土木学会論文集B2（海岸工学）
Vol. B2-65，No.1，2009，006-010

ジェットト下の気泡混入・輸送過程の確率モデル

Stochastic Models of Entranment and Advection of Air Bubbles under Jets

渡部靖憲[1]・新井田靖郎[2]・猿渡亜由未[3]・佐伯　浩[4]

Yasunori WATANABE, Yasuo NIIDA, Ayumi SARUWATARI and Hiroshi SAEKI

Two-way stochastic subgrid bubble models to determine the number density and sizes of small air-bubbles entrained under circular jets and the advetion and diffusion process for Large Eddy Simulation (LES) are proposed in this paper.The proposing model has been applied to two simple air-water two phase flows — the bubble flow in still water as well as the aerated flow under circular jet flowing into still water.It was found that the bubble motion intensifies the turbulence, which enhances fluctuating bubble motion. This air-water energy tranfer via turbulent interaction is important factor to determine the near-surface fluid dynamics.

1. はじめに

乱流中の混入気泡はその輸送拡散過程を通して乱流強度及び流況を変化させ，それらは気泡のサイズ及び個数に大きく依存する（例えばLance・Bataille,1991）．砕波帯において発生する大量の気泡は，同様な乱流強化の誘発や力学的応答の修正を経由した砂輸送や海岸構造物との作用など工学的問題から，沿岸生態系を維持する海域への気体輸送や沿岸気象と関連する再曝気を通したエアロゾル生成に至る多様な問題と関連するため，その生成から運動過程について近年研究が行われてきた（例えばDeane・Stokes,2002）．しかしながら，砕波ジェット突入時に発生する大量の気泡は10-1000μmスケール程度と極めて微小であり，その計測及び計算は現在でも困難であり，気泡混入に伴う沿岸物理環境への定量的な影響は不明である．

本研究は，この大量の微細混入気泡の運動を確率微分方程式により記述し，サブグリッド気泡群に対するLarge Eddy Simulation（LES）へのtwo-wayフルカップリングモデルを提案すると共に，ジェット下における気泡群の生成混入数値モデルを提案するものである．これらの数値モデルにより再現した基礎的エアレーション過程による定量的相似性から砕波帯について議論するものである．

2. 確率サブグリッド気泡モデル

（1）乱流中の気泡ー流体運動two-way確率モデル

低粒子数密度の流れ場に対して運動方程式は，以下のように書くことができる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})+g_i-\frac{1}{\rho_f}Q_i^H \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで，u_i，t，x_iはそれぞれ流速，時間，位置，ρ_fは流体の密度，νは動粘性係数，g_iは重力加速度を表す．

粒子による力Q_i^Hは，粒子内で1，流体内で0を示すヘビサイド関数$H(x_i^p)$を用いて次の様に表して良い．

$$Q_i^H = H(x_i^p)Q_i \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式（1）をトップハットフィルターでフィルタリングすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i})+g_i \\ &- \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_f}\overline{Q_i}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}$$

ここで，粒子数Nを含むグリッド中の平均粒子作用力は

$$\overline{Q_i} = \frac{1}{\Delta^3}\sum_{n=0}^{N}\frac{\pi}{6}d_n^3 Q_i^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

であり，τ_{ij}はSG応力，Δはグリッド間隔，d_nは粒子径である．

また，SGS乱れエネルギー$q_{sgs}=\frac{1}{2}(\overline{u_i u_i}-\overline{u_i}\cdot\overline{u_i})\equiv\frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$を定義し，式（1）と式（3）より，Yoshizawa・Horiuti（1985）と同様にモデル化を行うと，次の粒子混在下のSGS乱れエネルギー輸送方程式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_{sgs}}{\partial t} &+ \frac{\partial q_{sgs}\overline{u_j}}{\partial x_j} = -\tau_{ij}(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i})-\epsilon \\ &+ c_{kk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\sqrt{q_{sgs}}\frac{\partial q_{sgs}}{\partial x_j})+\nu\frac{\partial^2 q_{sgs}}{\partial x_j \partial x_j} \\ &- \frac{1}{\rho_f}(\overline{u_i Q_i^H}-\overline{u_i}\overline{Q_i}), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)\end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon=c_\varepsilon q_{sgs}^{3/2}/\Delta$, c_{kk}及びc_εは定数である．

