

不規則波の周期分布における対数正規性とその相似性

Log-Normality and Similarity for Conditional Distributions of Wave Periods

北野利一¹・喜岡 渉²

Toshikazu KITANO and Wataru KIOKA

"Long tail" has been well known for the studies on the internet business. A long tail of statistical distribution shows peculiar properties. Long tail has the moments of lower orders diverge and does not allow us to calculate the mean nor variance of the focusing variables. Though we believe that there are no such properties in random sea wave fields, almost all of the distributions of wave periods derived by previous theories have long tails. This is a big obstacle for the practical uses of statistical properties of random sea waves. This study shows a path to escape the difficulties.

1. まえがき

波浪のスペクトル特性として, 平衡領域においてベキ乗則が成立することは, 非常によく知られている (Phillips, 1958; Kitaigorodskii, 1962; Toba, 1973 など). この場合のベキ数は負の値 (-5あるいは-4) であり, 分布の裾の長さに特徴があり, 4次モーメントを含む帯域幅パラメータ ε が算出できない.

米 Wired 誌の編集長である Anderson 氏が, 分布の裾が異常に長い現象を "ロングテール" と命名し, インターネットビジネスの新たな可能性について分析して, 世の注目を集めたことは記憶に新しい (Anderson, 2006). ロングテールは, ベキ数が -1 に近い値をとるベキ乗分布で表され, 平均や分散などの低次モーメントが発散し, 裾が分布全体の性質を決定付ける点で見過ごせない. そのため, 物理現象としては不可解な性質を有し, 経済学で扱われるような非物理現象で検討されつつある.

スペクトル理論に基づく不規則波浪の特性を検討する際, 観測波浪データや数値シミュレーションに対して, 波高と周期の結合確率分布の等高線図を用いて比較・検討されることが多い. その際に, 重要な特性でありながら見過ごされる性質が, 周期分布の裾特性である. 既往の理論分布は分散がないという特異な性質があり, 応用する上での障壁となっている. 本研究では, (1) その原因がロングテールの特性に由来する理論上の欠陥であることを示し, 波高を条件とする周期分布を, 北野ら (2007) が提案するような対数正規分布に従うとすれば, (2) 周期の分散が発散せずに算出できることや, (3) 従来から指摘される周期の分布特性について表現できることを示す.

2. 周波数スペクトルのベキ乗則

Huangら (1981) による Wallops 型スペクトルは,

$$S(f) = \frac{A}{f^m} \exp\left(-\frac{B}{f^4}\right) \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる. A と B は定数であり, $m=5$ の場合, Pierson・Moskowitz スペクトル (以下, PM) に一致する. そのスペクトル・モーメントは,

$$m_k = \int_0^\infty f^k S df = \frac{A}{4B^{(m-k-1)/4}} \Gamma\left(\frac{m-k-1}{4}\right) \dots\dots\dots (2)$$

として与えられ, $m_0 = m_1 = 1$ で規格化したものを図-1 に示す. 周波数の高い平衡領域でベキ乗則に従うので, 周波数の変化に対してエネルギー密度の減少量は緩慢であり, 図-2 のように, 両軸を対数目盛りで描くことにより, その変化は直線に漸近する. 高周波数の領域でのエネルギー密度分布の裾がやや長く, 式(2)に示すスペクトル・モーメントが収束値をもつためには, ガンマ関数の変数が正 ($k < m-1$) となる必要がある. すなわち, PM に対しては 4 次モーメントが存在せず, したがって, 次式の帯域幅パラメータ ε を算出できない.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \dots\dots\dots (3)$$

高周波数領域での特性が PM と同等である JONSWAP スペクトルも, 帯域幅パラメータ ε は存在しない.

