

確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案

Degree of Experience in Statistical Analysis for Extreme Wave Heights

北野利一¹・森瀬喬士²・喜岡 渉³・高橋倫也⁴

Toshikazu KITANO, Takashi MORISE, Wataru KIOKA and Rinya TAKAHASHI

The confidence interval for R -year return wave height is examined for the design of coastal structures. It is, however, a relative discussion whether it is wide or narrow. Even when we have just a short record of extreme wave height, there is no restriction to estimate a wave height of a longer return period, though it is accompanied with a very large interval. Engineers have been bothered with a problem: how much wide interval is no worth being considered. As a solution we introduce newly the degree of experience for the estimation of occurrence intensity of extreme wave height.

1. まえがき

高波の極値統計解析において、所与の再現期間に対する確率波高を推定し、その際に、信頼区間も推定する。なぜなら、低頻度で起こる現象を対象にするため、扱う資料の標本数が少なく、推定誤差が無視できないからである。しかしながら、信頼区間を算出するだけでは、推定の可否を判断できない。

高波資料として用いる極大波高の年間あたりの個数や観測年数の長短に基づいて、信頼区間の幅の大小を比較することは可能であるが、それは相対的な議論である。観測年数の極端に短い高波資料を用いて、比較的長い再現期間の確率波高の推定に意味がほとんど無いことは、“技術者の感覚”として容易に理解できる。しかし、信頼区間が相対的に広がるだけで、そのような無茶な推定を積極的に否定する手段が、従来には存在しない。観測年数がどの程度まで短くて、想定する再現期間がどの程度まで長くなれば、その確率波高の推定を無意味なものとなされるか、その判断基準は信頼区間の概念には含まれない。これが“相対的な議論”の意味である。

本研究では、所与の再現期間の確率波高に対して、極値解析に用いる年間あたりの極大波高の数や観測年数に基づいて算定される指標を新たに提案し、検討に値しない確率波高の条件を示す。

2. ポアソン分布と極値分布の関係

高波の極値解析は、閾値とする波高をこえる極大波高を高波資料として用いる。十分に大きな波高が対象となるように閾値を選べば、波高 x をこえる年間生起数 n はポアソン分布に従い、次式に示す確率関数で与えられる。

$$f(n) = \frac{\lambda_x^n}{n!} \exp(-\lambda_x) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで λ_x は期待値 $E(n)$ であり、ポアソン分布の特性から、分散 $V(n)$ に等しい。すなわち、次式が成立する。

$$E(n) = V(n) = \lambda_x \quad \dots\dots\dots (2)$$

極値に対するポイントプロセス理論 (例えば, Coles, 2001; Castillo et al., 2005) によれば、年平均生起数から生起強度に概念を拡張することにより、ポアソン分布の母数と極値分布の母数を関連づけることができる。すなわち、極値 x に対する3母数 μ, σ および ξ を用いて、

$$\lambda(x) = \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \quad (\geq 0) \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表される生起強度 $\lambda(x)$ をポアソン分布の母数 λ_x に置き換える。この時、波高 x をこえる波高の年間生起数 n がゼロとなる確率は、式(1)より、

$$f(0) = \exp(-\lambda_x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

と与えられる。式(4)で得られる確率 $f(0)$ は、年最大波高の累積確率 $F(x)$ (年最大波高が波高 x をこえない確率) を意味し、式(4)の λ_x に式(3)の生起強度 $\lambda(x)$ を代入することにより、

$$F(x) = \exp\left\{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

として、一般化極値分布が得られる。したがって、年間生起強度の母数 μ, σ および ξ は、年最大値分布の位置、尺度および形状母数と解釈できる。また、形状母数 $\xi = 0$ に対しては、次式の生起強度を用いる。

$$\lambda(x) = \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

この場合には、次式のガンベル分布が導かれる。

$$F(x) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(4)の議論を応用すれば、上位 j 番目の極大波高 ($j=1$ で期間最大波高) x の累積分布は、式(3)あるいは(6)の生起強度 $\lambda(x)$ を用いて、次式の確率で与えられることがわかる。

