海岸工学論文集，第55巻（2008）
土木学会，016-020

粒子法における圧力擾乱低減のためのCMPS-HS法の提案

Development of CMPS-HS method for attenuation of pressure fluctuation in particle method

Khayyer Abbas[1]・後藤仁志[2]
Abbas KHAYYER and Hitoshi GOTOH

The MPS (Moving Particle Semi-implicit) method has been proven useful in free-surface hydrodynamic flows. Despite its applicability, the MPS method suffers from some shortcomings such as non-conservation of momentum and spurious pressure fluctuation. By introducing new formulations for pressure gradient and new formulation of source term of Poisson Pressure Equation, we have proposed modified MPS method, namely CMPS-HS (Corrected MPS with Higher-order Source-term) method, for the prediction of wave impact pressure on a seawall. The improved performance of the CMPS-HS method is shown through the simulation of wave impact problem in comparison with the experimental data.

1. はじめに

粒子法は，水面のトポロジーさえ変化するような複雑条件下でも安定して機能することから，巻き波型砕波の解析等に適用されてきた．特にMPS法（Koshizuka・Oka, 1996）は，SPH法（Monaghan, 1994）と比較して高次のkernel関数なしにベクトル微分演算子の離散化精度を比較的高く保てることから，計算負荷が相対的に低く，砕波・越波問題への適用性に優れている（例えば，後藤，2007）．ところで，MPS法の圧力勾配モデルは，数値的安定性を担保するために粒子間力を常に排斥力とするように設定されており，2粒子間で圧力がanti-symmetric（逆向き等大）とならず，離散化における運動量保存が保証されない．このため粒子の座標に微小変動を伴い，局所的な粒子の偏在化が，圧力擾乱（ノイズ）を発生させることとなる（例えば，後藤ら，2003）．個々の粒子が自律的に座標を決定する粒子法のアルゴリズムでは，圧力擾乱の完全な除去は不可能ではあるが，運動量保存性が向上すれば時間更新時の粒子座標の修正値の精度が向上し，結果として圧力擾乱の低減が可能となる．

著者らが提案した修正型のMPS法であるCMPS (Corrected MPS) 法（Khayyer・Gotoh, 2008）は，運動量保存型の手法であることから，圧力擾乱が相当量低減されていると期待できるが，これまで圧力場に関しては詳細な検討を行ってこなかった．そこで本研究では，CMPS法の解として得られる圧力場の特性を検討するとともに，圧力の解の誤差をさらに低減するため，圧力のPoisson方程式の生成項を高精度化する新たなアルゴリズムCMPS-HS法を開発した．標準MPS法およびCMPS法の解と比較することにより，CMPS-HS法の圧力擾乱の低減効果を明らかにする．

2. CMPS法

(1) MPS法

MPS法，SPH法等の粒子法は，Navier-Stokes式

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{g}+\nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1}$$

（ρ：流体の密度，$\boldsymbol{u}$：流速ベクトル，p，圧力，ν：動粘性係数，$\boldsymbol{g}$：重力加速度）のソルバーである．

Navier-Stokes式の各項は，近接粒子間の相互作用として記述されるが，標準MPS法では，圧力勾配力がベクトル量であるのに対して，粘性項には等方型モデルが用いられる．著者ら（Khayyerら，2007）がSPH法に関して述べているように，ベクトル量に関しては，近接2粒子間でanti-symmetric（逆向き等大）な関係が満足されないと離散化に伴う付加的な運動量が発生し，運動量は厳密には保存されない．標準MPS法の圧力勾配は，

$$\langle\nabla p\rangle_i=\frac{D_s}{n_0}\sum_{j\neq i}\frac{p_j-\hat{p}_i}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|) \tag{2}$$

$$\hat{p}_i=\min_{j\in J}(p_i,p_j),\ J=\{j: w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|)\neq 0\} \tag{3}$$

と記述される（D_s：次元数，n_0：基準粒子数密度，$\boldsymbol{r}_i$：粒子iの位置ベクトル，w：重み関数）．粒子i自体の圧力値ではなく，粒子iの周囲の影響円内で最小となる圧力値を基準として圧力勾配を評価する．この操作には，粒子間に常に排斥力が作用することを保証し，粒子の重なりを抑止して，計算を安定化させる効果がある．

