海岸工学論文集，第55巻（2008）
土木学会，621-625

Hilbert-Huang変換を用いた濁度の時間－周波数解析

Time-Frequency Analysis of Turbidity Using the Hilbert-Huang Transform

加藤　茂[1]・Magnus Larson[2]

Shigeru KATO and Magnus Larson

The time series of turbidity in a coastal area were analyzed using the Hilbert-Huang Transform. The Empirical Mode Decomposition decomposed the original data to only eight intrinsic mode functions (IMFs) and a residue. Applying the Hilbert Transform to IMFs, the Hilbert spectrum was calculated, which is the time-frequency distribution of the instantaneous frequency and energy. The Hilbert spectrum showed the instantaneous frequencies change corresponding to the high turbidity events. The investigation of instantaneous frequency variations can be used to grasp the transition of the state of turbidity. The comparison between the Fourier spectrum and the Hilbert spectrum integrated in time showed the integrated Hilbert spectrum could make possible to grasp the cycle of the locally repeated events.

1. 緒言

現地観測データは，さまざま時間スケール，変動幅の現象が混ざり合って含まれており，変動特性が時間とともに変化する場合も少なくない．また，近年では計測機器の高性能化に伴って，長期の連続データの取得も可能となってきている．それに伴って，解析の対象となるデータ長も長くなり，非定常なデータが解析対象となることも増えている．計測対象によっては，データの変動が非常に間欠的で，一見するとデータの欠損やノイズのように思えるデータを多く含むものもある．また，その中には非線形現象が含まれていることもある（Lapointe, 1996；Huangら，1999；Suzukiら，2007）．

これらの解析には，Fourier変換（Fourier Transform: FT）が広く用いられてきた．Fourier解析では，解析対象のデータを周期関数の重ね合わせで表現しようとするため，その適用には，必然的に線形性と定常性の条件が課せられる．また，FTによる解析では，周波数の情報は得られるものの，時間情報が失われてしまうため，現象を時間軸上で特定することは不可能である．

最近では，時間－周波数軸上での解析が可能な方法として，短時間Fourier変換（Short Time Fourier Transform：STFT）やWavelet変換（Wavelet Transform：WT）が用いられることもあり，海岸工学分野でも適用例が増えつつある（Guedes-Soares・Cherneva，2005；Reeveら，2007）．しかし，これらの手法は周波数分解能と時間分解能がトレードオフの関係にあり，「周波数分解能と時間分解能を同時にある精度以上にすることは不可能である」という不確定性原理に縛られ，周波数分解能を上げれば，時間分解能が下がり，反対に時間分解能を上げれば周波数分解能が下がってしまう．また，変換自体に線形性が仮定されており，非線形現象が含まれるデータへの適用にはFTと同様に限界がある．

これに対して，Huangら（1998，1999）は非線形データへのアプローチとして，経験的モード分解法（Empirical Mode Decomposition：EMD）とHilbert変換（Hilbert Transform：HT）を組み合わせたHilbert-Huang変換（Hilbert-Huang Transform：HHT）を提案している．EMDでは，データを固有モード関数（Intrinsic mode function：IMF）c_j (j=1～m) と残り成分 r に分解する．各IMFに対して，Hilbert変換を行うことで，瞬時周波数と振幅の時間変化を求めることができ，時間－周波数空間上の信号として表現される．上記の方法で求めた全てのIMFを時間－周波数空間上で重ね合わせることで，エネルギーの時間－周波数分布（Hilbertスペクトル）を求めることができる．この方法では，STFTやWTのような時間－周波数軸上での空間分布に不確定性原理の制約は無い．また，HHTでは瞬時周波数と振幅を用いるため，周波数をより正確に求めることが出来るだけでなく，時間軸上での特定も可能となる．しかし，海岸工学の分野では波浪解析に用いられた例はあるが，非定常・非線形データを扱うことが多いにもかかわらず，その数は限られている（Veltcheva，2002；Schlurmannら，2002；Paulら，2005）．

本研究では，HHTを用いて現地観測で得られた濁度の時系列データの解析に適用し，その時間－周波数解析を試みた．また，Fourier解析との比較から，濁度の変動特性解析におけるHHTの有効性を検証した．