1 正 会 員 博(工)名古屋工業大学大学院准教授 工学研究科
2 正 会 員 修(工)ジェイアール東海コンサルタンツ(株)
3 正 会 員 Ph. D. 名古屋工業大学大学院教授 工学研究科
4 工 博 神戸大学大学院教授 海事科学研究科

$$F_j(x) = \sum_{n=0}^{j-1} f(n) = \exp\{-\lambda(x)\} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\lambda^n(x)}{n!} \quad \dots\dots\dots (8)$$

これを変数 x で微分することにより、上位 j 番目の極大波高の確率密度関数は、

$$f_j(x) = -\lambda'(x) \lambda^{j-1}(x) \exp\{-\lambda(x)\} / (j-1)! \quad \dots\dots\dots (9)$$

と得られる(例えば, David・Nagaraja, 2003; 高橋・渋谷, 2004). また, 閾値 x をこえる高波の個数がちょうど $(j-1)$ 個となる確率 $f(j-1)$ に, j 番目の極大波高が区間 $(x-dx, x]$ に入る確率密度

$$\frac{\lambda(x-dx) - \lambda(x)}{dx} = -\lambda'(x) \quad (\geq 0) \quad \dots\dots\dots (10)$$

を乗じれば, 式(9)の確率密度が得られるという解釈も可能である. 極値分布を直接的に扱うのではなく, 生起強度とポアソン分布に分解すれば, 柔軟な取扱いが可能となるのがわかる. 本研究は, このようなポイントプロセスの考えに基づくものである.

高波標本を用いて極値分布の母数推定を行うことは, ポアソン分布の母数 λ_x を推定するために必要な媒介量 μ , σ および ξ を推定していると考えべきである. したがって, 年最大値分布の母数の組 (μ, σ, ξ) ではなく, 波高 u を閾値とする年平均生起数と母数の組 $(\lambda_u, \sigma_u, \xi)$ を媒介量に用いることもできる. すなわち, 式(3)の代わりに, 次式を用いることができる.

$$\lambda(x) = \lambda_u \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma_u} \right)^{-1/\xi} \quad (\geq 0) \quad \dots\dots\dots (11)$$

また, 式(6)の代わりに, 次式を用いることができる.

$$\lambda(x) = \lambda_u \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma_u}\right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし, 形状母数 ξ は式(3)と(11)で同一の値をもち, 母数 (μ, σ) と母数 (λ_u, σ_u) は次式の関係がある.

$$\mu = u + \sigma_u \frac{\lambda_u^\xi - 1}{\xi}; \quad \sigma = \sigma_u \lambda_u^\xi \quad \dots\dots\dots (13)$$

一般に, 閾値 u および x に対する平均生起数の定義から, 閾値 u をこえる極大波高 x の累積確率は,

$$G_u(x) = \text{Prob.}(x|u) = 1 - \frac{\lambda(x)}{\lambda_u} \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表現できる. 上式に, 式(11)あるいは(12)の生起強度を代入すれば, 一般化パレート分布が得られる.

3. 年平均生起数の誤差分散(その1)

標本平均の分散は, 標本サイズに逆比例し, その係数は母分散である. すなわち, N 年間の高波資料において, 波高 x をこえる生起回数を各年で k_i ($i = 1 \sim N$) とする. 年生起数の標本平均は,

$$\hat{\lambda}_x = \frac{1}{N} \sum k_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

となり, 式(2)のポアソン分布の特性を用いて, 年平均生起数 $\hat{\lambda}_x$ の推定誤差分散は次のように与えられる.

$$V_1 = V(\hat{\lambda}_x) = \frac{\lambda_x}{N} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで注意しなければならないのは, 式(15)による $\hat{\lambda}_x$ の推定には, 生起回数という情報しか用いていないことである. たとえ, 閾値 x をこえる波高の情報を用いて, 一般化パレート分布の母数(この場合, 閾値 x に対する尺度母数 σ_x) を推定しても, 式(11)あるいは(12)の右辺に $u = x$ を代入して, 次式の自明の関係式

$$(\lambda_x) = \lambda(x) = \lambda_u \Big|_{u=x} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を得るに過ぎない. そのため, 波高 x をこえる年平均生起数の推定に, 波高 x をこえる波高の大きさの情報は, 一切役に立たないことに注意しなければならない.