また，MPS法では，半陰解法のアルゴリズムが導入され，重力と粘性力を駆動力として移動させた個々の粒子の座標を，質量保存則を満足する（粒子数密度を一定に保持する）ように，圧力場の陰的計算によって修正する．この段階の支配方程式が，圧力のPoisson方程式

$$(\nabla^2 p_{k+1})_i=\frac{\rho}{(\Delta t)^2}\frac{n_0-(n_k^*)_i}{n_0} \tag{4}$$

1 学生会員　M.Sc.　京都大学大学院博士後期課程
2 正会員　工博　京都大学教授 工学研究科都市環境工学専攻

である（Δt：計算時間間隔，n^*：陽的粒子移動後の粒子数密度）．

(2) CMPS法の概要

標準MPS法では，粒子 j に粒子 i から作用する圧力勾配力は，

$$\boldsymbol{A}^p_{j\to i} = -\frac{mD_s}{\rho n_0}\frac{p_j-\hat{p}_i}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|) \quad (5)$$

と書ける（m：粒子1個あたりの質量）．一方，粒子 i に粒子 j から作用する圧力勾配力は，

$$\boldsymbol{A}^p_{i\to j} = -\frac{mD_s}{\rho n_0}\frac{p_i-\hat{p}_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|^2}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)w(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|) \quad (6)$$

と書けて，

$$\boldsymbol{A}^p_{j\to i} \neq -\boldsymbol{A}^p_{i\to j} \quad (7)$$

となり，圧力勾配項がanti-symmetricとらないので，運動量が保存されない．

CMPS法（Khayyer・Gotoh, 2008）では，粒子 i,j 間の圧力勾配の評価に，粒子 i,j の中点に仮想的圧力定義点を設けて，この点を媒介とした局所圧力勾配評価を行うことにより，標準MPS法の圧力勾配モデル（式(2)）を変形し，

$$\langle\nabla p\rangle_i = \frac{D_s}{n_0}\sum_{j\neq i}\left\{\frac{(p_i+p_j)-2\hat{p}_i}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|)\right\} \quad (8)$$

を導出する．さらに圧力の局所（影響円内）最小値の対称性を保証するため，$\hat{p}_i$ を $(\hat{p}_i+\hat{p}_j)/2$ で置換した

$$\langle\nabla p\rangle_i = \frac{D_s}{n_0}\sum_{j\neq i}\frac{(p_i+p_j)-(\hat{p}_i+\hat{p}_j)}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|) \quad (9)$$

を式(2)に代わる圧力勾配評価式として用いることにより，運動量保存性が確保される．

3. CMPS-HS法

(1) Poisson方程式の生成項

MPS法では，半陰解法が用いられ，速度の2段階修正が行われるが第2段階の速度修正量 $\Delta\boldsymbol{u}_k^{**}$ は，圧力勾配を用いて，

$$\Delta\boldsymbol{u}_k^{**} = -\frac{\Delta t}{\rho}\nabla p \quad (10)$$

と記述される．質量保存則は，粒子数密度を用いて，

$$\frac{1}{n_0}\frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot(\Delta\boldsymbol{u}_k^{**}) = 0 \quad (11)$$

と書ける．さらに，粒子数密度の実質微分を

$$\frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} = \frac{n_0-n_k^*}{\Delta t} \quad (12)$$

と書けば，標準MPS法のPoisson方程式（式(2)）が導出される．

ところで，陰的計算は行列計算の収束誤差を伴うので，陰的計算後も粒子数密度の値は厳密には n_0 には一致しない．式(12)の表式は，線形であるので誤差の蓄積を生じやすく，結果として粒子数密度の時間変動も助長され，それが圧力の解を振動させて，圧力擾乱を発生させる．

(2) CMPS-HS法

そこで，MPS法の粒子数密度の定義

$$\langle n\rangle_i = \sum_{j\neq i}w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|) \quad (13)$$

によって粒子数密度の実質微分を

$$\frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} = \sum_{i\neq j}\frac{\mathrm{D}w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|)}{\mathrm{D}t} \quad (14)$$

と記述する．さらに，MPS法の kernel 関数

$$w(r)\begin{cases}\dfrac{r_e}{r}-1 & 0\le r<r_e\\ 0 & r_e\le r\end{cases} \quad (15)$$