2. Hilbert-Huang変換の概要

HHTはモード分解とHilbert変換の2つのプロセスから成り立つ（Huangら，1998）．まず，データを定常性と

1 正会員　博(工)　豊橋技術科学大学准教授工学教育国際協力研究センター
2　Ph.D　ルンド大学教授工学部水資源工学科

線形性の条件を満たす複数の固有モード関数と残りの成分に分解する．次いで，求めた固有モード関数に対してHilbert変換を行い，瞬時周波数や振幅（またはエネルギー）を求める．最終的には，全固有モード関数から求められた瞬時周波数や振幅を重ね合わせることで，データの時間－周波数空間上での周波数変化やエネルギー変化を解析する．

(1) 経験的モード分解

EMDでは，複数の固有モード関数（IMF）と残りの成分に入力データ $x(t)$ を分解する．IMFは以下のように定義される．

- 対象とするデータ長の中で，データの極値（極大値または極小値）の数とデータがゼロと交差する回数が同じか1つの違いである．
- データの任意の点において，極大点によって定義される包絡線と極小点から作られる包絡線の平均値がゼロである．

これにより，IMFは単調で且つ局所的には上下対称な振動データになる．しかしIMFは振幅と周波数の緩やかな変化を含んだデータである．上記の定義に基づいて，IMFは以下のように求められる．

1. データ $x(t)$ 中の極大値を検出し，それを3次スプライン補間で結んだ上側包絡線 $x_{max}(t)$ を求める．
2. 同様にして極小値および下側包絡線 $x_{max}(t)$ を求める．
3. 下式で定義される局所平均 $m_1(t)$ を求め，$x(t)$ との差を $h_1(t)$ とする．

$$m_1(t)=\frac{x_{\max}(t)+x_{\min}(t)}{2} \tag{1}$$

$$h_1(t)=x(t)-m_1(t) \tag{2}$$

4. もし，$h_1(t)$ が上記のIMFの条件を満たしていれば，$h_1(t)$ は第1モード $c_1(t)$ となる．しかし，一般的には $h_1(t)$ がIMFの条件を満足することは困難である．したがって，$h_1(t)$ を $x(t)$ ($=h_{1(k-1)}(t)$) と置き換えて，上記の処理を k 回繰り返し，判定条件を満たしたところで，$h_{1k}(t)$ は最も細かい変動（短周期変動）を含んだ第1モード $c_1(t)$ となる．

$$h_{1k}(t)=h_{1(k-1)}(t)-m_{1k}(t) \tag{3}$$

$$c_1(t)=h_{1k}(t) \tag{4}$$

5. 得られた $c_1(t)$ を $x(t)$ から差し引き，IMFとそれ以外の成分 $r_1(t)$ に分離する．

$$x(t)-c_1(t)=r_1(t) \tag{5}$$

6. $r_1(t)$ にまだ長周期変動が含まれている場合には，$r_1(t)$ が極値を持たない単調関数になるまで，$x(t)$ を $r_k(t)$ と置き換え，1～5のプロセスを繰り返す．

$$\left.\begin{aligned} r_1-c_2&=r_2\\ r_2-c_3&=r_3\\ &\vdots\\ r_{n-1}-c_n&=r_n \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

7. 上記のプロセスによって得られたIMF（c_1～c_n）と残り成分（r_n）を足し合わせることによって，以下のようにデータ $x(t)$ をIMFと残り成分の和として表すことができる．

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)+r_n(t) \tag{7}$$

(2) Hilbert変換

EMDで求めたIMFに対してHilbert変換を行い，瞬時振幅とその瞬時周波数を求める．データ $x(t)$ に対するHilbert変換 $y(t)$ は以下の式で求められる．

$$y(t)=p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(t-\tau)}{\pi}d\tau \tag{8}$$

ここで，p.v.はCauchyの主値である．これにより解析信号 $z(t)$ は以下のように定義される．

$$z(t)=x(t)+i\cdot y(t)=a(t)\cdot e^{i\cdot\theta(t)} \tag{9}$$

ここで，i は虚数単位であり，$a(t)$ は瞬時振幅と $\theta(t)$ は瞬時位相と呼ばれる．

$$a(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2} \tag{10}$$

$$\theta(t)=\tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \tag{11}$$

さらに瞬時周波数 $f(t)$ が次式のように定義される．

$$f(t)=\frac{\omega(t)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{12}$$