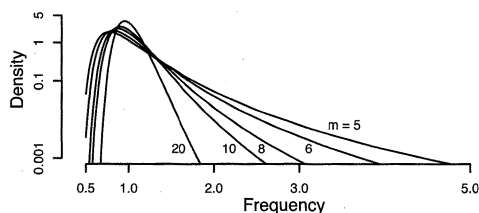


図-1 波浪のスペクトルの裾特性 (片対数目盛り)

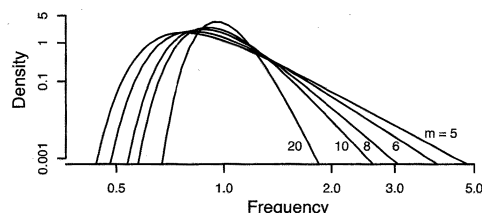


図-2 波浪のスペクトルの裾特性 (両対数目盛り)

1 正 会 員 博(工)名古屋工業大学大学院准教授 工学研究科
2 正 会 員 Ph. D 名古屋工業大学大学院教授 工学研究科

3. 不規則波浪の周期分布

無次元波高 z (不規則波の包絡線を $\sqrt{2m_0}$ で除したもの) と位相角の微係数 $\dot{\phi}$ の結合確率密度関数は,

$$g_0(z, \dot{\phi}) = \frac{2z^2}{\sqrt{\pi} v \sigma} \exp \left\{ -z^2 \left(1 + \frac{\dot{\phi}^2}{v^2 \sigma^2} \right) \right\} \dots\dots\dots (4)$$

と与えられる (Longuet-Higgins, 1975). ここで, σ は平均位相角速度 ($2\pi/T_{01}$; 平均周期 $T_{01} = \sqrt{m_0/m_1}$) であり, v は次式に示す帯域幅パラメータである.

$$v = \sqrt{\frac{m_2 m_0}{m_1^2} - 1} \dots\dots\dots (5)$$

北野ら (2007) が指摘するとおり, 既往の理論研究の多くは, 式(4)における位相角の微係数 $\dot{\phi}$ に波の周期 T を関係づけることにより, 波高と周期の結合確率密度関数を誘導している. ただし, その際の関係式が異なる. 以下では, 既往の周期分布の裾特性について相互比較を行うために, 密度関数を整理する.

(1) Longuet-Higgins (1975) による理論分布

無次元周期 τ (周期を平均周期 T_{01} で除したもの) と位相角の微係数 $\dot{\phi}$ を

$$\tau = 1 - \frac{\dot{\phi}}{\sigma} \dots\dots\dots (6)$$

として関係づけることにより, 波高と周期の結合確率密度関数を誘導している. この時, 結合確率密度関数において, 一方の変数を積分することにより消去すれば, 他方の周辺確率密度関数を得ることができる. 波高の密度関数は, 次式に示す Rayleigh 分布として得られる.

$$p_1(z) = 2z \exp(-z^2) \dots\dots\dots (7)$$

また, 周期の密度関数は,

$$q_1(\tau) = \frac{v^2}{2 \left\{ v^2 + (\tau - 1)^2 \right\}^{3/2}} \dots\dots\dots (8)$$

と得られる. したがって, 周期分布 q_1 の裾は,

$$q_1(\tau) \propto \tau^{-3} \quad (\tau \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (9)$$

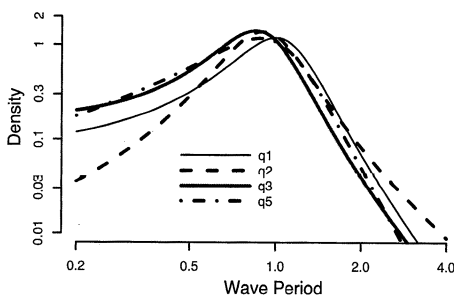


図-3 周期分布の裾特性

となり, 2次モーメントが発散し, 周期の分散が存在しない. なお, 1次モーメントは収束し, τ の期待値は1であり, 平均周期は T_{01} に一致する.

波高を条件とする周期の確率密度は, 結合確率密度を波高の周辺確率密度で除すことにより得られる. この場合は, 次式に示すような正規分布となる.

$$f_1(\tau|z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(\tau - 1)^2}{2 \sigma_1^2} \right\}; \quad \sigma_1 = \frac{v}{\sqrt{2} z} \dots\dots\dots (10)$$

式(6)において, 周期は負の値を含むように定義されていることが理論上の難点である.