(r_e：影響円の半径)を用いると，粒子数密度の実質微分は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|)}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}w_{ij}}{\mathrm{D}t}\\ &= \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}}\frac{\mathrm{d}x_{ij}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial y_{ij}}\frac{\mathrm{d}y_{ij}}{\mathrm{d}t}\\ &= -\frac{r_e}{r_{ij}^2}\frac{x_{ij}}{r_{ij}}u_{ij}^{\cdot} - \frac{r_e}{r_{ij}^2}\frac{y_{ij}}{r_{ij}}v_{ij}^{\cdot}\\ &= -\frac{r_e}{r_{ij}^3}(x_{ij}u_{ij}^{\cdot}+y_{ij}v_{ij}^{\cdot})\end{aligned} \quad (16)$$

と書ける．ここに，(x_{ij}, y_{ij})：粒子 j の粒子 i に対する相対座標，$((u_{ij}^*, v_{ij}^*))$：粒子 j の粒子 i に対する相対速度，r_{ij}：粒子 i,j 間の距離である．式(10),(11)とともに式(16)の表式を用いると，

$$(\nabla^2 p_{k+1})_i = -\frac{\rho}{n_0\Delta t}\sum_{i\neq j}\frac{r_e}{r_{ij}^3}(x_{ij}u_{ij}^{\cdot}+y_{ij}v_{ij}^{\cdot}) \quad (17)$$

が得られる．このようにPoisson方程式の生成項の評価を詳細化した取り扱いであることから，式(17)に基づく陰的計算を行うCMPS法を，CMPS-HS（Higher order Source term）法と呼ぶこととする．

4. 各手法の圧力場の解の比較

(1) 静水圧に関して

静水圧の再現性を示すため，水深20.0cmの矩形水槽を準備し，水槽中央の底面における圧力（底面壁構成粒子の圧力値）の時系列を標準MPS法，CMPS法，CMPS-HS法で比較する．計算に用いた粒子は3つの手法で共通で，粒子径4.0mmである．**図-1**は，3つの手法による瞬間像の例を示している．図中には，水圧の相違を粒子色の濃淡で示している．CMPS-HS法では，水深が増加するに従って水圧が増加し，整然とした横縞模様のパターンが示されている．CMPS法についてもほぼ同様の傾向ではあるが，濃淡の程度が変化する境界面には細かい凹凸が見られ，CMPS-HS法と比較すると静水圧の再現性は若干劣るようである．一方，標準 MPS 法