4. 年平均生起数の誤差分散(その2)

前述の議論からわかるとおり, 波高(の大きさ)の情報をを用いるためには, 式(11)あるいは(12)の右辺において, $u < x$ (一般には, $u \neq x$ であれば波高の情報を利用できるが, 推定精度の観点から $u > x$ は無意味)となる閾値 u をこえる極大波高を対象にしなければならない. すなわち, 波高 x をこえる年平均生起数 λ_x を推定するために, 波高 x より低い閾値 u をこえる極大波高の情報も利用するのである. これは, 極値解析は外挿であると言われる根拠であり, 外挿することが極値解析の本質となっていることを明示している. しばしば, 外挿することそのものが極値解析の問題点とみなされることもあるが, そうではない. 外挿しなければ, 3. での議論のとおり, 波高の情報を活用できないのである. 問題は外挿の程度であり, その程度の良否をどのように表現して判断するかについて, 本研究で検討するのである.

式(12)で推定される年平均生起数 $\hat{\lambda}_x$ には, 推定量 $\hat{\lambda}_u$ および $\hat{\sigma}_u$ が含まれる. したがって, $\hat{\lambda}_x$ の誤差分散 V_2 は, デルタ法により, 次式のように分解できる.

$$V_2 = \left(\frac{\partial \lambda_x}{\partial \lambda_u} \right)^2 V(\hat{\lambda}_u) + \left(\frac{\partial \lambda_x}{\partial \sigma_u} \right)^2 V(\hat{\sigma}_u) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで, 母数 $\hat{\lambda}_u$ と $\hat{\sigma}_u$ の誤差分散は,

$$V(\hat{\lambda}_u) = \frac{\lambda_u}{N}; \quad V(\hat{\sigma}_u) = \frac{\sigma_u^2}{N\lambda_u} \quad \dots\dots\dots (19)$$

となるので, 誤差分散 V_2 は次式のように整理できる.

$$N \frac{V_2}{\lambda_x} = \frac{\lambda_x}{\lambda_u} \left(1 + \log^2 \frac{\lambda_u}{\lambda_x} \right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(17)と比較して分かるとおり, 上式の左辺は誤差分散

の比 V_2/V_1 を表す。波高 x をこえる頻度 $\hat{\lambda}_x$ の推定に対して、波高 x をこえるデータのみを用いる場合を基準に、波高 $u (< x)$ をこえるデータを用いて外挿する場合の誤差分散の減少を検討できる。

式(11)による $\hat{\lambda}_x$ の誤差分散 V_3 も、同様に考えて、

$$N \frac{V_3}{\lambda_x} = \frac{\lambda_x}{\lambda_u} \left\{ 1 + \omega \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_u}, \xi \right) \right\} \dots\dots\dots (21)$$

と得られる。ただし、

$$\omega(r, \xi) = (1 + 2\xi) \left(\frac{1 - r^{-\xi}}{\xi} \right)^2 + \left\{ \frac{1 - r^{-\xi}}{\xi} - \left(\frac{1 + \xi}{\xi} \right) \left(\frac{1 - r^{-\xi}}{\xi} - \log r \right) \right\}^2 \dots\dots\dots (22)$$

である。なお、誘導にあたって、次式に示す一般化パレート分布の母数推定の分散共分散を利用している。

$$\text{Cov}(\hat{\sigma}_u, \hat{\xi}) \approx \frac{1 + \xi}{N \lambda_u} \begin{pmatrix} 2\sigma_u^2 & -\sigma_u \\ -\sigma_u & 1 + \xi \end{pmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