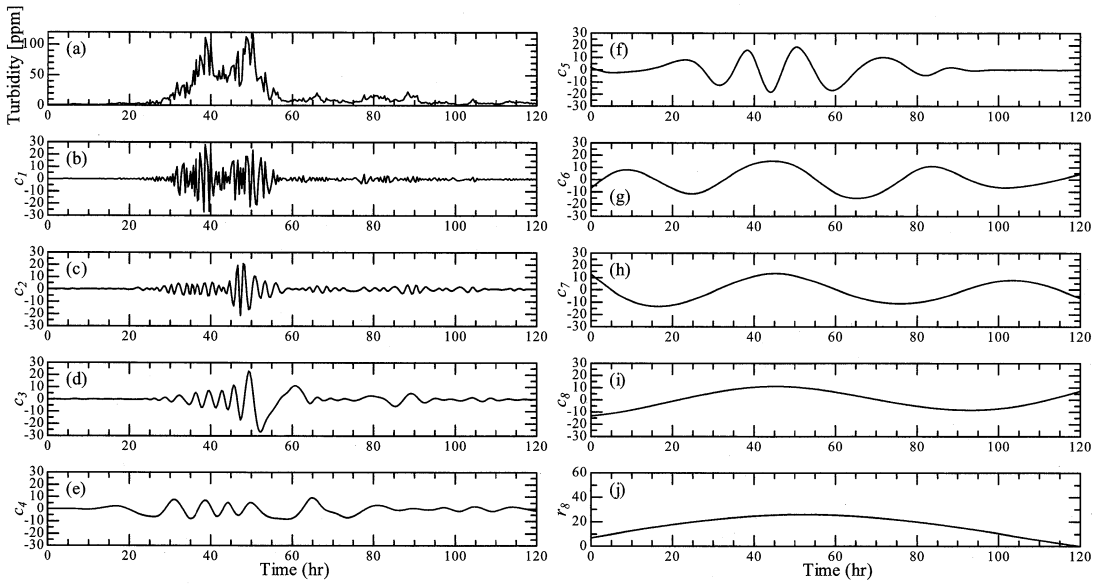
式(10)と(12)より，振幅 $a(t)$ と周波数 $f(t)$ はともに時間の関数で得られる．各IMFの $a(t)$ と $f(t)$ を用いることで，元のデータ $x(t)$ はFourier展開の一般形として以下のように表すことができる．

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\cdot exp\left(i\cdot 2\pi\int_0^T f_j(t)dt\right)+r_n(t) \tag{13}$$

(3) Hilbertスペクトル

式(10)で得られた瞬時振幅の時間－周波数分布は，Hilbert振幅スペクトル，二乗値のそれはHilbertエネルギースペクトルと呼ばれる．本研究では，Hilbertエネルギースペクトルを用い，ここでは簡単のためにHilbertスペクトル $H(f,t)$ と表記する．

Hilbertスペクトルの時間分解能はデータの時間サンプリング Δt によって決まる．周波数に関しては，最低周



(a) 濁度の時系列（解析対象データ），(b)～(i) IMF(c_1～c_8)，(j) 残余成分(r_8)

図-1　濁度の時系列およびEMDによるモード分解の結果

波数f_{min}は$1/T$（T:データ長）であり周波数分解能Δfに等しい．一方，最高周波数f_{max}は

$$f_{\max} = \frac{1}{l\,\Delta t} \tag{14}$$

で得られる．ここでlはHilbert変換で瞬時周波数を定義するために必要なsine波を表現するために最低限必要とされるデータの数である（l=5）．

Hilbertスペクトル$H(f,t)$を時間軸方向に積分することにより，Fourierスペクトルに対応したHilbert周波数スペクトル$h(f)$が得られる．

$$h(f) = \int_0^T H(f,t)dt \tag{15}$$

Fourierスペクトルでは，その周波数を持った正弦波がデータ全体にわたってあるエネルギーを持って存在していることを示しているのに対して，$H(f,t)$はある時間でその周波数を持つ成分が存在する可能性を表し，さらに$h(f)$は，時間軸上で局所的に存在する周波数成分の全エネルギーに対する寄与の度合いを示している．したがって，$h(f)$は局所的に存在する変動の有無を検出することが可能であると考えられる．

