土木学会論文集B2（海岸工学）
Vol. B2-65，No.1，2009，001-005

非線形分散波式と砕波解に関する基礎的研究

A Study on Nonlinear Dispersive Wave Equations and Wave Breaking Solution

下園武範[1]・佐藤愼司[2]

Takenori SHIMOZONO and Shinji SATO

Nonlinear dispersive wave equations are now widely used to simulate the propagation of shallow water waves. In recent years, it has been clarified that some equations accommodate wave breaking phenomena as well as steady wave solutions. In the present study, comparative studies of the Boussinesq-type equations with different sets of parameters are carried out to investigate the existence of wave breaking solution. The behavior of solution over the breaking limit is numerically examined using a blowup profile as an indicator of wave breaking. It is found that the solution exhibits the blowup with most sets of parameters for cases with h/L<0.04, while only some specific sets of parameters realize it for shorter waves. Moreover, locations of the blow-up are shown to agree well with actual breaking points known from the empirical criteria.

1. はじめに

鉛直積分型波動モデルでは，物理量が空間座標の多価関数となる砕波現象を完全に記述することはできない.従来，経験的砕波指標を用いて砕波点から岸に向かって砕波減衰項を組み込むことで砕波に伴う波高低減を表現してきた．一方，ボアに代表されるような双曲型保存則で記述可能な不連続現象については，図-1のように保存則を満たす弱解を構成することで，多価問題をバイパスして実現象を一定の精度で表すことが出来る．同様の手法を非線形分散波系に適用することで砕波を表現できる可能性があるが，そのためには支配方程式が砕波解（物理量は有界であるが，その勾配が無限大となるような解）を有することが前提となる.

非線形分散系と砕波解についてはWitham（1973）の研究を端緒として，一方向波動方程式に基づいて研究されてきた. 近年，CH方程式（Camassa・Holm，1993）やDP方程式（Degasperis・Processi, 1998）といった定常波解と砕波現象の両方を包含する一方向波動方程式が見出され（Constantine・Ester,1998），水面波理論との関連が明らかにされた（Johnson, 2002)．これら一連の研究が示唆するのは，一定の非線形項と線形・非線形分散項のバランスがこのような砕波に至る解を実現するこということである． 弱解が必ずしも物理現象を正しく表す保障はないが，このような解を含んだ方程式が同定できれば，保存則を満足しながら解の変動有界性を保障する計算スキームを構築することで，より任意性の少ない形で砕波変形の記述が可能になると期待される.

一般の非線形分散波式（Boussinesq型方程式）についてこのような観点からの研究例はこれまでに少なく，いかなる方程式が砕波解を持つかは明らかでない．本研究は既往の修正Boussinesq型方程式について強非線形領域での解の挙動を数値的に調べることで，砕波解の存在およびそれを可能にする条件を明らかにすることを目的として行った.

1 正会員　博(工)　東京海洋大学海洋科学部助手
2 フェロー　工博　東京大学大学院工学系研究科教授

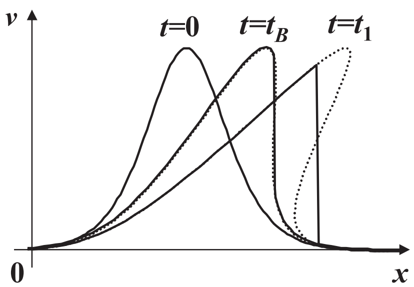

図-1　不連続現象と弱解

2. 非線形分散波式

（1）支配方程式

Boussinesq型方程式はポテンシャル理論を波高水深比ε (=H/h)，相対水深μ (=h/L)の二つのパラメータに基づいて展開したものであり，それぞれの打切りオーダーによって異なる精度を持った方程式が得られる．しかしながら，数値積分可能性からμのオーダーは$O(\mu^2)$までに制約されるため，短波長側への適用範囲を広げるため$O(\mu^2)$の項のみを用いて$O(\mu^4)$以上の項を打ち消すような修正方程式が各種提案されてきた．ここでは現状で最も一般性の高い方程式系と思われるMadsen・Schaffer（1998）による任意水深流速で記述されたものを基に議論を行う．一次元問題を考えるとき，この方程式系の連続式および運動方程式は以下のように表される.