(2) Longuet-Higgins (1983) による理論分布

周期 τ と位相角の微係数 $\dot{\phi}$ を

$$-\frac{\dot{\phi}}{\sigma} = 1 - \frac{1}{\tau} \dots\dots\dots (11)$$

で関係づけることにより, 波高と周期の結合確率密度関数を誘導している. この場合, 波高の密度関数は,

$$p_2(z) = L(v) F(z/v) p_1(z) \dots\dots\dots (12)$$

となる. ここで,

$$L(v) = \frac{2}{1 + (1 + v^2)^{-1/2}}; \quad F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} dy \dots\dots\dots (13)$$

である. 誤差関数 F の変数に波高 z が含まれるため, もはや波高は Rayleigh 分布に従わない. これは, 理論上の欠点と考える. なぜなら, Rayleigh 分布からの現実的なズレを式(12)が表現できているか疑問が残る. むしろ, 数式の表現を複雑にしているというデメリットが大きいと考える.

波高を条件とする周期の確率密度は,

$$f_2(\tau|z) = \frac{z}{\sqrt{\pi} v \tau^2 F(z/v)} \exp \left\{ -\left(\frac{z}{v} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\tau} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (14)$$

と得られる. また, 周期の周辺確率密度は,

$$q_2(\tau) = \frac{v^2 L(v)}{2 \tau^2 \left\{ v^2 + (1 - \tau^{-1})^2 \right\}^{3/2}} \dots\dots\dots (15)$$

となる. 周期分布 q_2 および f_2 の裾は, いずれも,

$$q_2(\tau) \propto f_2(\tau|z) \propto \tau^{-2} \quad (\tau \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (16)$$

となり, 1次モーメントが発散する. そのため, 周期分布から平均周期を求めることができない.

(3) Stansell ら (2004) による理論分布

式(11)の関係式に加え,

$$-\frac{\dot{\phi}}{\sigma} = 1 + \frac{1}{\tau} \dots\dots\dots (17)$$

の関係も用いることにより, 平均周期がゼロクロスによる平均周期 $T_{02} (= \sqrt{m_0/m_2})$ に一致するような工夫を行い, 次式に示すような結合分布を導いている.

$$g_3(z, \tau) = \frac{\tilde{g}_2(z, \tau)}{\sqrt{1 + \nu^2} \tau} \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{4z^2}{\nu^2 \tau}\right) \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ここで、 $\tilde{g}_2(z, \tau)$ は Longuet - Higgins (1983) の理論による波高と周期の結合分布 $g_2(z, \tau)$ と次式の関係にある。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2(z, \tau) &= g_2(z, \tau) / L(\nu) \\ &= \frac{2z^2}{\sqrt{\pi} \nu \tau^2} \exp\left\{-z^2 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2\right]\right\} \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

この時、波高と周期の周辺確率密度は、それぞれ以下のように導かれる。

$$p_3(z) = \frac{p_1(z)}{\sqrt{1 + \nu^2}} \left\{ F\left(\frac{z}{\nu}\right) + \frac{\exp(-z^2/\nu^2)}{\sqrt{\pi} z/\nu} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\begin{aligned} q_3(\tau) &= \frac{\nu^2}{2\sqrt{1 + \nu^2} \tau^3} \left\{ \left[\nu^2 + (1 - \tau^{-1})^2 \right]^{-3/2} \right. \\ &\quad \left. + \left[\nu^2 + (1 + \tau^{-1})^2 \right]^{-3/2} \right\} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

波高を条件とする周期の確率密度 $f_3(\tau|z)$ は、 $g_3(z, \tau)$ を $p_3(z)$ で除すことにより得られる。周期分布の裾は、

$$q_3(\tau) \propto f_3(\tau|z) \propto \tau^{-3} \quad (\tau \rightarrow \infty) \dots\dots\dots(22)$$