3. 濁度データへの適用

本研究では，静岡県天竜川河口沖合約2km（水深約18 m）地点で2006年9月3日～10月3日に実施された観測で取得したデータのうち，特に濁度の変化が顕著であった9月22日～26日の5日間（120時間）のデータを用いた．解析には，10分毎に1秒インターバルで30秒間（30サンプル）ずつ取得したデータを20分毎（60サンプル）に平均した値を用いた．

（1）経験的固有モード分解

図-1は，(a) 解析する濁度データ，(b)～(i) EMDで得られた各IMF(c_1 ～ c_8)と (j) 残余成分(r_8)の時系列を示している．Fourier変換では解析データが$n/2$個（n：データ数）の正弦波（単一振幅・周波数）に分解されるのに対して，EMDでは振幅や周波数の緩やかな変化を含んだ僅か8個のIMFと残余成分の合計9成分に分解された．**図-2**は，EMDで得られたIMFと残余成分を用いて，式(7)からデータを再構成した場合の元データとの差を示している．全ての時間でその差は非常に小さく，この結果は，EMDによってデータの情報を欠落することなく，元データがIMFおよび残余成分へ分解されていることを示している．

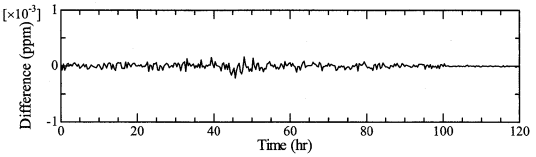


図-2　元データと再構成されたデータの誤差

表-1は，各IMFのエネルギーと全データに対する各IMFのエネルギー寄与（%），代表周波数および周期を示している．各IMFのエネルギーE_jは，瞬時振幅$a_j(t)$を用いて以下の式で求めている．

$$E_j = \int^T \left(a_j(t)\right)^2 dt \tag{16}$$

また，各IMFの代表周期$f_{wm,j}$としては，Zhao（2005）の各時間における重み付き瞬時周波数の定義に倣い，以下のように定義し，周期$T_{wm,j}$はその逆数で求めている．

$$f_{wm,j} = \frac{\int^T a_j(t)\cdot f_j(t)dt}{\int^T a_j(t)dt} \tag{17}$$

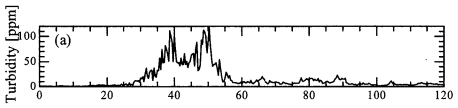
EMDによってIMFは高周波数のモードから順に得られていることが$f_{wm,j}$の一覧から確認できる．ただし，c_1とc_2には，$f_{wm,j}$の差があまり無いため，間欠的なデータが局所的に含まれることによって，得られたIMFに明らかに異なる周波数帯が混ざり合ってしまうmode mixing（Huangら，1999）が生じている可能性が考えられる．Mode mixingに対して，Huangら（1999）は用いるデータや得られたIMFから判断してIntermittency testを行うことを提案している．しかし，Huangら（1999）は，その詳細な方法を明らかにしていない．そのため，Liら（2005）はWTを利用したIntermittencyの除去方法を提案している．ここでは，mode mixingの可能性は考えられるものの，その対策は今後検討課題として，今回はその影響を考慮しないものとした．

表-1　各IMFのエネルギー，周波数および周期

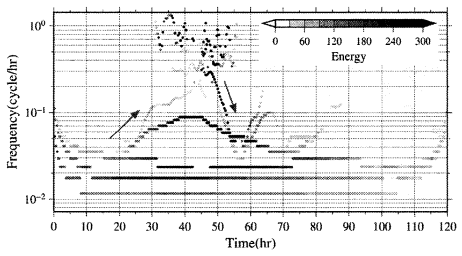
IMF (j)	E_j [(ppm)^{2}s]	%	$f_{wm,j}$ [Hz]	$T_{wm,j}$ [hr]
1	24910	10.9	1.990E-04	1.4
2	8456	3.7	1.300E-04	2.1
3	20706	9.1	4.744E-05	5.9
4	9882	4.3	2.535E-05	11.0
5	38012	16.7	1.619E-05	17.2
6	49110	21.6	7.151E-06	38.8
7	44645	19.6	4.931E-06	56.3
8	31924	14.0	3.132E-06	88.7