$$
\begin{aligned}
&\eta_t + Q_x \\
&+(\beta_2-\beta_1)\mu^2[h^2[\eta_t+[u(h+\varepsilon\eta)]_x]_x]_x \\
&-\beta_2\mu^2[h^2(\eta_t+[u(h+\varepsilon\eta)]_x)]_{xx}=O(\mu^4)
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots\cdots(1)
$$

および，

$$
\begin{aligned}
&u_t+\eta_x+\varepsilon[u^2]_x/2 \\
&+\mu^2[\Lambda_{20}+\varepsilon\Lambda_{21}+\varepsilon^2\Lambda_{21}+\varepsilon^3\Lambda_{23}] \\
&+(\alpha_2-\alpha_1)\mu^2h^2[u_t+\eta_x+\varepsilon[u^2]_x/2]_{xx} \\
&-\alpha_2\mu^2h[hu_t+h\eta_x+\varepsilon h[u^2]_x/2]_{xx}=O(\mu^4)
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)
$$

ここに，

$$
\begin{aligned}
&Q=u(h+\varepsilon\eta) \\
&+\mu^2[(1/2h^2+hz+\varepsilon\eta z-1/2\varepsilon^2\eta^2)[hu]_{xx} \\
&+(1/2hz^2-1/6h^3+1/2\varepsilon\eta z^2-1/6\varepsilon^3\eta^3)u_{xx}]
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(3)
$$

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{20}=[z[hu]_{xx}+z^2u_{xx}/2]_t \\
&\Lambda_{21}=[u\{z[hu]_{xx}+z^2u_{xx}/2\}-\eta[hu_t]_x+([hu]_x)^2/2]_x \\
&\Lambda_{22}=[-\eta^2u_{tx}/2-\eta u[hu]_{xx}+\eta u_x[hu]_x]_x \\
&\Lambda_{23}=[-\eta^2uu_{xx}/2+\eta^2u_x{}^2/2]_x
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

u：高さzでの流速，η：水面変動，h：静水深である．流速の定義高さzは水面変動分を含めて，

$$
z=\varsigma h+\delta\varepsilon\eta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)
$$

のように定義する．したがって，方程式系には分散性を左右するς,，δ，α_1，β_1および底面勾配項に関与するα_2，β_2の計6つの修正係数が含まれ，これらの値の組合せによってO(μ^4)以上の各項のバランスを修正し，異なった特性を付与することができる．

（2）修正係数組合せ

ここでは上記の係数組合せについて，**表-1**に示すような代表的な方程式に帰着するものを以下での検討に加えた．組合せIはWeiら（1995）による完全非線形分散波式，IIはKennedyら（2001）によってWeiらの式の非線形性を改善したものである．本研究ではこれら既往のものに加え，一方向極限において1章で述べたCHおよびDP方程式に帰着するような組合せを求めた．水平面上で式（1）および（2）のO($\varepsilon\mu^2$)までの項を残し，一方向進行を仮定してuのみの方程式を導くと以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&u_t+u_x+3/2\varepsilon uu_x \\
&+\mu^2[(\alpha-1/2\chi+1/12)u_{txx}+(\alpha-1/2\chi+1/4)u_{xxx}] \\
&+\varepsilon\mu^2[(3/2\alpha-9/4\chi+13/12)u_xu_{xx} \\
&+(3/2\alpha-3/4\chi+13/24)uu_{xxx}]=O(\varepsilon^2\mu^2,\mu^4)
\end{aligned}
\qquad \cdots(6)
$$

