

気泡関数要素を用いた有明海潮流の有限要素解析

Finite element analysis of tidal current in Ariake Sea using bubble function element

桐 博英¹・白谷栄作²・丹治 肇³

Hirohide KIRI, Eisaku SHIRATANI and Hajime TANJI

The selective lumping scheme has been commonly used in the FEM analysis of tidal currents. The scheme is enable to get the numerical solution fastly and stably, despite it causes dull results because of introducing heavy artificial diffusion. A combination of the elements which satisfy the inf-sup condition should be used to modify the finite element analysis of tidal currents. In this paper, the finite element model in which employed the bubble-function element was developed and the analysis of tidal current in Ariake sea was carried out for the evaluation of the model. The analysis results were in good agreement with for the observed ones the tide levels and harmonic constants of tidal current.

1. はじめに

沿岸域における高潮などの影響を正確に予測するには、海域の水理現象を忠実に再現することが重要である。近年の地理情報の充実に伴い、沿岸災害被害の影響評価に対しても単なる湛水域の予測だけでなく、水利施設の能力に対する影響の評価が期待されるようになってきた。水利施設を解析に取り込むには、地形形状を忠実に再現する必要があり、有限要素法の導入は効果的である。

浅水長波流れの有限要素解析では、これまでKawaharaら(1982)が開発した、質量行列を集中化し、混合質量行列を併せて導入したモデルが潮流解析にも用いられてきた(Kawahara・Kashiyama, 1984)。このモデルは、計算の高速化に加えて安定化が図られる一方で、過剰な人工粘性の付加が計算結果に影響を与えることが知られている(高梨・清川, 1984)。潮流解析で用いられる浅水長波方程式の有限要素解析では、Navier-Stokes方程式とは異なり、同次補間による離散化で解くことができる。しかし、水位と流速を同じ節点上に配置した解析では、非物理的な振動が発生し計算が不安定になることが知られている。この非物理的な振動は、差分法で用いられているスタッガード格子で抑えることができるが、これは、有限要素法では流速と水位で異なる補間関数を採用する混合補間を用いることに相当する。このため、浅水長波流れの有限要素解析においても、気泡関数を線形化した擬似気泡関数の導入が試みられるようになってきた(Mewis・Holtz, 1993; Atkinsonら, 2004など)。さらに、文屋・吉村(2006)は、東京湾の潮流解析を例に、擬似気泡関数を導入したモデルと混合質量行列を導入した従

来のモデルを比較し、擬似気泡関数の導入により減衰の少ない解析結果が得られることを示している。

本研究では、有明海の複雑な潮流を解析するため、線形化されていない気泡関数要素を用いたモデルを適用し、再現性を検証した。

2. 気泡関数を用いた有限要素モデル

(1) 基礎方程式

本研究で用いる基礎方程式は、式(1)~(3)で表される非線形浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Du) + \frac{\partial}{\partial y}(Dv) = q \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + F_x + \frac{\tau_x^s - \tau_b^x}{\rho_w D} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + F_y + \frac{\tau_y^s - \tau_b^y}{\rho_w D} \quad (3)$$

ここで、 u , v : それぞれ、 x , y 方向流速(m/s), D : 水深(m), ξ : 水位(m), t : 時間(s), q : 単位幅流入量(m²/s), g : 重力加速度(m²/s), f : coriolisパラメータ, ρ_w : 海水の密度である。 τ_s , τ_b は、それぞれ、風および底面による摩擦項であり、上付き添え字は方向を示す。また、粘性項 F_x , F_y は、 A_h を水平渦動粘性係数として式(4), (5)で評価した。

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(2A_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ A_h \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \quad (4)$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ A_h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2A_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5)$$

(2) 数値計算法

非物理振動を抑制するにはinf-sup条件を満たすことが有効であり、そのためには、有限要素法の定式化の際に、流速の補間関数を水位の補間関数よりも1次以上高次のものを採用する必要がある。inf-supを満足できる補間関

1 正 会 員 (独法)農業・食品産業技術総合研究機構
2 博(農)(独法)農業・食品産業技術総合研究機構
3 正 会 員 農博 (独法)農業・食品産業技術総合研究機構

