格子ボルツマン法に基づく津波遡上シミュレーション手法の開発

Development of the Tsunami Run--up Simulations Based on the Lattice Boltzmann Method

大家隆行¹•越村俊一²•荒木健³

Yakayuki OIE, Shunichi KOSHIMURA and Takeru ARAKI

The Lattice Boltzmann Method (LBM) has been developed as a new and promising numerical model to solve the fluid dynamics. In the present study, the applicability of LBM for the Shallow Water Equations is discussed in terms of tsunami run--up problem and its accuracy that relates spatial resolution. As a result, we found that LBM can be applied to the tsunami run--up problems, and the LBM Solution has the accuracy as same as that of Finite Difference Method in the same spatial resolution.

1. はじめに

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM)とは、分子動力学の理論に基づく数値流体解析手 法(CFD)であり、連続体である流体を格子上を移動する 仮想的な粒子の集合体と仮定して、粒子が繰り返す格子 上の衝突と並進過程をミクロに追跡しながらマクロスケー ルでの流動現象を計算する(Chenら, 1998). LBMの利 点は、陽的スキームで表現された非常に効率の良い計算 手法であると同時に、様々な空間スケールの複雑な流れ 場に対しても簡便なアルゴリズムで計算できることで, まったく新しいCFDソルバーとして期待されている. 海 岸工学における既往の研究では、木原・山下(2003)によ り液・液2相流Couette-Poeseuille流れの解析が、石川ら (2004, 2006)により浅水長波の解析が行われている.し かしながら、津波の伝播・遡上計算をLBMで実施する にあたり、移動境界問題としての津波の陸上遡上計算へ の適用に関しては全く検討がなされておらず、加えて空 間分解能に関連した計算精度の検討も十分行われていな いのが現状である.

本研究では、新しい津波ソルバーとしてのLBMの構 築を目的とし、陸上遡上スキームの開発、および計算精 度について基礎的な検討を行う.また、ダムブレーク、 角柱周り流れ、津波の浅水変形・遡上の実験値および開 水路流れ・1次元潮流解析の理論解等をベンチマークと してLBMによる解析を行い、入射波波長の空間分解能 との関連で評価し、計算精度に対応した格子サイズの選 定基準についても検討する.

2. 格子ボルツマン法

1	工修 パシフィックコンサルタンツ株式会社
2正会員	博(工)東北大学准教授 大学院工学研究科
3 学生会員	東北大学 大学院工学研究科

(1) 格子ボルツマン法の概要

LBMは粒子法の1種として分類される計算手法であり, 格子気体法(熱力学を扱う手法)から発展してきた.従来 の巨視的な視点での離散的な連続式を支配方程式とする 計算手法とは異なり,微視的視点における粒子の運動を 計算する手法で,流体を流体内に仮想的に配した格子上 で衝突と並進(移動)とを繰り返す多数の粒子の集合体と 捉え,粒子分布関数を用いて質量・運動量保存則を満た すように,水深や流速等の巨視的変数を求める.LBM の特徴として,1)計算アルゴリズムが簡便であり,高次 の物理現象を高分解能で予測出来る,2)局所平衡分布関 数をNavier-Stokes式に対応した形とするだけで浅水理論 だけではなく3次元非静水圧モデルへの拡張が可能であ る,ことなどが挙げられ,既往の研究では多孔物質内の 流れや混相流などの流れの再現に成功している.

(2) 2次元9速度格子モデル

平面2次元浅水理論では,格子パターンに図-1に示す2 次元9速度モデル(例えばZhou, 2004)を用い,格子上の 速度ベクトルe_aは式(1)で定義する。

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} & \alpha = 0\\ e \times \left[\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \sin\frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right] & \alpha = 1,3,5,7\\ \sqrt{2}e \times \left[\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \sin\frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right] & \alpha = 2,4,6,8 \end{cases}$$
(1)

ここで、eは計算に用いる時間・空間格子を用いて $e=\Delta$ $x/\Delta t$ と定義し、 e_a は α 方向の並進速度ベクトル、 f_a は粒



図-1 LBMの2次元9速度格子

子分布関数でありeaを持つ粒子の総数を表す.