Basset-Bousinesq-Oseen（BBO）式をベースとすると，粒子位置x_i^pにおける微小球形粒子の運動は次のように述できる．

---

1 正会員　博(工)　北海道大学准教授大学院工学研究科
2 学生会員　　　　北海道大学大学院工学研究科
3 正会員　博(工)　北海道大学助教大学院工学研究科
4 フェロー　工博　北海道大学総長

$$\frac{dx_i^p}{dt} = u_i^p, \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\frac{du_i^p}{dt} = \frac{u_i^s - u_i^p}{\tau_p} + \frac{\rho_f}{\rho_p}\frac{Du_i^s}{Dt} + \frac{C_a}{2}\frac{\rho_f}{\rho_p}(\frac{du_i^s}{dt} - \frac{du_i^p}{dt}) + (1 - \frac{\rho_f}{\rho_p})g_i \quad \cdots\cdots (7)$$

ここで，u^s, u^pは，粒子位置（seen fluid）での瞬時流速と粒子速度，C_aは付加質量係数である．式（7）についてu^sは，LESでは与えられないので，Langevin方程式によって記述していく．式（7）を微小時間ステップ上の増分として表し整理すると

$$dx_i^p = u_i^p dt, \quad \cdots\cdots (8)$$

$$du_i^p = \frac{u_i^s - u_i^p}{\tau_p^m}dt + a g_i dt + b du_i^s \quad \cdots\cdots (9)$$

ここで，$\tau_p^m = (1 + \frac{1}{2}C_a\frac{\rho_f}{\rho_p})\tau_p$, $a = \frac{2(\rho_p - \rho_f)}{2\rho_p + C_a\rho_f}$, $b = \frac{(2 + C_a)\rho_f}{2\rho_p + C_a\rho_f}$. なお，$\rho_p$は粒子の密度である．crossing trajectory effect（Csanady, 1963）を考慮した一般化されたu^sのLangevin方程式は

$$\begin{aligned} du_i^s &= -\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}dt + (\langle u_i^p\rangle - \langle u_i^f\rangle)\frac{\partial\langle u_i^f\rangle}{\partial x_j}dt \\ &- \frac{u_i'^s}{T_L^*}dt + B_i dW_i + g_i dt \quad \cdots\cdots (10) \end{aligned}$$

上式右辺第4項はWienner拡散過程を表す．ここで，T_L^*は，crossing tranjectory effectによって修正されたラグランジアン時間スケールT_Lであり（Csanady, 1963），

$$T_L^* = \begin{cases} \frac{T_L}{\sqrt{1+\beta^2|\langle \boldsymbol{u_r}\rangle|^2/(2q_{sgs}/3)}} & (\boldsymbol{u_r}\text{に沿う方向}) \\ \frac{T_L}{\sqrt{1+4\beta^2|\langle \boldsymbol{u_r}\rangle|^2/(2q_{sgs}/3)}} & (\text{交差する方向}) \end{cases} \cdots (11)$$

で与えられる．なお，

$$T_L = \frac{1}{1/2 + 3/4C_0}\frac{q_{sgs}}{\epsilon} \quad \cdots\cdots (12)$$

である．式（10）を式（9）に代入すると，次式が得られる．

$$du_i^p = \frac{u_i^s - u_i^p}{\tau_p^m}dt + a g_i dt + b du_i^s - \frac{u_i'^s}{T_L^*}dt + B_i dW_i + b\langle A\rangle \quad \cdots\cdots (13)$$

ここで，

$$\langle A\rangle = -\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}dt + (\langle u_i^p\rangle - \langle u_i^f\rangle)\frac{\partial\langle u_i^f\rangle}{\partial x_j}dt + g_i dt \quad \cdots (14)$$