ここに，$\alpha=\varsigma^2/2+\varsigma$，$\chi=\alpha_1+\beta_1$である．この方程式がCHおよびDP方程式となるためには，Dullinら（2003）に従いガリレイ不変部分の各項のバランスを以下のように決めればよい（CH：$\gamma=2$, DP：$\gamma=3$）．

$$
\begin{aligned}
&C(u_xu_{xx})=\gamma C(uu_{xxx}) \\
&C(u_{xxt})C(uu_x)=(\gamma+1)C(uu_{xxx})C(u_t)
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots\cdots(7)
$$

ここでC(term)は各項の係数を表す．したがってCH方程式となるためにはα=-1/4，χ=1/2，DP方程式となるためにはα=-13/72，χ=59/108とすればよい．

浅海周期波の解析を行うためには，少なくともStokes波理論に対してPáde（2,2）近似の線形分散性が要求されるが，残る1つの係数自由度でそれを満たしうるのはCH方程式のみであった．ゆえに，以下の検討ではIIIとしてCH方程式のバランスを実現する組合せのみを考えた．さらに，IVとしてMadsen・Schaffer（1998）によるPáde（4,4）近似線形分散性を与える短波長側への適用性が広いものを加え，計4つの組合せを対象として方程式系の諸特性を調べた．

（3）Stokes解析

各係数組合せによる基本性能を調べるためにMadsen・Schaffer（1998）に倣ってStokes解析を行った．uおよびηを以下のような調和関数（位相：$=kx-\omega t$）で表し，

$$
\begin{aligned}
&\eta=a_1\cos\theta+\varepsilon a_2\cos2\theta+\varepsilon^2a_3\cos3\theta+O(\varepsilon^3) \\
&u=u_1\cos\theta+\varepsilon u_2\cos2\theta+\varepsilon^2u_3\cos3\theta+O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

式(1),(2)に代入することで，各オーダー量をStokes波理論と比較する．ここでは線形分散性，高次成分振幅a_2およびa_3に着目した．式(1),(2)の線形分散性は以下のように表される．

$$
c^2=\frac{1+(\alpha_1+\beta_1-\alpha-1/3)k^2+\alpha_1(\beta_1-\alpha-1/3)k^4}{1+(\alpha_1+\beta_1-\alpha)k^2+\beta_1(\alpha_1-\alpha)k^4} \qquad (9)
$$

表-1　修正係数の組合せ

	ς	δ	α_1	β_1	*remarks*
I	-0.5528	0.000	0.000	0.000	Wei et al
II	-0.5528	0.190	0.000	0.000	Kennedy et al
III	-0.293	0.000	0.050	0.450	CH
IV	-0.5412	0.000	0.011	0.039	Madsen･Schaffer

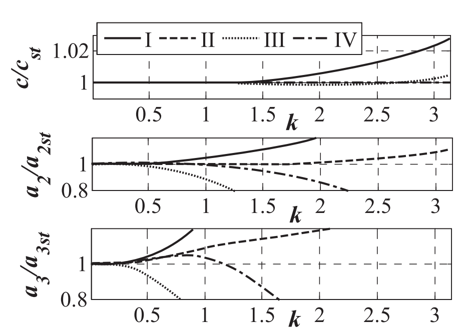

図-2　波速および高次振幅のストークス理論との比

ここに，c：波速，k：波数である．高次成分振幅a_2およびa_3についてはその表示に数ページを費やすためここでは省略する．

図-2には，4つの係数組合せによる各特性をストークス波理論による値との比で示している．線形分散性についてはIV，III，I（II）の順に精度がよく，非線形性についてはa_2の改善を施したIIが最も優れ，IIIは特に理論との差が大きい．このような係数組合せ間による非線形特性の差異は，特に強非線形領域での解の挙動に大きく影響するものと考えられる．

3. 水平面上での砕波について

水平面上での方程式の精度および砕波解の存在を議論するため数値計算を行った．以下で用いた計算スキームは，時間差分にAdams-Bashforth-Moultonの4次精度，空間差分については4次精度中心差分を用いた一般的な高精度差分スキームである．