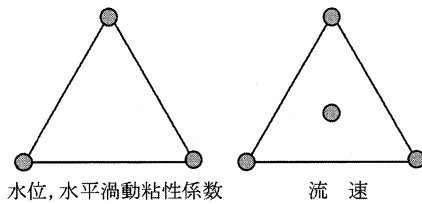


図-1 各変数の節点配置

数の組み合わせの中で最も単純なのが、三角形要素の重心に気泡関数と呼ばれる高次の関数を取り入れた要素である。気泡関数を導入することで流速が4節点となり、三角形2次要素（8節点）よりも少ない節点数で計算ができるという利点がある。

本研究で用いた要素の節点配置を図-1に示す。各要素を用いた流速および水位の補間関数 Φ_i , Ψ_i は、それぞれ式(6)、式(7)のとおりである。

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & \\ & 1 & -1/3 \\ & & 1 & -1/3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ 27L_1L_2L_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、下付添え字 $i=1\sim3$ は、三角形頂点上の節点における補間関数、同 $i=4$ は、気泡関数における補間関数を示す。また、 $L_i (i=1, 3)$ は面積座標であり、三角形要素の面積 Δ 、三角形要素内部の任意の1点と三角形要素の2節点で構成される3個の小三角形の面積 Δ_i から式(8)で表される。

$$L_i = \Delta_i / \Delta \quad (8)$$

連続式および運動方程式の有限要素方程式を式(9)～式(11)に示す。ここで、太字で示されるのは、実際の有限要素方程式を積分して得られる係数行列であるが、紙面の制約上、各係数行列の詳細は省略する。

$$\mathbf{M}\zeta_j^{n+1} = \mathbf{M}\zeta_j^n - \Delta t (\mathbf{N}_x D_j u_k + \mathbf{N}_y D_j u_k - \mathbf{M}q_j) \quad (9)$$

$$\mathbf{O}u_j^{n+1} = \mathbf{O}u_j^n - \Delta t (\mathbf{P}_x u_j u_k + \mathbf{P}_y v_j u_k - f\mathbf{O}u_j + g\mathbf{Q}_x \zeta_j - \mathbf{R}_x - \mathbf{S}_x) \quad (10)$$

$$\mathbf{O}v_j^{n+1} = \mathbf{O}v_j^n - \Delta t (\mathbf{P}_x u_j v_k + \mathbf{P}_y v_j v_k + f\mathbf{O}v_j + g\mathbf{Q}_y \zeta_j - \mathbf{R}_y - \mathbf{S}_y) \quad (11)$$

式(9)～(11)において、係数行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{O}$ は質量行列と呼ばれ、各式の左辺の質量行列を対角成分に集中化した集中質量行列を用いることで逆行列の計算が単純になり、計算速度の向上が図られる。さらに、Kawaharaら(1982)のモデルでは、右辺第1項の質量行列を集中質量行列と線形結合した混合質量行列としている。これにより、質量行列の集中化に伴い付加される人工粘性を制御し、計

算の安定化を図っている。本研究では、時間方向には、2次精度の陽的予測子修正子法により離散化を行い、集中質量行列を用いて計算の高速化を図った。ただし、質量行列の集中化による影響を少なくするため、マルチパスアルゴリズム (Doneaら, 1984) を導入した (反復回数: 3回)。

なお、本論文で行った解析では、干潟の干出・没水を考慮する必要がある。有限要素法による移動境界の処理法には、要素毎に水陸を判定し、陸域を計算から除外する方法 (Kawaharaら, 1984) のほか、石川ら (2003) のように Time Splitting 法を用いて水際線を追跡する方法がある。本研究では、気泡関数要素の導入による潮流の再現性を確認することが目的であることから、移動境界の処理については、前者を用いることとした。

3. 数値解析例

(1) 解析領域および条件

解析例として有明海の潮流の再現計算を行った。解析領域は、図-2のように、有明海全域および長崎半島野母崎と福江島の間地点付近までであり、国土総合開発事業調整費有明環境調査 (農林水産省他, 2003) におけるモデル (以下、国調費モデル) 解析に倣って設定した。