(3) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン方程式は、衝突演算項に格子BGKモ デル(Qianら, 1992)を用いて,式(2)で表される.

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$$
$$= -\frac{1}{\tau} \{ f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \} + \frac{\Delta t}{6e^{2}} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{F}$$
(2)

f²は局所平衡分布関数,Fは外力項(後述)である. τは 単一時間緩和係数で,粘性に関するパラメータvを用い て,

$$\tau = \frac{3\nu}{e^2\Delta t} + \frac{1}{2} \tag{3}$$

で表される.式(2)左辺は粒子の並進過程,右辺第一項 は粒子の衝突過程,第二項は外力項を表し,以上の支配 方程式から陽的に未知数faを求め,巨視的変数である水 深・流速を求める.

(4) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数とは格子点上において流体が平衡状 態に達したときの粒子分布であり,浅水理論における局 所平衡分布関数は式(4)で表される.

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2}u_iu_i \\ \alpha = 0 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2}e_{\alpha}u_i + \frac{2h}{2e^4}e_{\alpha i}e_{\alpha j}u_iu_j - \frac{h}{6e^2}u_iu_i \\ \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2}e_{\alpha}u_i + \frac{h}{8e^4}e_{\alpha i}e_{\alpha j}u_iu_j - \frac{h}{24e^2}u_iu_i \\ \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases}$$
(4)

ここで、hは全水深、u, u, u, u, iは各方向の流速、gは重力加 速度である. LBMにおける平衡状態とは熱力学的平衡 状態を指し、この時密度 ρ の粒子の速度uは、x-y平面で は以下のMaxwell分布に従うと仮定する.

$$f_{\alpha}^{eq} = \frac{\rho}{2\pi RT} \exp\left(-\frac{(e-u)^2}{2RT}\right)$$
(5)

Rは気体定数,Tはその温度をそれぞれ表す.また, $u = \sqrt{u_{ii}^2 + u_i^2}$ である.

(5) 外力項

外力項は地形の凹凸に起因する項F_nおよび底面摩擦 に関する項F_nで,それぞれ次式で表現する.

$$F_{zb} = -gh\frac{\partial z_b}{\partial x_i} \tag{6}$$

$$F_b = -\rho g \left(\frac{n_b}{h^{\frac{1}{6}}}\right)^2 u_i \sqrt{u_j u_j} \tag{7}$$



図-2 遡上先端とBounce.back条件の概念図

 z_i は底面高さ, n_i はマニングの粗度係数である. ここで は式(6)右辺の差分にCentred Schemeを用いて次式のよう に表現する.

$$-g\frac{[h(x,y)+h(x+\Delta x,y)]}{2}\frac{[z_b(x+\Delta x,y)-z_b(x,y)]}{\Delta x}$$
(8)

(6) 流入境界条件

ここでは左端からの正弦入射波を考え、左端からの入 射条件としてZhou(2004)による流入条件を適用する.

$$f_1 = f_5 + \frac{2hu}{3e} \tag{9}$$

$$f_2 = \frac{hu}{6e} + f_6 + \frac{f_7 - f_3}{2} \tag{10}$$

$$f_8 = \frac{hu}{6e} + f_4 + \frac{f_3 - f_7}{2} \tag{11}$$

(7) 津波遡上先端条件

Zhou(2004)によって定式化されたLBMのスキームに, non-slip条件の1種であるBounce-back条件を用いて,移 動境界問題として津波遡上を取り扱うためのスキームを 新たに付加する.図-2に斜面遡上先端部の概念を示す. 計算の手順は以下である.

a) h(x, t)+z(x)-z(x+1) > 0の場合(図-2左)