である．なおu_sは次のような平均と変動の和で表わされる．

$$u_i^s = \langle u_i^s\rangle + u_i'^s \quad \cdots\cdots (15)$$

これら，式（3），（5），（10）そして（13）により，乱流中の粒子と流体の相互作用を含む流れを再現する．

（2）ジェット下の気泡混入モデル

静水へのジェットの流入に伴う気泡の混入について多くの実験的研究がある（例えばChansonら, 2004）．高Froude数のケースでは，ジェット水面と静水面との間に楔形状の高曲率キャビティーが発生し，このキャビティー先端部の水面の不安定により気泡が形成される（図-1参照）．これらの生成気泡は極めて微小であり計算において完全に解像することは実在する計算機レベルでは不可能である．本研究では，この気泡混入のメカニズムを基にした気泡生成数値モデルを考える．

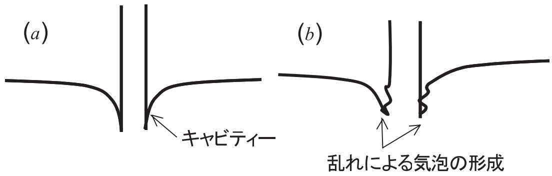

図-1　ジェット下に形成されるキャビティー（a），水面近傍に乱れがある場合（b）

空気混入量を決定する第一のパラメータはジェット流速であり，Froude数で特徴づけられる．Froude数が大きい場合，キャビティーが発生し気泡混入が観察される一方，低Froude数ではキャビティーが生成されないため空気混入もない．Froude数はキャビティーの形成を決定する役割を持つが気泡混入の直接的パラメータとはならない．Longuet-Higgins（1983）は，水面の限界形状をポテンシャルディリクレ双曲面について決定し，二次元では限界角$\theta_2 = 2arctan1^{1/2} = 90°$，三次元では$\theta_3 = 2arctan2^{1/2} = 109.47°$となることを明らかにしている．この限界角において水面は不安定となり，異なるステートへと遷移する．すなわち，この限界角を超過するかどうかによって気泡生成が行われるか否かが決定できるとすると，これを表す水面形状関数は次のように考えられる．

$$S = H(\theta \geq \theta_3) \quad \cdots\cdots (16)$$

ここで，Hはヘビサイド関数である．ジェット流体の流入は水面下において典型的なせん断流となり，強い乱れが生成される．この乱れは不安定水面を変動させ，直接的に気泡を生成する支配パラメータとなる（図-1b参照）．Deane・Stokes（2002）と同様に，小スケールの乱れが水面を分断し気泡を形成すると仮定すると，慣性小領域内の乱れ速度スケール$u^2 = 2\varepsilon^{2/3}d^{2/3}$と長さスケール$d$（気泡のスケール）に対する限界Weber数$We_{cr} = \frac{\rho}{\gamma}u^2 d$の関係から次式の様に形成される気泡径を決定できる．

$$d = 2^{-3/5}\epsilon^{-2/5}(\frac{\gamma}{\rho}We_{cr})^{3/5} \quad \cdots\cdots (17)$$

ここで，γは表面張力係数，εは乱れエネルギー散逸である．つまり，エネルギー散逸εが与えられれば水面上の乱れに対応した気泡径が与えられることになる．

最後に，気泡数を決定するパラメータをモデル化する．気泡数は水面の振動周波数に応じて与えられる．つまり，

乱れによるキャビティー先端部のパルセーションにより隣り合う水面が結合，分離を繰り返し，この周波数に応じて気泡が放出されるので，この周波数はその径に応じた振動系として与えられる固有周波数と等価であると考えられる．気泡の固有周波数は，単純膨張圧縮過程を仮定すると次のように与えられる．

$$\sigma = \frac{1}{\pi d}\sqrt{\frac{3\kappa p_0}{\rho}} \quad \cdots\cdots (18)$$