図-1では、 $\lambda_x=1$ と固定して、年間あたり λ_u 個の高波資料を極値解析に使用できる場合の誤差分散比 V_2/V_1 および V_3/V_1 ($\xi=0, \pm 0.1, \pm 0.2$ の5種類)を示す(横軸 λ_u は対数目盛りであることに注意)。なお、図から確認できるとおり、 $\xi=0$ の場合に得られる V_3/V_1 と V_2/V_1 は異なる。なぜなら、 $\xi=0$ の場合に得られる V_3/V_1 は、 $\xi=0$ として推定される場合を意味し、その統計誤差を考慮しているためである。類似した観点から、式(18)において、母数 σ_u も既知であれば、右辺の第2項はゼロとなり、この場合の誤差分散 V_2' は、

$$N \frac{V_2'}{\lambda_x} = \frac{\lambda_x}{\lambda_u} \left[\exp \left\{ -\log(\lambda_u/\lambda_x) \right\} \right] \dots\dots\dots (24)$$

となり、年間あたりに使用できるデータ数 λ_u に単純に反比例で減少する(図中の灰色線)。 $\lambda_u = \lambda_x$ で、いずれの誤差分散比も1となることは明らかであり、 λ_u で V_2/V_1 は約3/4と一定になっているのに対し、 $\lambda_u=2\sim 3$ で

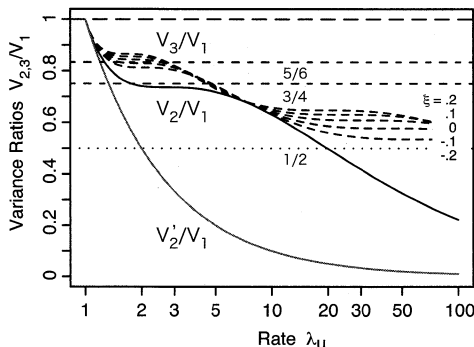


図-1 再現期間1年の確率波高に対する誤差分散の比

V_3/V_1 は約6/5と一定となる。また、 $\lambda_u \approx 7$ 付近で V_2/V_1 となっている。

誤差分散の逆数は情報とみなせ、 $V_1/V_{2,3}$ は、本来データが有する情報に対して、極値解析で外挿することにより追加される情報の比率を示している。また、生起数 λ_x の逆数は、再現期間を表す。したがって、年間あたり $\lambda_u (> 1)$ 個の高波資料を用いることにより、再現期間1年 ($\lambda_x=1$) に対する情報は増加し、形状母数 ξ が未知であれば、情報の増加量は20%程度であるのに対し、形状母数が $\xi=0$ と確定すれば情報の増加量は33%となることがわかる。

図-2は、横軸に λ_u/λ_x をとり、分散比 $V_{2,3}/V_1$ の変化を描いたものである。横軸の範囲を100～10000としたのは、 $\lambda_x=0.01$ (再現期間100年)と固定した場合には、図-1と同様に、 $\lambda_u=1\sim 100$ の範囲を見ることを意図したためである。 $\hat{\lambda}_x=0.01$ に対する誤差分散比 V_2/V_1 は十分に小さい。すなわち、 $\xi=0$ と確定できれば、再現期間100年の情報は、極値解析で外挿することにより追加される比率は、約10倍に増大することを示している($\lambda_u=2\sim 5$ の範囲において)。ここで生じるパラドックスに注意されたい。再現期間が長くなればなるほど、極値解析で外挿することにより追加される比率が激増しており、再現期間を長くすれば、極値解析の意義が激増するように思える(が、我々の感覚は納得できない)。その理由は、誤差分散あるいは情報の比を用いて相対的に議論しているためである。極値理論で外挿して得られる情報 $1/V_{2,3}$ が激増したのではなく、再現期間を非常に長く設定したために、高波資料そのものの情報 $1/V_1$ が急激に減少したと考える方が納得できる。したがって、分散比のような情報の相対量では、極値解析による推定の限界を示すことはできないことがわかる。なお、確率波高の信頼区間は誤差分散に基づいて算出される。そのため、信頼区間の大小も当然、相対的になる。