津波遡上先端部xにおける水位が隣接の格子x+1の標高 よりも高い場合には、特に境界条件を設けず、x = x + 1で の巨視的変数h(x+1, t)を

$$h(x+1,t) = h(x,t) + z(x) - z(x+1)$$
(12)

とし, *u*(*x*+1, *t*)を*h*(*x*+1, *t*)を用いて連続式から便宜的に 与える.





b) h(x,t)+z(x)-z(x+1)<0の場合(図-2右)

津波遡上先端部xにおける水位が隣接の格子x+1の標高 よりも低い場合には、(2)式から計算されたf(x+1,t)を0 とする.また、津波先端部に仮想壁条件として Bounceback 条件を与える.Bounce-back 条件とは、流体粒子が 流入してきた方向に180°跳ね返る条件で、図-2において 粒子分布関数は次のように決定される.

$$f_5(x,t+1) = f_1(x,t) \tag{13}$$

$$f_6(x,t+1) = f_2(x,t) \tag{14}$$

$$f_4(x,t+1) = f_8(x,t) \tag{15}$$

なお、本計算では条件式の打ち切り水深を 1.0×10^{2} および 1.0×10^{4} として計算を行っている.

(8) 巨視的変数の導出

巨視的変数である全水深・速度は粒子分布関数 から 粗視化の手続きを通じて、次のように決定される.

$$h = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \tag{16}$$

$$u = \sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha} / \sum_{\alpha} f_{\alpha} \tag{17}$$

3. 津波遡上の数値解析

図-3のような、一様勾配斜面と水平床の組み合わせに よる水路で波の遡上計算を行う.計算は1次元問題とし、 計算条件は後藤・首藤(1980)の条件にならった.計算ケー スは表-1に示す.本研究では、LBMの精度を検証する ためのベンチマーク値としてLeap-frog差分法(以下FDM) を用いる.FDM(dx=25m)の結果を仮想真値として、 LBM とFDMにより計算された最大遡上高の差 η_{LBM} - η_{FDM} を用いて式(18)で定義する.各計算ケースで求めら れた Error 値は表-1に示す.

$$\operatorname{Error} = \left| \frac{\eta_{LBM} - \eta_{FDM}}{\eta_{FDM}} \right| \times 100(\%)$$
(18)

図-4に、最大遡上時および引き波時のLBMとFDMの 計算波形の比較例を示す.黒丸および白丸はそれぞれ最 大遡上時および引き波時のLBM解を表す. Case7や8の ような緩勾配斜面では、LBM解はFDM解とほぼ一致し ており、押し波・引き波ともに良好に再現できているこ

Case	$\Delta x(\mathrm{m})$	$\Delta t(s)$	α	T(s)	Error (%)
1	25	1.0	1/10	300	0.14
2	25	1.0	1/10	600	0.42
3	25	1.0	1/25	300	0.30
4	25	1.0	1/25	600	2.30
5	25	1.0	1/50	300	0.24
6	25	1.0	1/50	600	1.79
7	25	1.0	1/100	300	3.12
8	25	1.0	1/100	600	0.66
9	50	2.0	1/10	300	4.18
10	50	2.0	1/10	600	0.71
11	50	2.0	1/25	300	2.14
12	50	2.0	1/25	600	6.26
13	50	2.0	1/50	300	5.43
14	50	2.0	1/50	600	4.34
15	50	2.0	1/100	300	0.92
16	50	2.0	1/100	600	3.59
17	100	4.0	1/10	300	25.57
18	100	4.0	1/10	600	2.43
19	100	4.0	1/25	300	14.48
20	100	4.0	1/25	600	7.05
21	100	4.0	1/50	300	18.59
22	100	4.0	1/50	600	9.71
23	100	4.0	1/100	300	10.20
24	100	4.0	1/100	600	5.28