解析領域を三角形要素に分割し、要素サイズは、有明海湾奥部の Zone 1 で 95～430m、諫早湾内の Zone 3 で 80～320m である。海底標高は、国調費モデルで用いられた 900m 格子のデータを線形補間した。

境界条件には外潮位を与え、国調費モデルで用いられた調和定数から13分潮を合成した潮位を与えた。また、外力条件として、主要河川の日流量を各時間に均等配分して流入させるとともに、風速を与えた。その他の計算

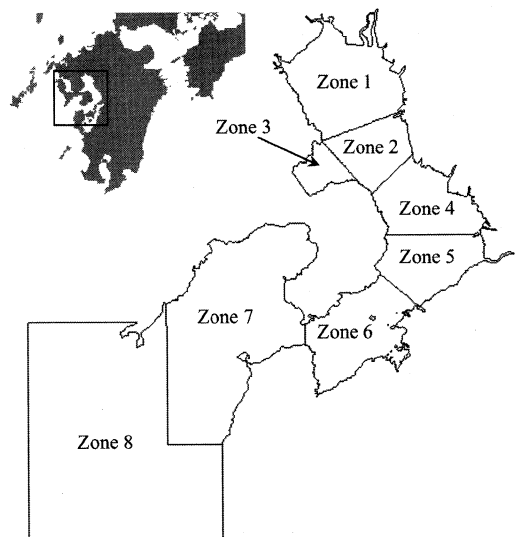


図-2 解析領域

表-1 計算条件一覧

項 目	パラメータ
分 潮	K1, O1, P1, Q1, M2, S2, N2, K2, Sa, Ssa, Mm, Msf, Mf
計算時間増分 (s)	0.5
水平渦動粘性係数	Smagorinsky
Colioris 係数 (1/s)	$7.9 \cdot 10^{-5}$
粗度係数	0.025
移動境界閾値 (m)	0.05
河川流入	筑後川, 矢部川, 六角川, 嘉瀬川, 菊地川, 白川, 緑川, 塩田川

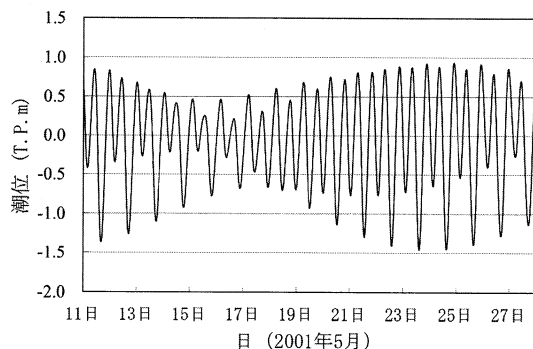


図-3 外潮位の時間変化

に用いたパラメータは、表-1のとおりである。

解析は、有明海海域環境調査（海上保安庁水路部，2001）の15昼夜の観測結果と比較するため，潮流の再現期間を2001年5月11日～5月27日（測点により，潮流観測結果の調和解析期間が異なるため17日間）とした。ただし，計算の助走期間を含め，計算の開始を5月1日とした

(2) 解析結果

モデルの検証のため，図-4に示す地点において，観測結果と解析結果の比較を行った。口之津，三角および大浦の潮位観測地点における毎正時の潮位観測結果（気象庁，2002）と解析結果を比較したのが図-5である。解析結果は，有明海湾口部に近い口之津で最も再現性が高く，

湾奥ほどばらつきが大きくなるが，全体として良好な結果を得ていると考えられる。潮位観測結果と解析結果の平均誤差は，口之津で0.1m程度であった。これらの誤差の要因としては，解析には気圧変化が考慮されていないことなどが考えられる。また，比較した3地点いずれにおいても，最大潮位付近で解析結果が低めになる傾向が見られた。

潮流の解析結果および観測結果を調和分解して得られる10分潮のうち，主要4分潮について調和定数を比較したのが図-6である。比較に用いた潮流観測のデータは，水面下3mのものである。ただし，St.7およびSt.10では3層の観測データがあったため，平均値と比較した。潮流速は，有明海の湾形状の影響で湾口付近では東方流速成分，湾奥に向かうにつれて北方流速成分が卓越する。このため，測点番号が大きいほど東方流速成分の振幅が大きくなる。図-6では，白抜きが観測結果，黒が計算結果を示す。各調和定数を比較すると，振幅については，