5. 経験度の導入

ポアソン分布の超過確率は、ガンマ分布の累積確率と

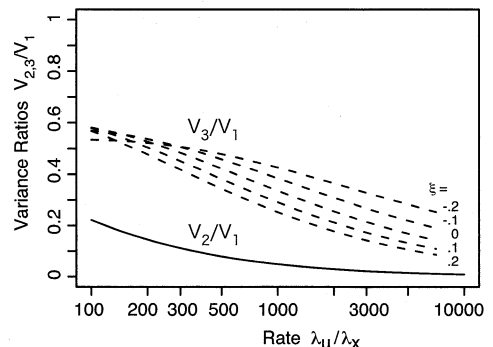


図-2 任意の再現期間の確率波高に対する誤差分散の比

次のように結び付けられる(例えば, 稲垣, 2003).

$$\exp(-\nu) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nu^j}{j!} = \frac{N^K}{\Gamma(K)} \int_0^{\nu/N} \lambda^{K-1} e^{-N\lambda} d\lambda \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで, 年間における総生起数 ν および K の扱いが両辺で異なることに注意しなければならない. 左辺では母数 ν のポアソン分布の確率変数として K が用いられているのに対し, 右辺のガンマ分布では平均生起数 ν/N が確率変数で, K は母数である. したがって, N 年間に K 回生起した時, 推定される平均生起率 λ は,

$$g(\lambda) = \frac{N^K \lambda^{K-1}}{\Gamma(K)} \exp(-N\lambda) \quad \dots\dots\dots (26)$$

で表されるガンマ分布に従うといえる. また, ベイズ統計学において, 式(26)は自然共役分布であり, 総生起回数 K は経験の度合いと解釈できる.

式(26)に示されるガンマ分布の期待値は,

$$E(\lambda) = K/N \quad \dots\dots\dots (27)$$

である. 図-3および4は, 期待値 $E(\lambda)$ を一定 (0.1で例示) にとり, $K=2 \sim 10$ で増加させた場合と $K=2 \sim 0.1$ で減少させた場合に推定される生起率の分布を図示したものである. 生起数 K の増加とともに, 期待値 $E(\lambda)$ に集中する様子が示される(経験の増加に応じて, 推定値 λ のばらつきが減少していると解釈できる). また, 図-4に示されるように, 生起数 K が1以下のガンマ分布には, 最頻値が存在しない. そのような分布は, 推定値の分布として適しているとは言えない.

式(26)に示されるガンマ分布の分散は,

$$V(\lambda) = K/N^2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

である. 式(27)と(28)を用いて, 次式の関係式を得る.

$$K = E^2(\lambda)/V(\lambda) \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで, 期待値 $E(\lambda)$ に波高 x をこえる年平均生起数 λ_x を, 分散 $V(\lambda)$ に誤差分散 $V(\hat{\lambda}_x)$ を代入すれば, 推定値 $\hat{\lambda}_x$ が従うガンマ分布の形状母数 K が得られる. これを経験度と名付ける.

$V(\lambda)$ に式(16)で表される誤差分散 V_1 を代入すれば,

$$K = N\lambda_x \quad \dots\dots\dots (30)$$

を得る. これは, 年平均生起率 λ_x の事象が N 年間に生

起する期待生起数に相当する. $V(\lambda)$ に式(20)あるいは(21)で表される誤差分散 $V_{i=2,3}$ を代入すれば, 式(29)を

$$K = N\lambda_x \left(\frac{V_i}{V_1} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (31)$$

に変形できる. 経験度 K は, 分散比という相対的な量に N 年間に生起する期待値という絶対的な量を乗じたものとなっている. 推定量の誤差分散の逆数は情報 $I_j (= V_j^{-1})$ を表すことから, 上式を整理すれば,

$$\frac{I_{i=2,3}}{K} = \frac{I_1}{N\lambda_x} (= I_e) \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる. 情報を経験度で除したものは常に一定になると言える. その一定値 I_e は, ポアソン分布のみから得られる生起数1個分の基本情報量 $I_1/(N\lambda_x)$ に相当する. また, 波高の大きさも活用して極値解析により割増された情報 $I_{i=2,3}$ を基本情報量 I_e で除したものが, 経験度 K であると見ることもできる.