ここで，κは比熱比，p_0は気圧である．式（17）を代入すると，

$$\sigma = \frac{1}{\pi}2^{3/5}\epsilon^{2/5}(\frac{\gamma}{\rho}We_{cr})^{-3/5}(\frac{3\kappa p_0}{\rho})^{1/2} \quad \cdots\cdots (19)$$

よって，微小時間Δt間に生成される気泡数$N(d)$は，

$$N(d) = \sigma(\epsilon)Sn\Delta t \quad \cdots\cdots (20)$$

と与えられる．ここで，nは単位時間内に1つの計算格子内で発生する気泡の総数である．

計算グリッド内の気泡混入数は$S = 1$となる水面の高曲率線分（L）を使って，単純に次のように与える．

$$n = \frac{L}{d} = C\frac{\Delta}{d} \quad \cdots\cdots (21)$$

ここで，Cは定数であり，本計算では単純に$C = 1$とした．

3. 数値計算法

自由水面をもつ流れに対してWatanabeら（2008）と同一のスキームで計算を行った．すなわち，水面の移流はLevel-set法を導入し，運動方程式（3）はCIP法と予測子修正子法によって計算し，圧力方程式はMultigrid法を適用した．自由水面には力学的境界条件を満足させるスキーム（Watanabeら, 2008）を適用し，正しく局所水面形が再現されることになる．SG乱れエネルギー輸送方程式（5）に対しても運動方程式と同一の方法を適用した．

本研究では2つのエアレーション過程の数値計算を行った．一つは，**2.（1）**の乱流中の気泡流れのtwo-wayモデルの妥当性を検証するため，静水状態の矩形水槽底部から流量41.4Ncm^3/sで固定気泡径（$d = 10$mm）のバブリングを行うものであり，一つは鉛直流速1.05m/sで円柱状ジェット（直径12.5mm）を矩形水槽内の静水に流入させ，**2.（2）**のモデルを導入して発生した気泡を**2.（1）**のモデルによって追跡し，乱れとの相互作用を含む気液二相流を計算したものである．前者の計算時間間隔，格子間隔はそれぞれ，1.25×10^{-3}sec，2.0cm，後者は3.12×10^{-4}sec，1.0cmを与えた．両計算に対する計算領域を**図-2**に表わす．両水槽とも側方に周期境界条件を与え，底面にはnonslip条件を与えた．なお，これ以降，次元が記されていない全ての変数は水深，流体の密度そして代表速度（Stokes則に従う気泡浮上速度あるいは流入ジェットの流速）で無次元化されている．