とが分かる.しかし、Case19のような短周期波の入射条件で、LBMの解像度を $\Delta x = 100m程度まで粗くすると遡上先端部において差異が認められた.LBMの空間解像度の限界については、今後より詳細な検討を行っていく予定である.$

一方, Case7の引き波時の波形に注目すると、図-5の ようにFDMの先端部が振動しているのが確認出来る. 後藤・首藤(1980)は、短周期の津波が勾配の緩やかな海 岸へ来襲し津波の先端が段波状を呈する際, これをStaggerd Leap-frog法で計算する場合に段波の不連続面から 数値ギブス振動が発生する可能性を指摘している.図-5 はそれが起こっている例であると考えられる。この振動 を取り除くため、FDMは人為数値拡散項を導入する等 の工夫を要するが、これは解をなまらせるものであり、 段波の不連続区間が長くなり精度が落ちる等の欠点があ る. LBMでは特別な工夫を用いなくとも滑らかな解が 得られるため、この問題に関してはFDMに対して有利 であると考えられる.以上から、LBMとFDMの最大遡 上高に関する誤差は格子を細かく取れば3%以下であり (表-1), 同程度の空間分解能であればLBMはFDMと同 程度の精度で計算出来ることを確認した.

表-1 ベンチマーク問題で考慮した計算ケース



4. LBMの精度に関する検討

ダムブレーク,角柱周り流れ,津波の浅水変形の実験 値および開水路流れ・1次元潮流解析の理論解をベンチ マークとしてLBMによる解析を行い,前章で議論した 津波の陸上遡上問題を含めて,入射波波長の空間分解能 との関連で評価する.各種ベンチマーク問題の出典は表 -2に示す(表の左欄の記号は図-6に対応)

比較結果を、横軸に $\Delta x/L$,縦軸に式(18)で定義した Error 値(ただし真値はベンチマークにより異なる)を取っ てまとめたものが図-6である.ここで、代表長さLには 各計算ケースにおける入射波波長を採用している.全体 にError値の分布は右肩上がりとなり、 $\Delta x/L$ (波長に対し ての空間分解能)が大きいほど誤差が大きくなる結果と なっている.しかしながら、ほとんどのケースにおいて

表-2 本研究で考慮したベンチマーク問題

ダムブレーク問題△	石川ら(2004)
角柱周り流れ▲	油屋(2002),油屋・今村(2002)
浅水変形●	松山ら(2006)
開水路〇	Zhou (2004)
潮流□	Zhou (2004)
津波遡上■	後藤・首藤(1980)



図-5 FDMでの数値振動発生時の計算波形比較

誤差が1割以下で評価出来ており,空間解像度の違いに より多少のばらつきはあるものの,精度が大幅に変化し ないことから,LBMで十分精度良く浅水長波流れを計 算出来ると考えられる.解析ケース別に見ると,例えば, 角柱周りの再現計算(図中の凡例: \blacktriangle)ではError値が10 %を越えてしまうケースが見られることから,本研究で 用いた値よりも小さい空間解像度で計算した方が望まし い結果となることが予想される.また,浅水変形の再現 計算(図中凡例: \bigcirc),および遡上計算(図中凡例: \blacksquare)に より得られたプロットは1 \leq Error \leq 10%の範囲に集中 しており,本研究で用いた空間解像度はこれらの解析を するにあたり,妥当な値であったと考えられる.このよ うに,図-6を用いれば,所用の精度に対する各種条件下 での,LBMで用いる空間格子の大きさの目安を知るこ とが可能である.

5. 結論および今後の課題

本研究で得られた結論と今後の課題を以下に述べる. LBMを移動境界問題としての津波陸上遡上計算に適 用し,安定に解析を行うことに成功した.ただし,本研 究で考慮した遡上先端条件は,一様勾配斜面の地盤高と 水位の関係のみで求まる簡便な手法である.平坦なDry Bed上を遡上する津波の計算や,段波遡上先端部の再現 性については,より詳細な検討を行う必要がある.