（1）方程式の精度

ε-μ平面上での方程式の誤差を評価するため，周期境界を用いて保存波解（流れ関数法19次近似解）を初期条件とした伝播計算を行った．ε=0.010-0.675，μ=0.002-1.000までの範囲について100点以上で計算を行い，誤差の平面分布を求めた．誤差は3波長伝播後のL1誤差を以下のように評価した．

$$E=\frac{1}{HL}\int_0^L\left|\eta-\eta_s\right|dx \qquad \cdots\cdots(10)$$

ここにη_sは保存波解である．計算では，数値誤差の影響を小さくするため，計算格子幅を十分に小さくしている．

図-3には各組合せについてε-μ平面上での誤差分布を百分率で示したものである．必ずしも方程式の適用範囲を示すものではないが，相互の精度比較には有効である． 極浅海条件(h/L<1/25)では係数組合せ間での差異は見られないが，波長が短くなるに従い誤差分布に差異が表れる．Stokes解析の結果と符合して，非線形性の小さい範囲ではIVが最も短波長側まで精度が高いが，浅海条件の非線形領域ではIが最も精度が高い．Iに対してIIの改善効果は狭い範囲に限定的であり，大きな優位性は見られない．IIIについては両者の中間的な誤差分布を示すが，特に際立った特徴は見られなかった．

（2）砕波解の存在について

砕波解の存在を議論するため，水平面上で解が砕波を起こすような条件で計算を行った．ここでは著大な波高水深比の初期条件を与え，その後の解の挙動を調べた．初期条件を敢えて微小振幅波理論で与えれば，保存波解ではないため，有限時間内に解は砕波を呈することになる．もし方程式系が，勾配無限大に漸近するような砕波解を有するならば，拡散のメカニズムのない通常の計算スキームでは，解のBlowupが生ずるはずである．

図-4には，3つの異なる初期条件で，各係数組合せ（I, III, IV）による計算結果の時間発展を示している．図には 同条件でEuler方程式を粒子法（MPS法，越塚，1995）で解いた結果を参考として表示した．各初期条件で2時点目の図は粒子法による計算結果において水面が多価となる瞬間の結果を表している．結果から明らかなように，波長が長い条件では全ての係数セットで解のBlowupが見られるが，波長が短くなるに従いIのみがこのような性質を保持し，IIIおよびIVではBlowupは生じずに著大な波として伝播を続ける．この結果から，方程式系（1)，(2）は長波長では係数組合せに関わりなく砕波解を有するが，短波長になるとO(μ^4)が重要となり，Iによるバランスのみが砕波解を可能にするものと考えられる．

（3）砕波解を有するための条件について

組合せIのみが砕波解を有する結果となった理由として考えられるのは，Stokes解析の結果を示した図-2において，高次成分の振幅比が単調増加しているという点である．つまり，高次成分が常に増幅するように誤差が現れるため，方程式の適用範囲を超えるような砕波点付近では解が必然的にBlowupする．方程式がこのような性質を有するならば,逆に解のBlowup挙動を探知することで,砕波の発生を知ることができるため，従来よりも普遍的な砕波の記述が可能になる．このような方程式の性質はこれまで着目されてこなかったものである．