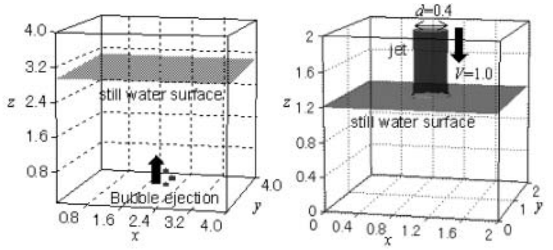

図-2　計算領域（左：バブリング計算，右：ジェット下の気泡混入計算

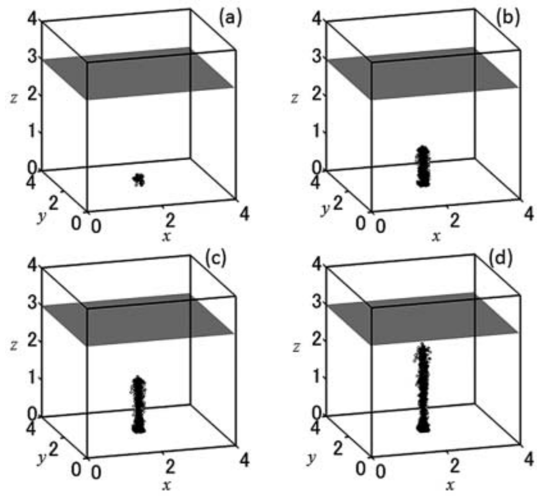

図-3　バブリング数値実験における気泡群の分布の時間変化．時間間隔：0.052s

4. 結果

静水中へのバブリング及び静水中へのジェットの流入に起因するエアレーションについて，提案するモデルを適用し，その特徴について考察する．

（1）静水中へのバブリング

図-3は，Iguchiら（1995）の実験と対応するよう，水槽底部中央から直径10mmの気泡を連続して放出した時の気泡の分布の時間変化を表したものである．放出源から鉛直上向きの軸を中心に緩やかに変動しながら浮上している．これら気泡分布の各位相に対応した乱れエネルギーの等値面を**図-4**に表わす．気泡の上昇に従って，底面近傍を中心に有意な乱れエネルギーが徐々に広範囲に広がっていく．気泡群の浮上に伴いその近傍に乱れが発生し，その乱れによって気泡運動の変動が促進されるという気泡—乱流間の再帰的エネルギーの輸送が行われているものと考えられる．この様に，一見単純な気液流れの中でも複雑な相互作用が重要であるが，本研究で提案するtwo-way確率モデルによってこれを再現可能となる．

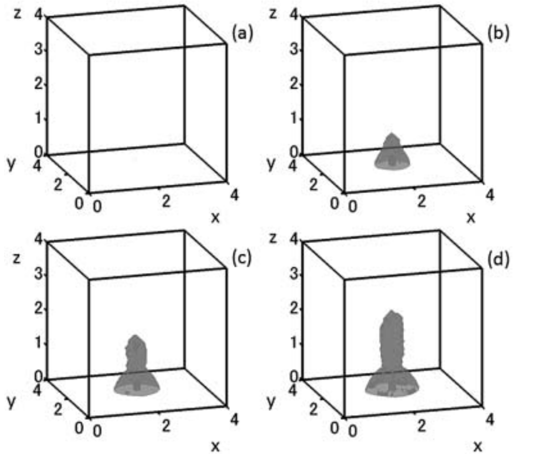

図-4　バブリング数値実験におけるSG乱れエネルギーの等値面の時間変化．時間間隔：0.052s

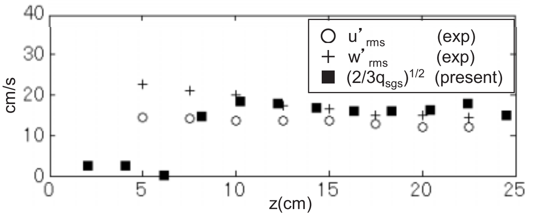

図-5　バブリングによって生成されるSGS乱れエネルギー分布とIguchiら（1995）との実験結果との比較

図-**5**は，乱れエネルギーについて本計算結果とIguchiら（1995）のLDVによる実験結果を比較したものである．実験結果は，それぞれ水平，鉛直流速成分の変動rms値であり，LESの計算結果は空間フィルタ操作されたSGS乱れエネルギー（$q_{sgs}=\frac{1}{2}(\overline{u_iu_i}-\overline{u_i}\cdot\overline{u_i})\equiv\frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}$）なので同一の比較はできないが，統計的な相似性を仮定して比較を行う．なお，ここではq_{sgs}を実験結果のそれぞれの成分と等価となる様，2/3を乗じ平方根を与えている．実験ではエアコンプレッサーを使用してチューブからエアレーションをしている一方，計算では気泡は静止状態から放出しているので，厳密に同一の放出条件となっていないため，底面付近において計算結果は実験結果を再現しない．しかしながら，気泡が安定した$z>10$cmにおいては十分変動流速の特徴を定量的に算出しており，本モデルで極めて重要な気泡と乱れの相互作用が再現されているものと考える．

（2）ジェット下に形成される気泡混在乱流

定常ジェットの静水中への流入に伴う混入気泡について，提案する気泡混入モデル及び気液two-way確率モデルを適用し，その特徴と砕波のエアレーション問題への適用の可能性を調査した．ジェットの極近傍では水位が局所的に低下し高曲率キャビティーが形成される．本モデルによって，気泡はそのキャビティーの高曲率部においてジェット水のせん断面近傍の高強度乱れが発生する位置を中心に混入し，ジェット軸を囲むように下方へ移流される（図-**6**）．