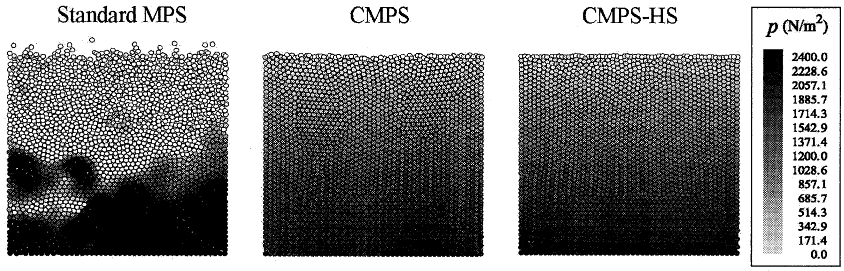

図-1 静水圧状態の瞬間像（標準MPS 法，CMPS 法，CMPS-HS 法の比較）

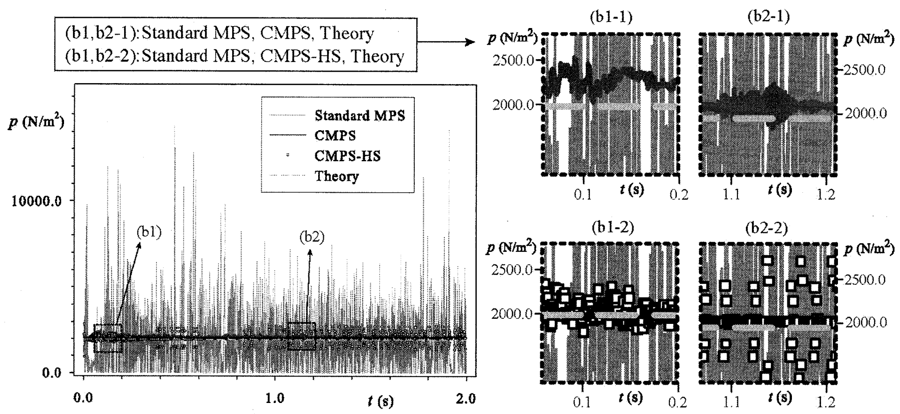

図-**2** 静水圧の時系列（標準MPS 法，CMPS 法，CMPS-HS 法の比較）

では，等値線に顕著な乱れが生じ，水圧の極大点が出現するなど，CMPS法，CMPS-HS法と比較すると静水圧の再現性は大きく劣る結果となっている．さらに水面についても，標準MPS法では，水面から跳ね上がる粒子の存在が顕著であるが，CMPS法，CMPS-HS法ではそのような粒子は存在しない．CMPS法，CMPS-HS法ともに水面には粒子径以下の凹凸を伴うが，CMPS法と比較してCMPS-HS法が相対的に滑らかな水面を与えていることが理解できる．

図-2は，水槽中央の底面粒子における水圧時系列を示している．図中には拡大図を併示したが，CMPS法，CMPS-HS法が理論値付近で重なって判別が困難なため，同じ範囲について，1)標準MPS法，CMPS法，理論値の比較，2)標準MPS法，CMPS-HS法，理論値の比較を併示した．CMPS法，CMPS-HS法の何れも，標準MPS法の圧力擾乱と比較すると1オーダー程度小さな変動レベルに収まっており，離散化過程における運動量保存性の改善が圧力擾乱の低減にも有効であることが理解できる．CMPS法，CMPS-HS法について比較すると，計算初期の拡大図(b1)では，両手法の結果にはあまり大きな差は見られない．一方，時刻t=1.1s付近の(b2)については，一見するとCMPS-HS法の変動が大きいように見える．しかし，図中の（b2-2）の p＝2000.0 付近の黒色の線は，CMPS-HS法の結果を示すシンボルが重なったものである．言い換えると，CMPS-HS法の計算結果はスパイク型擾乱を伴いつつも，ほぼ理論値付近に収束している．このスパイク型擾乱の持続時間は計算時間間隔10^{-3}s のオーダーであるから，粒子の座標移動にはそれほど大きく影響せず，結果として，CMPS法よりも整然とした等値線分布が**図**-1に示されたものと推察できる．CMPS-HS法のスパイク型擾乱の存在に関しては，今後さらに検討が必要であろう．

(2) 動水圧に関して

壁面衝突時に空気封入を伴わない場合に生じる弱い衝撃波圧，すなわちflip-through現象（Cooker・Peregrine, 1991）を対象に，CMPS法，CMPS-HS法の再現性を検討する．計算条件は，Hattoriら（1994）の水理実験と同様に設定し，1/20の勾配の一様斜面が岸側端部で鉛直壁に接続しており，鉛直壁前面には前面勾配1/10のマウンド模型（天端幅5.0cm）が置かれている．岸側の端部の鉛直壁前面の静水深は5.0cmであり，入射波は波高(=H_F) 4.7cm，周期 1.7s の規則波で，壁面前面の水面変動のピークは 6.9cm，トラフは 1.6cm となっている．造波に際しては，周期を固定して，トラフ，ピークを実験と一致させるように造波板を移動させている．後述する壁面圧力の測定については，静水時で水深 2.0cm の地点