となるので、2次モーメントが発散する。なお、この場合は、 τ の期待値が存在することを意図して理論を構築しており、1次モーメントは収束する。

(4) 北野ら (2007) による理論分布

周期 τ と位相角の微係数 ϕ は、波高に依存する量 τ_p を新たに導入して、次式で関連づけるものである。

$$-\frac{\dot{\phi}}{\bar{\sigma}} = \frac{\log(\tau/\tau_p)}{\tau_p} \dots\dots\dots(23)$$

この時、周期の対数変換量 $\log \tau$ の条件付確率密度は、

$$h_4(\log \tau|z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\log \tau - \mu}{\delta}\right)^2\right\} \dots\dots\dots(24)$$

として正規分布で与えられる。ここで、

$$\mu = \log \tau_p; \quad \delta = \frac{\nu \tau_p}{\sqrt{2} z} \dots\dots\dots(25)$$

である。式(10)と比較するように、この理論は、Longuet-Higgins (1975) の理論における欠点（負の周期）を克服しつつ、その長所である正規分布であるという簡便さを残したものになっていることに注意されたい。

(5) Cavaníć (1976) による理論分布

この理論は式(4)に基づくものではない。Ochi (1998) に示されるとおり、クレスト・トゥ・クレスト波を対象にしている。波高と周期の結合分布は、

$$g_5(z, \tau) \propto \frac{z^2}{\tau^5} \exp\left\{-\frac{z^2}{\varepsilon^2} \left[\beta^2 \frac{\alpha^4}{\tau^4} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\tau^2}\right)^2\right]\right\} \dots\dots\dots(26)$$

となる。ここで、係数 α および β は、

$$\alpha = (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})/2, \quad \beta = \varepsilon / \sqrt{1 - \varepsilon^2} \dots\dots\dots(27)$$

である。周期の周辺確率密度 $q_5(\tau)$ および条件付確率密度 $f_5(\tau|z)$ の裾は、次のようになる。

$$q_5(\tau) \propto f_5(\tau|z) \propto \tau^{-5} \quad (\tau \rightarrow \infty) \dots\dots\dots(28)$$

したがって、この場合は、平均および分散は分散は存在するが、1. で指摘するとおり、 ε に難がある。

図-3は、周期の確率密度 $q_{i=1,2,3,5}(\tau)$ について、両軸を対数目盛りで描いたものである ($\nu=0.42$, $\varepsilon=0.84$)。

4. 対数正規性

周期分布の裾がベキ関数分布であるか否かの検討だけでなく、周期の条件付確率分布の対数正規性も同時に検討するには、対数周期の条件付確率密度 $h_i(\log \tau|z)$ を用いるのが都合よい。 $h_i(\log \tau|z)$ と $f_i(\tau|z)$ は、