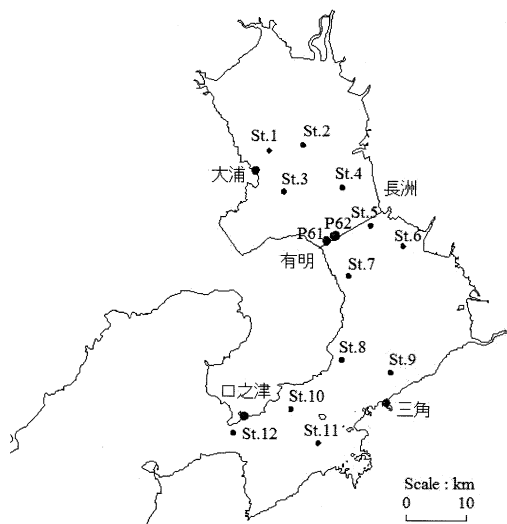


図-4 観測点位置図

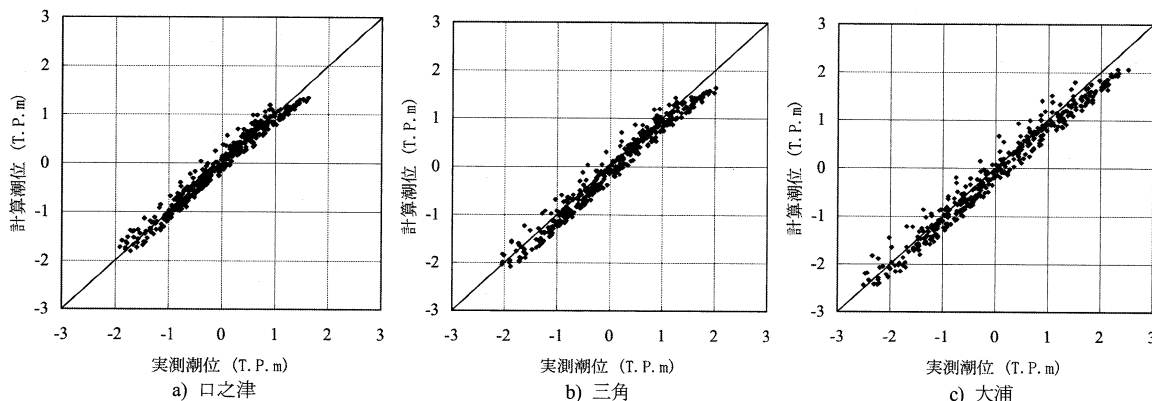


図-5 計算潮位と実測潮位の比較 (2001年5月11日～5月27日)

