. Durst, S. Becker and H. Lienhart (1998): Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers, J. Fluid Mech., Vol.360, pp.249-271.
- Hammack, J.L. and H. Segur (1974): The KdV equation and water waves. Part 2. Comparison with experiment, J. Fluid. Mech., Vol.65, pp.289-314.
- Mittal, R., H. Dong, M. Bozkurtas, F.M. Najjar, A. Vargas and A. von Loebbecke (2008): A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries, J. Comp. Phys., Vol.227, pp.4825-4852.
- Shen, L. and E.S. Chan (2008): Numerical simulation of fluid-structure interaction using a combined volume of fluid and immersed boundary method, Ocean Eng., Vol. 35, pp.939-952.
- Stone, H.L. (1968): Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations, SIAM J. Num. Anal., Vol.5, pp.530-558.
- Tseng, Y.H., D.E. Dietrich and J.H. Ferziger (2005): Regional circulation of the Monterey Bay region: Hydrostatic versus non-hydrostatic modeling, J. Geophys. Res., Vol.110, pp.1-21.
- Watanabe, Y., A. Saruwatari and D.M. Ingram (2008): Free-surface flows under impacting droplets, J. Comp. Phys., Vol.227, pp.2344-2365.
- Wu, G.X. and R. Eatock Taylor (1994): Finite element analysis of two-dimensional non-linear transient water waves, Appl. Ocean Res., Vol.16, pp.363-372.