$$\log h_i(\log \tau|z) = \log f_i(\tau|z) + \log \tau \dots\dots\dots(29)$$

という関係が一般に成り立つ。なお、

$$f(\tau) = \frac{k}{\tau^{k+1}} \quad (k > 0) \dots\dots\dots(30)$$

と表されるベキ関数分布に対し、対数周期 $\log \tau$ の確率密度関数 h は、次式のように表せる。

$$\log h(\log \tau) = -k \log \tau + \log k \dots\dots\dots(31)$$

したがって、 $\log h_{i=2,3}$ に対する $\log \tau$ は、裾部で傾きが $-k$ の直線に漸近する。他方、周期分布に対数正規性がある

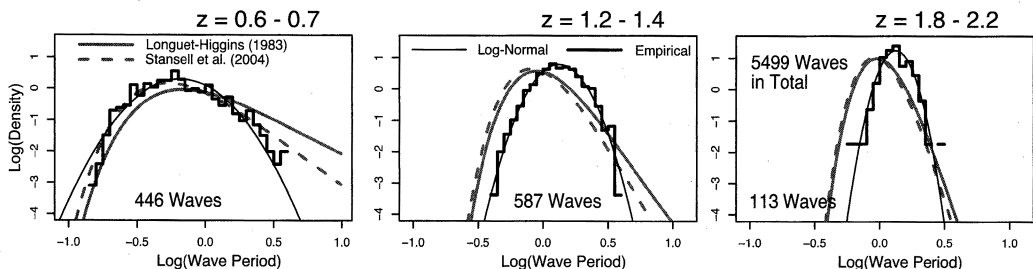


図-4 波高を条件とする周期分布の対数正規性と裾特性

れば、式(24)を変形して、

$$-2 \log h_4(\log \tau | z) = \left(\frac{\log \tau - \mu}{\delta} \right)^2 + \log(2\pi\delta^2) \dots \dots (32)$$

となり、放物線で描かれるため、勾配は常に変化し、直線部は存在しない。図-4は、PMの不規則波浪シミュレーションによる結果(約277波×20試行=5499波を対象)を示す。

5. 周期の平均と分散

個別の分布関数ごとに積分を実行して平均や分散を議論するよりも、できる限り一般的な議論として、予め変形した数式で議論すると、分布の裾特性による違いが明確にできる。そこで、波高を条件とする周期の期待値

$$\bar{\tau}_z = E(\tau | z) = \int \tau f(\tau | z) d\tau \dots \dots \dots (33)$$

を導入する。この時、周期の分散 $V(\tau)$ は、以下に示すような分解ができる。

$$\begin{aligned} V(\tau) &= \int (\tau - \bar{\tau})^2 q(\tau) d\tau \\ &= \int \left\{ (\tau - \bar{\tau}_z) + (\bar{\tau}_z - \bar{\tau}) \right\}^2 h(\tau | z) p(z) dz d\tau \\ &= \int \left\{ V(\tau | z) + B^2(z) \right\} dP(z) \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

ただし、 $V(\tau | z)$ および $B(z)$ は波高を条件とする周期の分散およびバイアスであり、それぞれ、

$$V(\tau | z) = \int (\tau - \bar{\tau}_z)^2 f(\tau | z) d\tau \dots \dots \dots (35)$$

$$B(z) = \bar{\tau}_z - \bar{\tau} \dots \dots \dots (36)$$

と定義される。また、 $P(z)$ は波高の累積確率であり、広義積分にしない工夫の1つとして、有限区間での積分となるように、式(34)の積分変数に P を用いる。

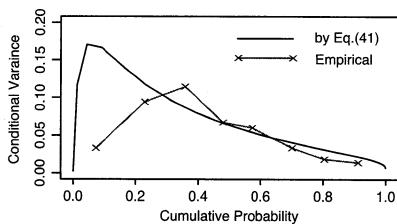


図-5 波高を条件とする周期の分散

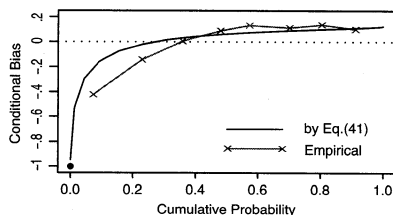


図-6 波高を条件とする周期のバイアス

Longuet-Higgins (1983) および Stansell (2004) の理論では、式(16)および(22)を見るとおり、 $V(\tau | z)$ が発散するため、分散 $V(\tau)$ を得ることはできない。また、Longuet-Higgins (1975) の場合は、

$$V(\tau | z) = \frac{v^2}{2z^2}; \quad B(z) = 0 \dots \dots \dots (37)$$

となり、式(34)の被積分関数が $z=0$ で発散する。被積分関数が発散しても、積分が収束することもあるため、注意が必要である。超過確率 $\bar{P}(=1-P)$ を用いて、式(34)を変形すれば、次式のように指数積分関数 E_1 で表され、結局、周期の分散は発散することがわかる。

$$\int_{z=\sqrt{-\log \bar{P}}}^{\infty} \frac{dP_1(z)}{z^2} = E_1(-\log \bar{P}) \rightarrow \infty, \quad \bar{P} \rightarrow 1 \dots (38)$$