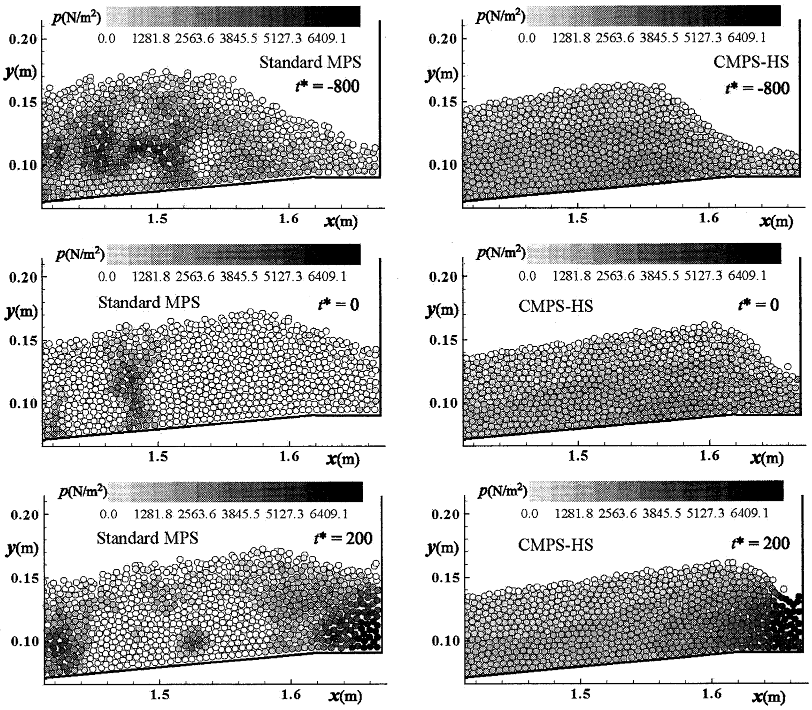

図-3　flip-through 現象の衝撃圧作用時前後の水面形と水圧分布（標準MPS 法，CMPS-HS 法の比較）

の時系列を対象とする．粒子径は前節同様に 4.0mm である．

図-3には，衝突の瞬間（t^*=0）およびその前後の計算結果を標準 MPS 法，CMPS-HS 法について比較した（$t^*=tC_s/H_F$; C_s=1500.0 m/s）．静水圧の場合と同様に標準 MPS 法では壁面近傍以外に水圧の極大点が出現し，水圧の分布に顕著な擾乱が見られる．**図**-4 には，最大衝撃圧付近の時刻における Cooker・Peregrine (1992) による理論解の特性を示したが，t^*=200における CMPS-HS 法の水圧等値線の形状は，**図**-4 の特性を良好に再現している．

図-5は，最大衝撃圧時（t^*=200）および衝撃圧がほぼ消散したt^*=500における解を，標準MPS法，CMPS法，CMPS-HS法で比較したものである．図中には，Hattori らの水面形測定結果も示した．秩序立った等値線の再現性は，標準 MPS 法が最も低く，CMPS 法では顕著な改善が見られるものの，等値線（粒子色の濃淡の界面）には擾乱が顕著で，最大衝撃圧時の再現性が不充分である．3者を比較すると，CMPS-HS 法の優位は明瞭である．さらに，水面形の測定値に関しても，CMPS-HS 法が，3者中で最も高い一致を示している．

図-6は，静水面から2.0cm下の測点での鉛直壁面作用水圧の時系列を示している．標準MPS法では，ゼロと実験値の2倍程度のピークを頻繁に繰り返す激しい変動が見られる．衝撃圧が支配的ではない t^*=500 付近以降

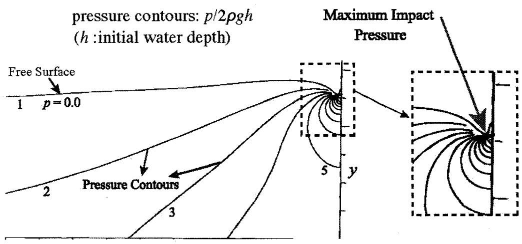

図-4　衝撃圧時の水圧分布特性

の解に注目するとこの傾向は特に明瞭である．つまり従来から言われるように，標準MPS法の圧力場の解を適切なインターバル平均で見れば，低周波の水面変動に関しては一定の再現性はある．ゼロ圧力の出現は，CMPS 法では減少するものの，変動の程度は標準MPS法と大きな相違がない．一方，CMPS-HS法ではt^*=500付近以降の解は一定の擾乱は伴うもののほぼ実験値と一致し，ゼロ圧力も出現しない．なお，実験値のピークはt^*=100付近に存在するが，CMPS法，CMPS-HS法ではピークの出現が遅れて，t^*=200付近となる．ピーク値の定量的一致に関しては，ノイズ低減についての更なる検討が必要である．