空間分解能について同一条件下では、LBMとFDMの 最大遡上高に関する誤差は最大で3%程度であり,最大 遡上時の波形もほぼ一致する.すなわち,同程度の空間 分解能であれば津波の陸上遡上問題において両者の精度 はほぼ変わらないとみなして良い.実地形でのLBMの 津波伝播・遡上解析の実施を考えた場合,従来整備され てきた正方格子の海底地形データを利用できるうえ,実 用上問題ない精度で計算できる可能性が高い.

短周期の津波が勾配の緩やかな海岸へ来襲する際, FDM では時に数値ギブス振動が発生する場合があるが, LBM では特別な処理を用いなくとも安定に計算出来る ことを確認した.これは,遡上計算の数値安定性につい てはLBMが優れていること示唆している.また,角柱



周りの流れのような複雑な流れ場の再現については、同 一の条件であるならばFDMよりLBMの方が精度良く計 算出来る可能性がある.その他の流れについては、同一 条件で両者の差はほぼ無いと見なして良い.

様々な浅水長波のベンチマーク問題において,モデル の空間分解能に関連してLBMの精度を検討した.ほと んどのケースにおいて誤差は1割以下となり,空間解像 度の違いにより精度が大幅に変化しないことから,LB Mで十分精度良く浅水長波を計算出来ると考えられる. 本研究で実施した検討結果により,所用の精度に対する 各種条件下での空間格子の大きさをの目安を示すことが できた.しかし,LBMの空間分解能に関連した計算精 度と格子選定基準についてはより詳細な検討を要する. この点については今後の課題としたい.

また,LBMを実地形データを用いた現地計算に適用 するためには,陸上遡上の移動境界計算スキームの高度 化,沖側領域から沿岸領域までの領域接続(ネスティン グ)手法の開発などが課題として挙げられる.従来の数 値解析手法で検討されてきた手法やアプローチを参考に しながら検討を行っていく予定である.

謝辞:本研究の一部は,科学研究費補助金若手A(代表 者:越村俊一,課題番号19681019)および独立行政法人 原子力安全基盤機構の補助を受けて実施された.ここに 記して謝意を表する.

参考文献

- 油屋貴子(2002):家屋による抵抗を考慮した津波遡上計算, 東北大学大学院工学研究科修士論文,127p.
- 油屋貴子・今村文彦(2002):合成等価祖度モデルを用いた津 波氾濫シミュレーションの提案,海岸工学論文集,第49 巻,pp.276-280
- 石川裕士・立石綯也・田中聖三・樫山和男(2004):格子ボル ッマン法による浅水長波流れ解析,第18回数値流体力学 シンポジウム講演概要, D4-4
- 石川裕士・立石綯也・樫山和男(2006):非構造格子に基づく CIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析,応用 力学論文集,第9巻, pp.231-238.
- 木原直人・山下隆男(2003):2相流格子ボルツマン法の海岸 工学への適用,海岸工学論文集,第50巻, pp.1426-1430.
- 後藤智明・首藤伸夫(1980):各種津波遡上計算法と波先端条 件の比較,海岸工学論文集,第27巻,pp.80-84.
- 首藤伸夫・後藤智明(1977):津波の遡上に関する数値解析, 海岸工学論文集,第24巻, pp.65-68.
- 松山昌史・池野正明・榊山勉・武田智吉(2006):大陸棚上に おける津波のソリトン分裂と砕破に関する研究,電力中 央研究所報告N05045,21p.
- Chen, S., G. D.Doolen (1998) : Lattice Boltzmann Method for fluid flows, Annu.Rev.Fluid Mech,1998 Vol.30,pp.329-364.
- Qian, Y.H., D. d' Humieres, and P. Lallemand (1992) : Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation, Europhysics Letters, 17, 479, 1992.
- Zhou, J. G. (2004) : Lattice Boltzmann Method for Shallow Water Flows, Springer, 112p.