その一方で、北野ら (2007) の場合は、対数正規分布の特性から、波高を条件とする周期の期待値と分散は、

$$\bar{\tau}_z = \exp\left(\mu + \frac{\delta^2}{2}\right); \quad \frac{V(\tau | z)}{\bar{\tau}_z^2} = \exp(\delta^2) - 1 \dots \dots \dots (39)$$

と得られる。 μ および δ は、式(25)に示すとおり、波高 z に依存する τ_p が含まれる。ここで、

$$\bar{\tau}_z^2 = \tau_p^2 \exp(\delta^2) \dots \dots \dots (40)$$

と変形しておくとの後の計算に便利である。現時点では、 τ_p をどのようにとるべきかの最適な公式は存在しない。北野ら (2007) が提案する一例は、スペクトル形状に依存する定数 α を含む、次式のように表されるものである。

$$\tau_p = \frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 + (2v/z)^2}} \dots \dots \dots (41)$$

北野ら (2007) の理論は、Longuet-Higgins (1975) と類似するため、発散の可能性があるのは $z=0$ ($\bar{P} \rightarrow 1$) である。

$$\tau_p \approx \frac{\alpha}{v} z, \quad \delta^2 \approx \frac{\alpha^2}{2}, \quad V(\tau | z) \propto z^2 \rightarrow 0, \quad \bar{P} \rightarrow 1 \dots (42)$$

となり、 $V(\tau | z)$ は $z=0$ で有限値ゼロに収束する。また、

$$B(z) \approx \frac{\alpha z}{v} \exp\left(\frac{\delta^2}{2}\right) - \bar{\tau} \rightarrow -\bar{\tau}, \quad \bar{P} \rightarrow 1 \dots \dots \dots (43)$$

となり、 $B(0)$ も有限値に収束する。被積分関数が積分領域全体で発散しなければ、その積分値も発散しないことは当然であり、北野ら (2007) が提案するように、周期の条件分布を対数正規分布で与えれば、周期の分散は有限な値として算出できることが示された。

図-5および図-6は、観測波浪データ(渥美半島沖、2006年8月8日の波形記録;喜岡ら, 2007)を対象に、波高を条件とする分散およびバイアスを示す。図中の破線は、式(41)の関係を用いずに、データから直接的に計算したものである。若干の違いはあるものの、いずれの場合も発散する傾向は見られない。

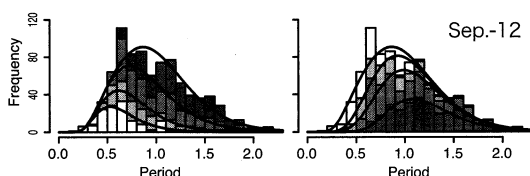


図-7 重ね合わせによる周期分布(波群性の弱い場合)

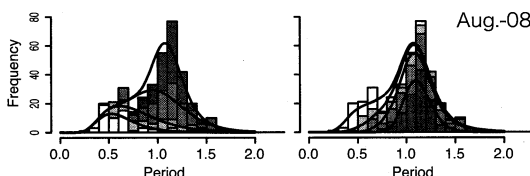


図-8 重ね合わせによる周期分布(波群性の強い場合)

6. 相似な分布の重ね合わせ表現

波高分布は、Rayleigh 分布で表現しても多くの場合に不都合が見られないように、スペクトルの帯域幅パラメータに依存しない(たとえ、依存したとしても大きな変化を与えない)単峰の密度関数である。他方、周期分布は、変化に富んだ分布であることは、Sobey (1992) が数値シミュレーションに基づいて、中村ら (1995) が現地波浪データに基づいて報告している。