I以外の係数組合せでこのような性質を持たせることが可能であるかを調べる．まず式（9）の線形分散性を

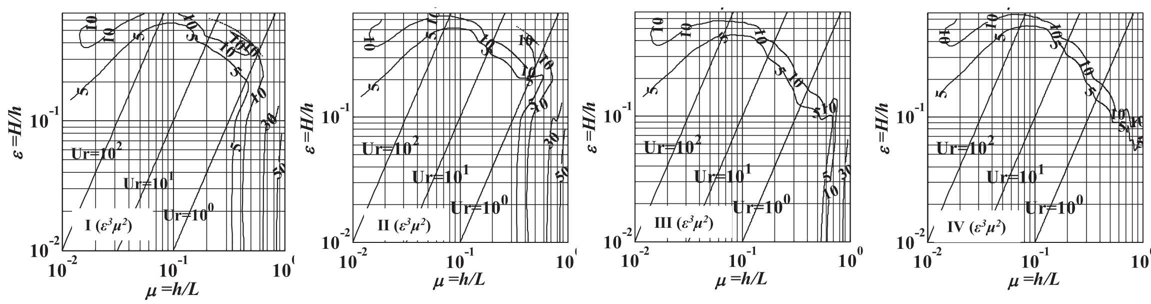

図-3　各係数組合せによる方程式のε-μ平面上での誤差分布（%）

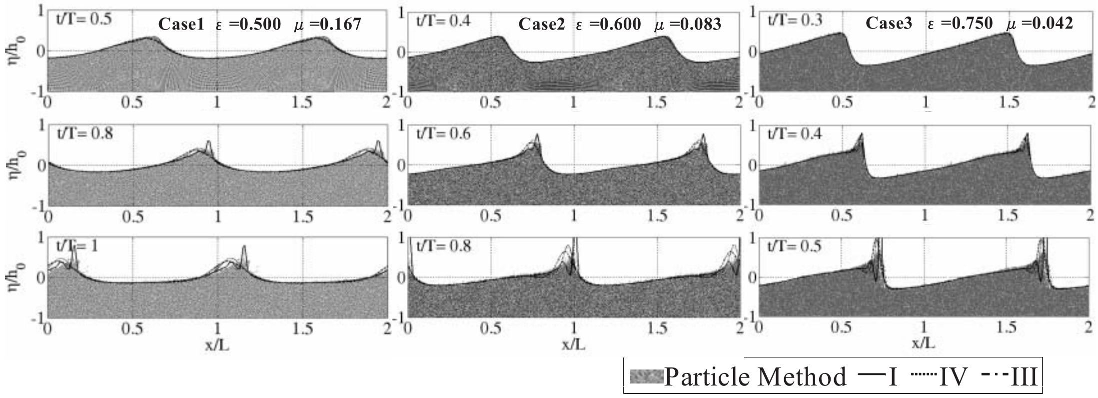

図-4　強非線形領域での数値解の挙動

少なくともStokes波理論に対するPáde（2,2）近似とするためには係数間に以下の条件が課される．

$$\beta_1 = (15\alpha\alpha_1 + 5\alpha + 2)/(15\alpha + 5) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

簡単のため $\delta=0$ とし，残る二つのパラメータ α，および α_1 を変化させながら，線形分散性および高次成分振幅 a_2 の変化を調べた．

図-5 (a) , (b) には，異なる α ,および α_1 に対して k=0-3までの範囲で線形分散性および高次成分振幅 a_2 の相対誤差を求め，その常用対数をとって表示している．図中で濃い部分がより高精度であることを意味し，白抜きの部分は方程式が特異点を持つ範囲となっている．また（c）図は（b）図のうちIのように a_2/a_{2st} が k に対して単調増加となる範囲のみを表示したものであり，図中には代表的な係数組合せの位置を示している．(a) , (b) から線形分散性と高次振幅では最適値の範囲が互いにずれていることがわかる．また，a_2/a_{2st} が単調増加となる範囲で，良好な線形分散性を有するものは組合せIを含むその近傍のみであり，結果Iよりも優れた特性を持つ組合せは見られなかった．