(2) Hilbertスペクトル

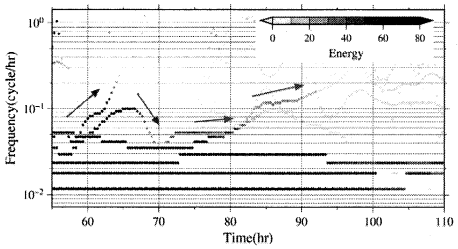
EMDで得られたIMFにHTを適用することにより，瞬時周波数と瞬時振幅が時間の関数として得られ，これによりHilbertスペクトルの時間－周波数分布を得ることができる．**図-3(b)**は縦軸に瞬時周波数，横軸に時間をとり，エネルギーを濃淡で表すことでエネルギーの時間変化の様子を示している．濁度の時系列とHilbertスペクトルを比較すると，濁度変化に伴った変動周波数とエネルギーの変化の様子を確認することができる．時系列で確認できるT=40hrの高濁度発生時に向かって瞬時周波数が高周波数側に変化し，T=50hr付近から濁度の低下と共に瞬時周波数が低周波数側へ変化していることが確認できる．この傾向は，瞬時周波数を詳しく調べてみると，T=40~50hrの高濁度イベント時だけでなく，それぞれT=65，80，90hr前後の小さな濁度変動の時にもエネルギーレベルの違いはあるものの，同様の周波数変化が確認できる（**図-3(c)**）．これは，濁度の増加は，外力条件の強化に伴う巻き上がりや移流などの比較的変動の早い（変動の周波数が高い）現象によって発生しているためと考えられ，一方，濁度の低下は濁質の沈降や拡散などの比較的変動の緩やか（変動の周波数が低い）現象によって生じていると考えられる．したがって，濁度は一度，高濁度になると濁質が浮遊するため，特に濁質が粒径の小さな砂の場合には，直ぐに濁度が下がらず，濁度増加の時よりも低下の時の方が時間的にゆっくりとした変動を示しているものと考えられる．



(a) 濁度の時系列（**図-1(a)の再掲**）



(b) Hilbertスペクトル（濁度の変動エネルギーの時間－周波数分布）



(c) Hilbertスペクトル（T=55～110 hr，エネルギーコンターのスケールを拡大）

図-3　濁度の時系列とHilbertスペクトルの比較

また，幾つかのIMFの時間変化（**図-1**）からも，濁度低下時に変動の周波数（周期）が変化していることが容易に確認できる．この特性は，**図-1(a)**に示した120時間以外のデータで，全体的に濁度レベルの低い状況での濁度変化においても，定性的な特徴として確認できた．したがって，瞬時周波数の変化は濁度の増加・低下プロセ

スの変化（移行）を検出していると考えられ，その周波数変化を把握することにより，濁度の変化プロセスの把握に利用できると考えられる．

図-4は同じ濁度データに対するFourierスペクトルとHilbert周波数スペクトルの比較を示しているが，スペクトルピークの出現周波数に違いが見られる．ただし，スペクトルピークの違いを容易に認識するために，Fourierスペクトルはその値を全て1/10している．Hilbert周波数スペクトルのf=0.088cycles/hr（t=11.3hr）のピークは，時系列データ（**図-1(a)**）のT=38hrと50hrに確認できる高濁度ピークの発生間隔に相当することが確認できた．

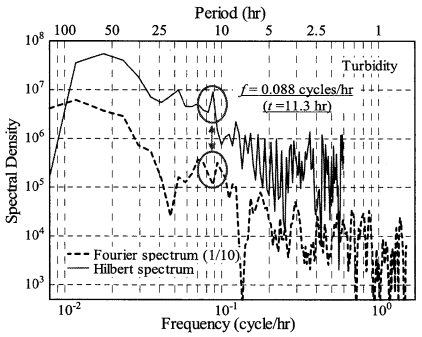


図-4　FourierスペクトルとHilbert周波数スペクトルの比較（Fourierスペクトルは値を全て1/10している．）

6. 結語

本研究では沿岸域で得られた濁度の時系列データの解析に，経験的モード分解法（EMD）とHilbert変換（HT）を組み合わせたHilbert-Huang変換（HHT）を適用し，その周波数－時間解析を行った．また，Hilbert周波数スペクトルとFourierスペクトルを比較することにより，非定常性を含む現地観測データの解析において，HHTの有効性を明らかにした．