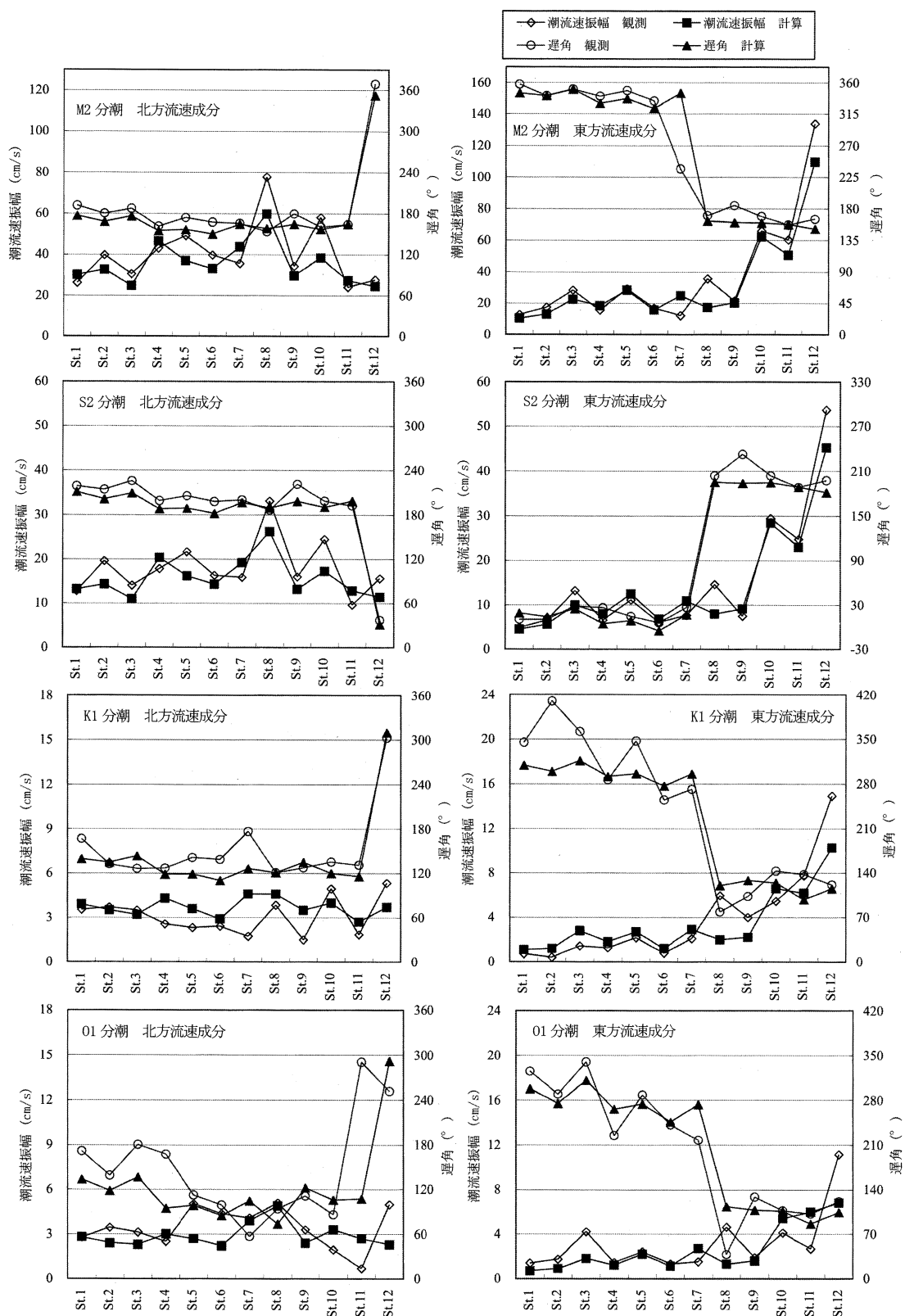


図-6 主要4分潮の流速振幅と遅角分布の比較

表-2 有明～長洲ライン上の流速増幅率の比較

解析結果					水理模型実験結果（桐ら，2007 を元に作成）						
	ライン 中央	P61	増幅率 (%)	口之津 潮位差		ライン 中央	P61	増幅率 (%)	P62	増幅率 (%)	口之津 潮位差
平均流速	0.497	0.634	127.6	3.18 m	平均流速	0.572	1.019	178.2	0.734	128.3	
上げ潮最強流速	0.667	0.854	128.1		上げ潮最強流速	1.067	1.728	162.0	1.277	119.7	3.80 m
下げ潮最強流速	0.911	1.053	115.5		下げ潮最強流速	0.989	1.523	154.0	1.216	122.9	
					平均流速	0.264	0.426	161.3	0.321	121.5	
					上げ潮最強流速	0.475	0.729	153.3	0.580	122.0	2.16 m
					下げ潮最強流速	0.495	0.758	153.1	0.601	121.3	