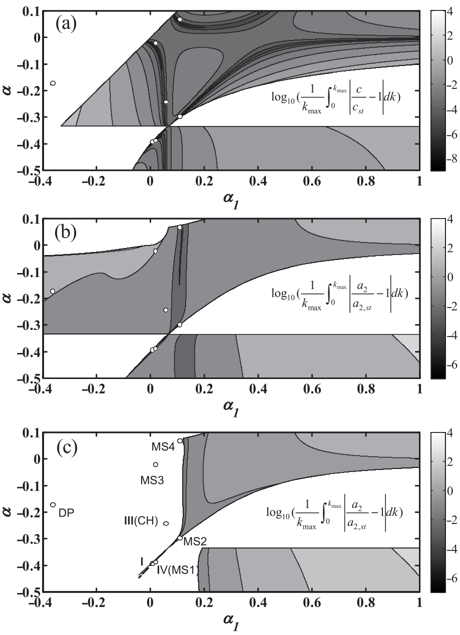

図-5　係数 α ,, α 1と波速および高次成分振幅の相対誤差の関係

4. 斜面上での砕波について

（1）検証方法

斜面上での砕波についても検討を行うため，図-6に示すような一様水深部と斜面で構成された計算領域で波浪変形計算を行った．岸側の一様水深部は与えられた入射条件に対する砕波水深よりも小さく設定すれば，解は斜面上のある点で必然的にBlowupし，その後，計算が破綻することになる．波高分布を求めるためには，平衡状態に達するまでの計算が必要となるため，何らかの方法でBlowupを抑制する必要がある．ここでは数値解の高調波成分のみを鈍らせる以下のような6次のフィルターを計算領域全体で水面および流速の両方に作用させた．

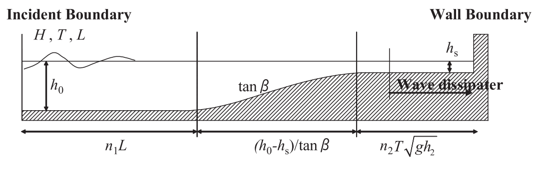

図-6　計算領域の設定

$$\phi_i^{n+1} = (\phi_{i+3}^{n+1} - 6\phi_{i+2}^{n+1} + 15\phi_{i+1}^{n+1} + 44\phi_i^{n+1} + 15\phi_{i-1}^{n+1} - 6\phi_{i-2}^{n+1} + \phi_{i-3}^{n+1})/64 \quad \cdots (12)$$

このフィルターは波の主要な成分にはほとんど作用しないが，Blowupに伴う高調波成分のエネルギーを消散する役割を担う．さらに岸端で波を減衰させるため岸側一様水深部には波長に対して十分長い減衰域を設けている．勾配項に関する修正パラメータ α_2 および β_2 は

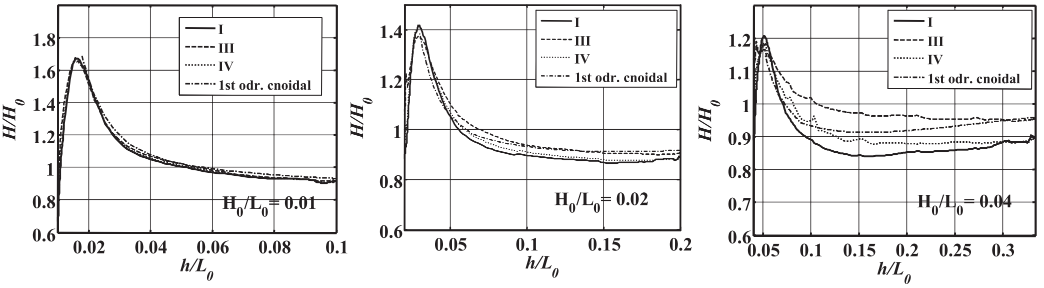

図-7　斜面上での波高分布の計算結果

Madsen・Schaffer（1998）に倣って線形浅水勾配を最適化するように各係数セットに対して決めた．以上の要領で様々な斜面勾配および入射条件に対して，先と同様のスキームで十分に小さい格子幅で計算を行い，斜面上での波高分布を求めた． なお，入射条件はUr<25に設定し5次Stokes解で与えた．