5. おわりに

本稿では，著者らが提案した CMPS 法の圧力場の再現性に関して詳細に検討し，さらに圧力場の解の精度

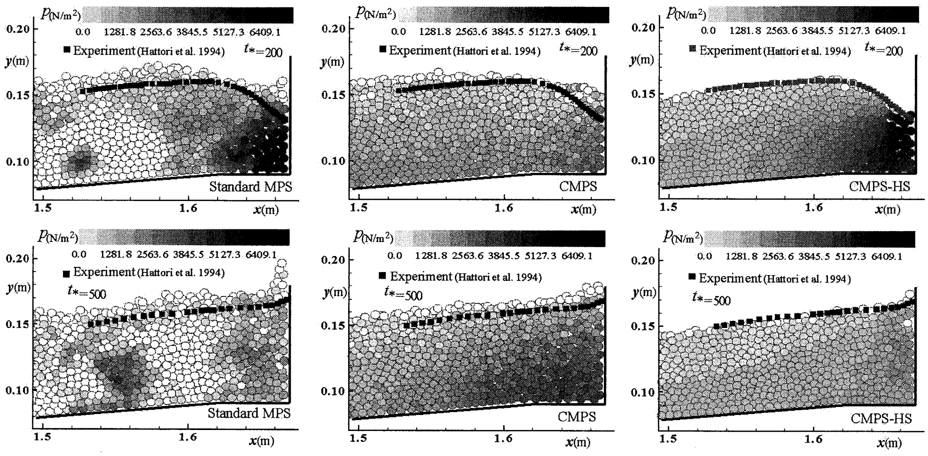

図-5 flip-through 現象の水面形と水圧分布（標準MPS法，CMPS法，CMPS-HS法の比較）

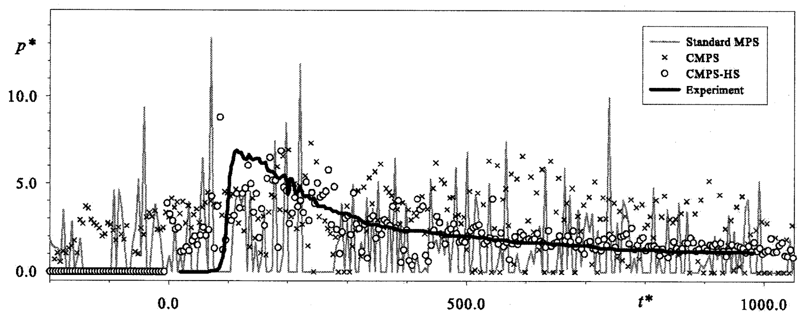

図-6 水圧の変動時系列（標準MPS法，CMPS法，CMPS-HS法の比較）

を向上させる目的で，圧力場の陰解法の基礎式であるPoisson方程式の生成項を**kernel**関数から評価する新しい手法・CMPS-HS法を提案した．標準MPS法の解に見られた圧力場の激しい擾乱は，運動量保存性を保証するCMPS法によって顕著に低減されることが，静水圧の検討で明らかとなったが，本来，静水面と並行となるべき等値線には一定レベルの擾乱が見られた．この擾乱の低減には，CMPS-HS法の導入が効果的であることが示された．さらに，動水圧に関してもflip-through現象を対象とした水面形および水圧分布の再現性に関して，CMPS-HS法の導入が，これまでの標準MPS法の擾乱を極めて効果的に低減することが示された．ただし，動水圧の時系列に関しては，CMPS-HS法の解にも一定レベルのノイズが存在し，瞬間値の評価精度の向上は今後の課題である．

参考文献

Khayyer Abbas，後藤仁志，Shao Songdong（2007）：巻き波型砕波における水面追跡の高精度化のためのCISPH法の提案，海岸工学論文集，第54巻，pp.16-20.

後藤仁志（2007）：粒子法による数値波動水槽の構築，水工学シリーズ07-B-3（水工学に関する夏期研修会講義集），土木学会，pp. B-3-1-20.

後藤仁志，五十里洋行，八木哲生，酒井哲郎（2003）：MPS法による砕波解析のための自由表面境界条件の改良，海岸工学論文集，第50巻，pp.21-25.

Cooker, M.J. and D.H. Peregrine（1991）: Wave breaking and wave impact pressures, Developments in Coastal Engineering, Univ. of Bristol, pp. 47-64.

Cooker, M.J. and D.H. Peregrine（1992）: Wave impact pressures and its effect upon bodies lying on the sea bed. Coastal Engineering, Vol.18, No.3-4, pp.205-229.

Hattori, M., Arami, A. and T. Yui,（1994）: Wave impact pressure on vertical walls under breaking waves of various types, Coastal Engineering, Vol.22, No.1-2, pp. 79?114.

Khayyer, A. and H. Gotoh（2008）: Development of CMPS method for accurate water-surface tracking in breaking waves, Coastal Eng. Jour., Vol. 50, No. 2, pp.179-207.

Koshizuka, S. and Y. Oka（1996）: Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. Nuclear Science and Engineering, Vol. 123, pp 421-434.

Monaghan, J. J.（1994）: Simulating free surface flows with SPH, J. Comput. Phys. Vol. 110, pp. 399-406.