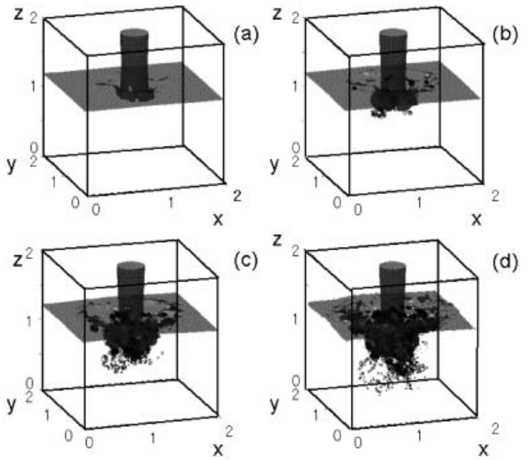

図-6　ジェットのキャビティーから水中へ混入する気泡群の様子．時間間隔：0.04s

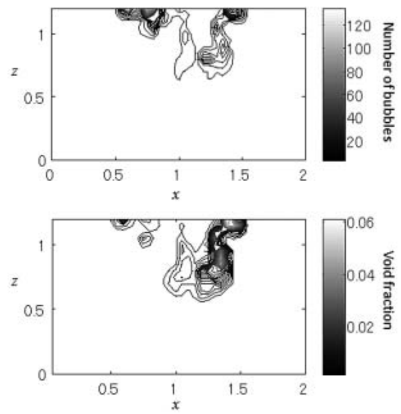

図-7　混入気泡数（上）とボイド率（下）の中央断面上の分布

抗力と浮力との相対性から小径気泡は急速に輸送され，逆に，特にジェット軸の外縁の大径気泡は浮上し水面近傍で流れ及び自由水面の変動に影響を与える．静水面に近いほど気泡数が多く，キャビティーに近いほどボイド率が高い傾向がある（図-**7**）．

気泡の混入開始から1.0s後に流体中に存在する全気泡のサイズスペクトルを計算した（図-**8**）．直径約1mm程度に最大スペクトルピークが現れ，それより大径側に-3/2乗勾配が現れた．混入モデルの妥当性は実験結果との比較の下に検証されるべきであり，現在それができていない段階で物理的な解釈をすべきではないかもしれないが，この勾配はDeane・Stokes（2002）が明らかにした砕波下に混入される気泡サイズスペクトルのHinze

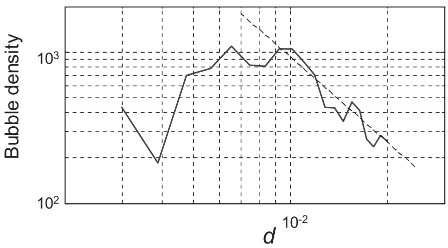

図-8　水中に存在する全気泡のサイズスペクトル

スケール以下の勾配と同一である．ジェットによる気泡混入と浮上とのバランスの中で，一意に決まるこの勾配の物理的解釈を今後調査すべきと考えている．

図-9は，気泡の混入開始から1.0s後の流体の流速及びSGS乱れエネルギーに対して，気泡モデルを導入せずに無気泡の流れ場のそれらとの差を表したものである．特にキャビティー近傍のボイド率の高い領域では，流入ジェットの流速に匹敵する流速差が広域にわたって現われており，混入気泡が流体の平均流速場及び水面の変動に非常に大きな影響を与えているものと考える．同様に同一の領域において，気泡混入時では，乱れエネルギーが顕著に強化されているのがわかる．キャビティー近傍における，この気泡混入に伴う乱れエネルギーの強化は，界面での気泡の更なる生成に寄与するため，相乗的に気泡生成と乱れ生成が促進されているものと考える．