（2）経験的砕波指標との比較

図-7に異なる沖波波形勾配に対する斜面上（勾配：1/20）での波高分布の計算結果を1次Cnoid解に基づく解析解（首藤，1974）とともに示す．図のように波高分布が極大点をとるのは，Blowupにより波のエネルギーが高調波成分に移行し，数値フィルターを通して急速に減衰するためである．したがって波高極大点は，おおむね解のBlowup点を表すものと考えられる．沖波波形勾配が小さい（<0.01）場合には係数セット間での差異は見られないが，大きくなるにしたがってIII，IVではBlow-up点が不明瞭になる傾向が見られる．さらに波形勾配を大きくすればこの差異はより際立つものと思われるが，Iは他に比べて線形分散性で劣るため，そのような条件では砕波に至るまでの伝播計算ができない．

様々な沖波波形勾配および底面勾配条件で求めたBlowup水深と合田による砕波水深とを比較したものが図-8である．砕波指標は大きくばらついたデータから求められたものであることを考慮すれば，全体的な傾向を含めて両者はよく一致していると言える．

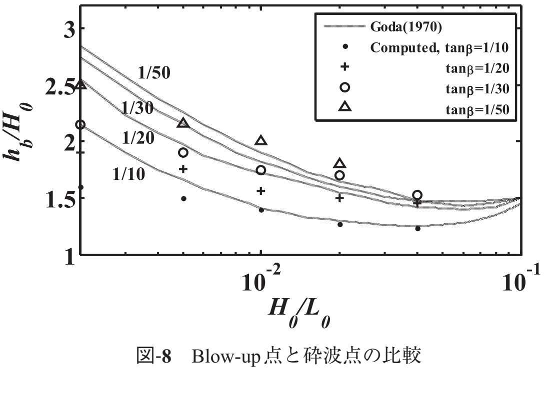

図-8　Blow-up点と砕波点の比較

5. おわりに

本研究ではO(μ^2)のBoussinesq型方程式がいかなる場合に砕波解を有するかを明らかにするため，各種の数値的な検討を行った．その結果から，相対水深が小さい条件（h/L<1/25）では多くの方程式が砕波解を有するが，それより相対水深が大きくなるとO(μ^4)項が重要となり，限られた修正方程式のみがこの性質を保持することが分かった．また，砕波解の有無は方程式における高調波成分の波数依存性に関係していることが示唆された．さらに，砕波解の特徴づける解のBlowupは現実の砕波点付近で起きていることが幅広い条件で確認された．

この解のBlowup挙動を検知可能なスキームが構築できれば，より統一的な砕波現象の記述につながるものと期待される．

参　考　文　献

越塚誠一（1997）：数値流体力学，培風館，223p.

首藤伸夫（1974）：非線形長波の変形－水路幅，水深の変化する場合，第21回海講論文集，pp. 57-63.

Camassa, R. and D. D. Holm (1993) : An integrable shallow water equation with peaked solitons. Phys. Rev. Lett., Vol.71-11, pp. 1661-1664.

Constantin, A. and J. Escher (1998) : Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, Acta Math., 181, 229-243

Dullin, H. R., G. A. Gottwald and D. D. Holm(2003): On asymptotically equivalent shallow water wave equations, Physica D, Vol.190, pp. 1-14.

Degasperis A. and M. Procesi (1999) : Asymptotic integrability, in Symmetry and Perturbation Theory, World Scientific, pp.23-37.

Johnson R.S. (2002) : Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves, J. Fluid Mech., Vol. 455, pp. 63-82.

Kennedy, A.B, J. T. Kirby, Q. Chen and R. A. Dalrymple (2001) : Boussinesq-type equations with improved nonlinear performance, Wave Motion, Vol. 33, pp. 225-243.

Madsen, P. A. and H. A. Schäffer (1998) : Higher order Boussinesq-type equations: Derivation and analysis, Philos. Trans. Roy. Soc. Lond., Vol. 356, 1749, pp. 3123-3181.

Wei, G., J. T. Kirby, S. T. Grilli and R. Subramanya (1995) : A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves, J. Fluid Mech., Vol. 294, pp. 71-92.

Whitham, G. B. (1970) : Linear and Nonlinear waves, J. Wiley & Sons, New York, 628 p.