EMDでは，元データを少数個の固有モード（IMF）と残余成分に分解することができた．さらに，EMDで得られた各IMFにHTを適用することにより，瞬時周波数と瞬時エネルギーを求め，その時間変化を把握した．それにより，濁度データでは，濁度変化に対応した瞬時周波数の時間変化が確認でき，以下のことが明らかとなった．

(1) 濁度の発生や増加時には，瞬時周波数は高周波数側へ変化する．これは，濁度の発生や増加は波浪や流れなどの強化に敏感に反応するため，このとき濁度が頻繁に変動するためであると考えられる．

(2) 外力が治まりだすと，瞬時周波数は低周波側へシフトする．このとき，濁度の変動は拡散や沈降によって生じているため，比較的緩やかな変動形態に移行するためであると考えられる．したがって，瞬時周波数を調べることにより，上記のようなプロセスの移行（状況）を推定することが出来ると考えられる．

また，Hilbert周波数スペクトルでは，局所的に繰り返し発生するイベント（ここでは高濁度状態）の発生間隔を周波数空間上で確認することが出来た．Fourierスペクトルではこの検出は不可能で，HHTの有効性が示された．

謝辞：本研究は科学技術振興調整費「先端技術を用いた動的土砂管理と沿岸防災」（代表：青木伸一，豊橋技術科学大学）の関連研究として実施されたことをここに記します．

参考文献

Guedes Soares, C. and Z. Cherneva (2005) : Spectrogram analysis of the time-frequency characteristics of ocean wind waves, Ocean Engineering, Vol.32, pp. 1643-1663.

Huang, N.E., Z. Shen and S.R. Long (1999) : A new view of nonlinear water waves -- the Hilbert spectrum, Ann. Rev. Fluid Mech. 31, pp. 417-457.

Huang, N.E., Z. Shen, S. R. Long, M.C. Wu, S.H. Shih, Q. Zheng, C.C. Tung and H.H. Liu (1998) : The empirical mode decomposition method and the Hilbert spectrum for non-stationary time series analysis. Proc. Roy. Soc. London, A454, pp. 903-995.

Lapointe, M.F. (1996) : Frequency spectra and intermittency of the turbulent suspension process in a sand-bed river, Sedimentology, Vol.43, pp. 439-449.

Li, H., L. Yang and D. Huang (2005): The study of the intermittency test filtering character of Hilbert-Huang transform, Journal: Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 70, pp.22-32.

Paul, A.H., W.W. David and J.M. Kaihatu (2005) : A comparison of the energy flux computation of shoaling waves using Hilbert and Wavelet spectral analysis techniques, The Hilbert-Huang Transform in Engineering (Eds by N.E. Huang and N.O. Attoh-Okine), CRC Press, pp.83-96.

Reeve, D., Y. Li, M. Lark and D. Simmonds (2007) : An investigation of the multi-scale temporal variability of beach profiles at Duck using wavelet packet transforms, Coastal Engineering, Vol.54, pp. 401-415.

Schlurmann, T., M. Bleck and H. Oumeraci (2002) : Wave transformation at artificial reefs described by the Hilbert-Huang Transformation, Proceedings of the 28th International Conference on Coastal Engineering (ICCE 2002), pp. 1791-1803.

Suzuki, T., A. Okayasu and T. Shibayama (2007) : A numerical study of intermittent sediment concentration under breaking waves in the surf zone, Coastal Engineering, Vol.54, pp. 433-444.

Veltcheva, A.D. (2002) : Wave and group transformation by a Hilbert spectrum, Coastal Engineering Journal, Vol.44, pp. 283-300.

Zhao, Z. (2005) : Noninvasive diagnosis of coronary artery disease based on instantaneous frequency of diastolic murmurs and SVM, IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference, pp. 5651-5654.