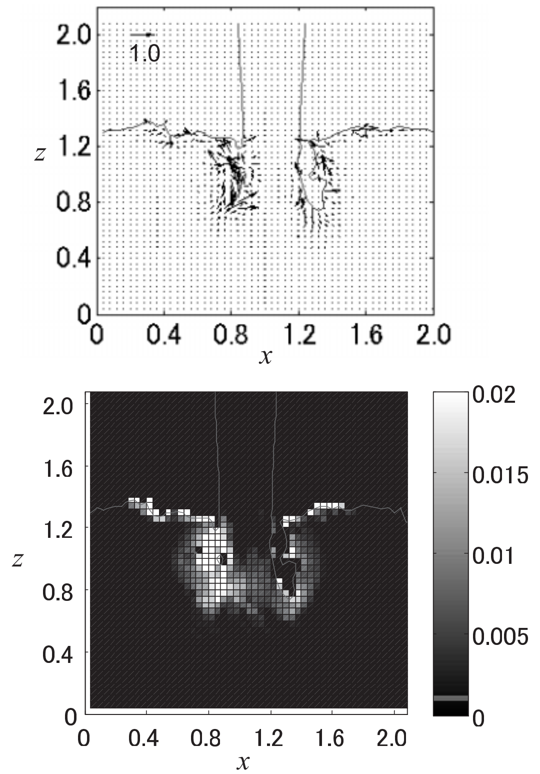

図-9　流体の流速（上）及びSGS乱れエネルギー（下）に対する気泡モデルを導入した結果と無気泡流れ場の結果との差の分布

5. 結論

気泡運動の確率モデルをLESに導入し，乱れ－平均流－気泡運動を相互にカップリングさせたtwo-wayモデルを構成した．このモデルを静水中の底面ソース点から放出される気泡群をもつ流れへと適用し，気泡の存在並びに運動に伴い誘発される乱れに着目し，その特徴を調査すると共に実験結果との照合を行った．気泡群の浮上に伴いその近傍に乱れが発生し，その乱れによって気泡運動の変動が促進されるという気泡—乱流間の再帰的エネルギーの輸送が行われる．提案するモデルによる計算結果は，Iguchiら（1995）の変動流速に関する実験結果を安定した気泡運動が達成される領域において矛盾なく記述することができる．

このtwo-way確率モデルに加え，自由水面から気泡を生成放出する気泡混入モデルを提案し，このモデルにより円柱ジェットの静水への着水に伴う気泡混入の特徴を考察した．ジェットの静水への流入着水点において高曲率のキャビティーを形成し，安定限界を超えた高曲率部から気泡が放出される．混入気泡数及びボイド率はジェット軸の周辺で最も高くなる典型的な分布が再現された．気泡の混入はキャビティー近傍の流速及び乱れエネルギーを大きく強化するため，さらに水面を不安定にして気泡の生成を促進するという相乗的なエネルギー輸送があるものと考えられる．混入モデルの妥当性を検討し，今後，詳細に実験結果との照合，評価を行う必要がある．

参　考　文　献

Chanson H., S. Aoki and A. Hoque (2004): Physical modelling and similitude of air bubble entrainment at vertical circular plunging jets, Chemical Engineering Science, 59, 747-758.

Csanady G.T. (1963):Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere, J. Atmos. Sci., 20, 201.

Deane G.B. and M. D., Stokes (2002): Scale dependence of bubble creaation mechanisms in breaking waves, Nature, 418, 840-844.

Iguchi M., H. Ueda and T. Uemura (1995): Bubble and liquid flow characteristics in a vertical bubbling jet, Int. J. Multiphase Flow, 21, 861-873.

Lance M. and J. Bataille (1991): Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air-water flow, J. Fluid Mech., Vol. 222, pp. 95-118.

Longuet-Higgins M. S. (1983): Bubbles, breaking waves and hyperbolic jets at a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 127, pp. 103-121.

Yoshizawa A. and K. Horiuti (1985): A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 54, pp. 2834-2839.