このようにして得られる経験度 K が, 図-3に見るとおり, 2以上であれば, ガンマ分布の最頻値が存在し, 期待値の周辺に確率が集中する. 他方, 1以下であれば, 最頻値すら存在しない. このことは, 「2度あることは3度ある」と「1度あっても2度あるとは限らない」という格言が的確に表現していると考える. すなわち, 2度あることは3度あるかもしれないと考え, 検討の対象にする一方で, 1度しか無いことは2度めがあるかどうかの検討を保留にするという判断である. これにならえば, 経験度 K が2未満の時, 情報不足として, 極値解析の推定結果を保留すべきと考える.

図-5および6は, 式(20)および(21)の V_i を式(31)に代入して得られる経験度 K について図示したものである. 横軸に年間あたりに極値解析に使用できる極大波高の平均数 λ_u を, 縦軸に対象とする再現期間 $R (= \lambda_x^{-1})$ をとり, K/N の等高線図として表現している. 例えば, 年平均 $\lambda_u = 3$ 個の極大波高を用いて極値解析を行い, $R = 100$ 年確率波高を検討する際に, 極値分布の形状母数 $\xi = 0$ を推定しなければならない場合は, 図-5を見るとおり, $K/N = 0.02$ となる. この場合には, $N = 100 (= 2/0.02)$ 年程度の高波資料を用いてはじめて, 経験度 K は2を上まわり, 検討に値するといえる. 一方, 形状母数 $\xi = 0$ を確定できる場合には, 図-6を見るとおり,

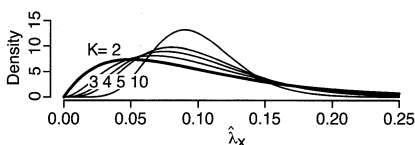


図-3 平均生起率の推定値分布 ($K \geq 2$)

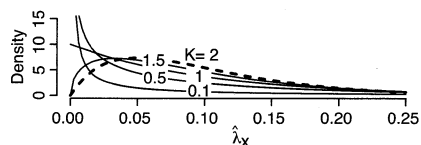
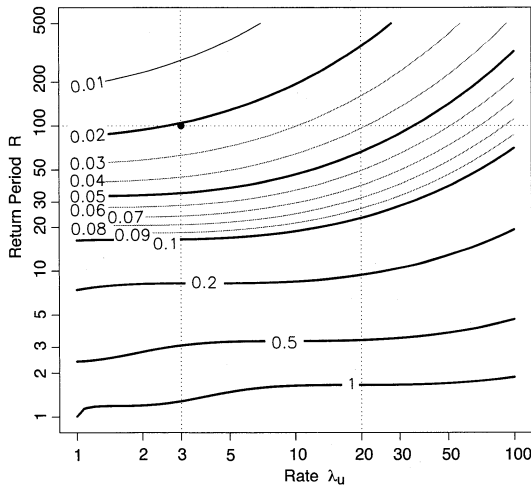


図-4 平均生起率の推定値分布 ($K < 2$)

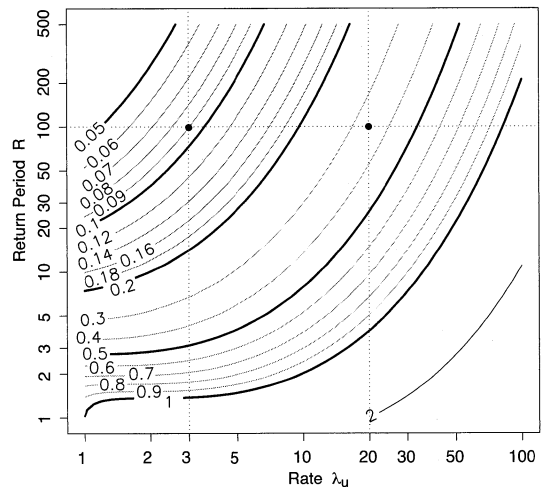

図-5 観測年数に対する経験度の比 ($\xi=0$ が未知)