図-7および8は、観測波浪データ(渥美半島沖、2006年8月8日と9月12日の波形記録;喜岡ら, (2007))を対象に、波高の階級毎(ここでは、 $\bar{P} = 0, 1/3, 2/3, 5/6, 1$ で分割している)に相似な対数正規分布を重ね合わせることで、周期分布の非対称性が2種類に分類されることを例示したものである。すなわち、波高の小さな階級における短い周期が卓越する場合(図-7, 左)には、波高の小さい階級から大きい階級へという順で重ね合わせて周期分布を形成されていると解釈に都合がよい(ただし、この場合は、周期分布が対称に近いので、図-7右として、逆向きの順序で重ね合わせても解釈に困らない)。その一方で、波高の大きな階級における有義波周期が卓越する場合(図-8, 右)には、波高の大きい階級から小さい階級へという順で重ね合わされると見れば、変化に富んだ非対称な周期分布を理解しやすい。このような密度関数の非対称性は、中村ら(1995)における波群性の分類に用いられている。なお、図-8の場合は、短い周期に第2のピークが現れる可能性を示唆しており、このような双峰性はSobey(1992)も指摘している。Cavanićらの理論による q_5 も含め、既往の理論分布 $q_{1,2,3,5}$ は、どのようにスペクトル・パラメータを選んでも、このような双峰型の形状を表現できない。

7. まとめ

不規則波の周期特性について、ロングテールをもつ既往の理論分布とは異なり、対数正規性を導入すれば、周期の分散は収束値が得られることを示した。また、周期分布は、条件により対称であったり、歪んだり、双峰型になったり、変化に非常に富んでいる。波高階級ごとに相似な分布を重ね合わせるという単純な表現で、そのような周期分布を適確に記述できることも示した。

謝辞: 本研究は、科学研究費(代表:喜岡 渉)の成果の一部である。大島一剛氏((株)大島組、今春より)および川上健太郎君(名古屋工業大学大学院)には、図面の作成に協力いただいた。

参考文献

- 喜岡 渉・加藤寛之・北野利一 (2007): 高波浪時の波群特性に関する現地観測, 海工論文集, 第54巻, pp.161-165.
- 北野利一・森下和帆・喜岡 渉 (2007): 波高と周期の結合確率分布の近似的表現, 海工論文集, 第54巻, pp.91-95.
- 中村聡志・加藤一正・望月徳雄 (1995): 波群の統計と波浪統計量による波群性の推定, 海工論文集, pp.281-285.
- Anderson, C. (2006): The Long Tail: Why the Future of Business is Selling Less of More, Hyperion, 238p. (ロングテール, 早川書房, 篠森ゆりこ訳, 2006)
- Cavanić, A., Arhan, M. K. and E. Ezraty (1976): A statistical relationship between individual heights and periods of storm waves, Proc. Conf. Behaviour Offshore Structure, Vol.2, pp.354-360.
- Huang, N. E., Long, S. R., Tung, C. C., Yuen, Y. and L.F. Bliven (1981): A unified two-parameter wave spectral model for a general sea state, J. Fluid Mech., Vol.112, pp.203-224.
- Kitaigorodskii, S. A. (1962): Applications of the theory of similarity to the analysis of wind-generated wave motion as a stochastic process, Geophys. Ser. Acad. Sci., USSR, Vol.1, pp.105-117.
- Longuet-Higgins, M. S. (1975): On the joint distribution of the periods and amplitude of sea waves, Jour. Geophys. Res., Vol.80, pp.2688-2694.
- Longuet-Higgins, M. S. (1983): On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field, Proc. Roy. Soc. Lond. A 389, pp.241-258.
- Ochi, M. (1998): Ocean Waves, Cambridge Univ. Press, 319p.
- Phillips, O. M. (1958): The equilibrium range in the spectrum of wind-generated ocean waves, J. Fluid Mech., Vol.4, pp.426-434.
- Sobey, R. J. (1992): The distribution of zero-crossing wave height and periods in a stationary sea state, Ocean Engng., Vol.19, pp.101-118.
- Stansell, P., J. Wolfram and B. Linfoot (2004): Improved joint probability distribution for ocean wave heights and periods, Jour. Fluid Mech., Vol.503, pp.273-297.
- Toba, Y. (1973): Local balance in the air-sea boundary processes III, on the spectrum of wind waves, J. Oceanogr. Soc. Japan, Vol.29, pp.209-220.