全般的に解析結果が小さい傾向が見られるが、いずれの分潮においても、観測点の位置に伴う変動傾向も一致しており、有明海全域で良好な結果が得られていると考えられる。

有明～長洲ライン上の島原沖とライン中央での流速を水理模型実験と比較したのが表-2である。同ライン上の流速分布については、島原半島に近いほど速い流速が生じることが現地調査(例えば、小松ら, 2004)や桐ら(2007)による有明海全域を対象とした水理模型実験でも確認されている。今回の解析と水理模型実験では、潮汐などの諸条件が同じではないので、両者を単純に比較することはできないが、可能な限り比較できるよう、Coriolisの力と河川流入、風を除いた解析結果と比較した。なお、表-2の増幅率は、ライン中央の流速と比較してP61またはP62地点の流速がどれだけ大きくなったかを示したものである。水理模型実験では、有明海灣口付近の口之津での潮位差の違いにより、P61地点で見られた増幅率の差がP62地点では見られない。解析結果では、P61地点の流速からもとめた増幅率が実験結果よりはかなり小さく、P62地点の値に近い結果となった。これは、海底地形の元となっている国調費モデルの水深データが900m格子のため、境界付近の水深に模型と差があること、模型の平面形状の精度の問題などが理由として考えられる。

4. まとめ

本研究では、気泡関数要素を用いた有限要素モデルを構築し、有明海の潮流解析によりモデルの再現性を検証した。その結果、潮流速の観測結果の調和定数をほぼ良好に再現することができた。気泡関数要素において中心に付加される節点は仮想的なものであり、実際の有限要素分割では考慮する必要がない。このため、本解析モデルは、従来の解析モデルで用いられた要素分割を変更する必要がなく拡張性が高い。今後は、本モデルの3次元化を図るとともに沿岸域の災害予測へ発展させていきたいと考えている。

なお、本研究の一部は、文部科学省の科学研究費補助金(課題番号: 18688014)の助成を得た。ここに記し、深謝の意を表する。

参 考 文 献

- 石川忠晴・工藤健太郎・中村恭志・荻籠泰彦 (2003): CIP法とFEMの組み合わせによる週上波の新計算法に関する基礎的検討, 海岸工学論文集, 50巻, pp.136-140.
- 海上保安庁水路部 (2001): 有明海海域環境調査解析 報告書. 気象庁 (2002): 潮汐観測, 第7集, 第5号
- 桐 博英・白谷米作・高橋紀之・丹治 肇・中田喜三郎 (2007): 水理模型実験による諫早湾干拓潮受け堤防の影響の評価, 海岸工学論文集, 54巻, pp.386-390.
- 小松利光・矢野真一郎・齋田倫範・松永信博・鶴 賢一・徳永貴久・押川英夫・濱田孝治・橋本彰博・武田 誠・朝位孝二・大串浩一郎・多田彰秀・西田修三・千葉 賢・中村武弘・堤 裕昭・西ノ首英之 (2004): 北部有明海における流動・成層構造の大規模現地観測, 海岸工学論文集, 51巻, pp.341-345.
- 高梨和光・清川哲志 (1984): 浅海長波方程式の有限要素解析における問題点とその解決法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp.118-122
- 農林水産省, 経済産業省, 国土交通省, 環境省 (2003): 平成14年度国土総合開発事業調整費 有明海海域環境調査報告書.
- 文屋信太郎・吉村忍 (2006): Quasi bubble-function要素を用いた混合型有限要素法による潮流計算, 日本計算工学会論文集2006年号, No.20060032, pp.1-10.
- Atkinson, J. H., J. J. Westerink and J. M. Hervouet (2004): Similarities between the quasi-bubble and the generalized wave continuity equation solutions to the shallow water equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol.45, pp.689-714.
- Donca, J., S. Giuliani, H. Laval and L. Quartapelle (1984): Time-accurate solution of advection-diffusion problems by finite elements, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg. Vol.45, pp.123-145.
- Kawahara, M., H. Hirano, K. Tsubota and K. Inagaki, (1982): Selective lumping finite element method for shallow water flow, Int. J. Numer. Meth. in Fluids, vol.2, pp.89-112.
- Kawahara, M. and M. Kashiwayama (1984): Selective lumping finite element method for nearshore current, Int. J. Numer. Meth. in Fluids, vol.4, pp.71-97.
- Mitsuyasu, H. and Honda, T. (1974): The High Frequency Spectrum of Wind Generated Wave, J. Oceanog. Soc. Japan, Vol.30, No.4, pp..
- Mewis, P. and K. P. Holtz (1993): A Quasi bubble-function approach for shallow water waves, Advances in Hydro-Science and -Engineering, Vol.1, pp.768-774.