$\lambda_u = 3$ および $R=100$ の条件で、 $K/N = 0.09$ となる。この場合は、 $N=23 (=2/0.09)$ 年程度の高波資料を用いれば、確率波高の検討をしてよいと判断できる。さらに、 $\lambda_u = 20$ の極大波高を極値解析に使用できるならば、わずかに $N=6 (=2/0.35)$ 年間の高波資料でも検討可能となる。ただし、極値解析に使用できる極大波高の年平均数 λ_u は、閾値 u をどの程度まで下げてもよいかという極値の統計的特性の検討で決まるものであり、単純に記録されているデータの有無によるものではない。

6. ベキ乗量を対象にした極値解析法の利点

ワイブル分布に従う極大波高に対して、ベキ乗量をとることにより、急速にガンベル分布に収束することを応用し、北野 (2007, 2008) によれば、ワイブル分布の形状母数の値として Goda (2000) で推奨される値に追加した $k=0.75, 1.0, 1.4, 2.0, 2.6, 3.3$ をベキ数として、高波の特性を表す物理量に相当するベキ乗量を対象にした極値解析が提案されている。

観測期間 $N=20$ 年の Kodiak 沖の高波資料 (Goda, 2000) の場合、ベキ乗量を用いた解析では、閾値 $u=6\text{m}$ をこえる波高 (全資料 78) を使用できる ($\lambda_u = 3.9$)。この時、再現期間 $R=100$ に対して、 $K/N=0.11$ と算出され、経験度 $K=2.2 (>2)$ を得る。他方、波高そのもので解析する場合には、ガンベル分布への収束は遅く、 $\xi=0$ を推定する必要もあり、閾値 $u=9\text{m}$ ($\lambda_u = 0.5$) で、 $K/N=0.02$ と算出される。その場合には、さらに 80 年分の高波資料を追加し、経験度が 2 をこえるまで、100 年確率波高の検討は保留されることになる。


図-6 観測年数に対する経験度の比 ($\xi=0$ が既知)

7. むすび

本研究で提案する経験度は、高波資料から算出される確率波高に対して、検討に値するものか、検討を保留すべきものかを判断できる指標である。また、経験度を利用して、北野 (2007, 2008) で提案するベキ乗量を対象とした極値解析法の利点を明らかにした。

低頻度の限界として、経験度の基準値を 2 にとることと、観測できる高周波の限界を示すナイキスト周波数との両者には、興味深い類似点を見出すことができる。それは、波形には峰谷の 2 点が最低限必要であり、区間 (再現期間) には起結の 2 点が不可欠となる点である。

謝辞: 本研究は、科学研究費 (代表: 高橋倫也 教授、課題名: 古典的な極値データ解析法の改良) および名古屋工業大学と JR 東海 コンサルタンツ (株) の共同研究の成果の一部である。

参考文献

- 稲垣宣生 (2003): 数理統計学 (改訂版), 裳華房, 328p.
- 北野利一 (2007): 高波の頻度解析に用いられるワイブル分布の形状母数, 海工論文集, 第 54 巻, pp.121-125.
- 北野利一 (2008): 高波の極値解析に相応しい物理量, 統計数理研究所共同研究レポート 212, pp.55-63.
- 高橋倫也・渋谷正昭 (2004): 上位 r 個の観測値に基づく確率点の推定, 統計数理, 第 52 巻, pp.93-116.
- Castillo, E., Hadi, A. S., Balakrishnan, N. and J. M. Sarabia (2005): Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science, Wiley, 362p.
- Coles, S (2001): An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer, 208p.
- David, H. A. and H. N. Nagaraja (2003): Order Statistics, 3rd ed., Wiley, 458p.
- Goda, Y. (2000): Random Seas and Design of Maritime Structures, World Scientific, 443p.