

Immersed Boundary 法による数値波動水槽の構築とその応用に関する研究 —水平円柱周りの波浪場への適用—

Numerical Wave Flume with Immersed Boundary Method and its Applicability
in Wave Field Simulation around a Horizontal Circular Cylinder

李 光浩¹・水谷法美²

Kwang-Ho LEE and Norimi MIZUTANI

In this paper, we present a new numerical wave flume model capable of handling interface problems with complex geometry on a standard regular Cartesian grid, using immersed boundary method. Force terms are incorporated to the momentum equations to represent the interface on a fixed Cartesian grid and they are calculated on a finite number of Lagrangian points distributed over structure-fluid interface. The wave field around a horizontal circular cylinder has been chosen in order to validate applicability of the proposed numerical wave tank model. The calculated wave forces acting on cylinder are compared with previous experimental and numerical results. Results show that the proposed model gives good agreement with experimental results.

1. はじめに

近年, 計算機の性能向上と相まって, 構造物の耐波性能や越波及び漂砂など海岸工学上の様々な問題を解明するために数多くの高精度の数値計算手法が開発されている。中でも CADMAS-SURF (磯部ら, 1999; (財)沿岸開発技術研究センター, 2001) のような数値波動水槽の概念に基づく計算手法は, 様々な水理現象に対して水理実験とほぼ同等な結果を再現するとともに詳細なデータを提供しうるものであり, 経済的に事業評価が検討できる有用なツールとして認識されている。一方, 最近の海岸構造物は親環境性・高機能性などの観点からより複雑な形状が要求されている。しかしながら, 既往の数値波動水槽を用いた手法は一般的にデカルト座標系を用いて離散化しており, 曲面や任意形状への適用には構造物の情報の入力のみならず境界条件の取り扱いなどに課題が残されており, 一方, 構造物の形状に従う物体適合格子を形成するには手間を要するなどの課題がある。これに対して, 心臓内の血液の流れを解析するため Peskin (1977) によって提案された Immersed Boundary (IB) 法は, 従来のデカルト格子上で任意形状の不透過境界を有する物体と流体の連成解析が可能な手法であり, 近年, IB 法は単に血流シミュレーションのみならず, 数値流体力学の分野に幅広く用いられ始めている (例えば, 石井ら, 2006; Choi ら, 2007)。そこで, 本研究では, IB 法を用いた流体構造物連成解析コードを作製し, VOF 法を取り込んだ新たな数値波動水槽を構

築するとともに, 水中に設置された水平円柱周りの波動場へ適用し, 作用波力の実験結果と本数値モデルによる計算結果を比較・検討し, 新たに構築した IB 法に基づく数値波動水槽の有効性を検証する。

2. 数値計算法

(1) 基礎方程式

本計算で対象とした計算領域の概略図を図-1 に示す。本研究の数値波動水槽は, 複雑な自由表面の変化を精度よく追跡できる VOF 法と, 波と構造物の相互作用を解析できる IB 法で構成される。IB 法では計算領域内部の構造物による境界条件を満足させるため, 運動方程式に外力項を取り込んで計算を行う。したがって, 本数値解析コードにおける流体の基礎方程式は, 式 (1) の連続式, 式 (2) のナビア・ストークス方程式, 式 (3) の VOF 関数 F の移流方程式になる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \bar{q} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2\nu}{3} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_i} - g_i - \gamma u_j \delta_{j2} + \frac{L_i}{\rho} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(u_i F)}{\partial x_i} = F \bar{q} \dots \dots \dots (3)$$

ここに, x_i : デカルト座標で $i=1 \sim 2$ は x, z に対応, $u_i (i=1 \sim 2)$: i 方向の流速成分 (u, w), p : 圧力, ν : 動粘性係数, $\bar{q} = q(z, t)/\Delta x_s$: 造波ソース, $q(z, t)$: 造波位置 $x = x_s$ におけるわき出し強さ, $\Delta x_s = x - x_s$ での x 方向の格子長, t : 時間, g : 重力加速度, ρ : 流体の密度, D_{ij} : ひずみ速度テンソル, γ : 付加減衰領域で正の値を持つ減衰係数, L_i : IB 法で考慮する計算領域内の

1 正会員 博(工) 名古屋大学大学院助教 工学研究科 社会基盤工学専攻
2 正会員 工博 名古屋大学大学院教授 工学研究科 社会基盤工学専攻

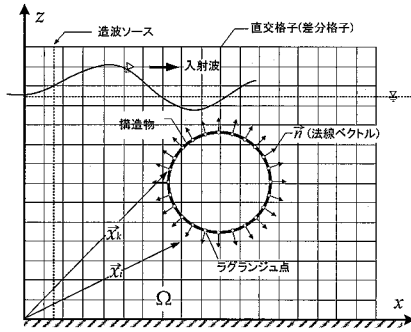


図-1 計算領域の概略図

構造物による i 方向の外力項 (オイラー力) であり, 次式で与えられる.

$$L_i = \int_{\Omega} \tilde{L}_{ki} \delta(x_i - x_k) dx_k \quad (4)$$

ここに, Ω : デカルト座標系に基づいた計算領域, x_k : 構造物の境界面上でのラグランジュ点の座標, δ : Dirac のデルタ関数, $\tilde{L}_{ki}$: ラグランジュ力の強さである.

(2) Immersed Boundary 法

IB 法は, 計算領域内の流体と構造物の相互作用を解析するため, デカルト格子を座標構造物境界面でのラグランジュメッシュとリンクさせ, 構造物の境界の影響を流体に外力として作用させて流体の不透過境界条件を満足させる計算手法であり, 構造物境界面のラグランジュメッシュでの流体力の評価方法に対していくつか方法が提案されている. 本研究では Lima e Silva ら (2003) による Physical Virtual (PV) モデルを採用することとした. このモデルでは, 構造物境界面のラグランジュメッシュでの力のつり合いを考えることで式 (4) のラグランジュ力 $\tilde{L}_{ki}$ を以下の式で表す.

$$\tilde{L}_{ki} = \rho \frac{u_{ki} - u_{fki}}{\Delta t} + \rho u_{ki} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_{kj}} - \mu \frac{\partial^2 u_{ki}}{\partial x_{kj}^2} + \frac{\partial p_k}{\partial x_{ki}} \quad (5)$$

ここに, u_{ki} : ラグランジュメッシュでの i 方向の境界面の速度成分, u_{fki} : u_{ki} が定義された位置での流速成分である. 式 (5) から分かるように, ラグランジュ力 $\tilde{L}_{ki}$ は運動量方程式に基づき, 第1項の局所加速力, 第2項の対流慣性力, 第3項の粘性力, 第4項の圧力項で構成される. このラグランジュ力を境界面の勾配を考慮し, 式 (1) の連続式と式 (2) のナビア・ストークス方程式から得られた水粒子の速度ベクトルと圧力を使って, 数値的に不透過境界を満足させる. このような方法は Direct-forcing 法とよばれている. 式 (5) の速度や圧力の空間微分は以下のラグランジュ補間多項式から求められる.

$$\Phi_i(l) = \sum_m \Psi_m(l) \Phi_m \quad (6)$$

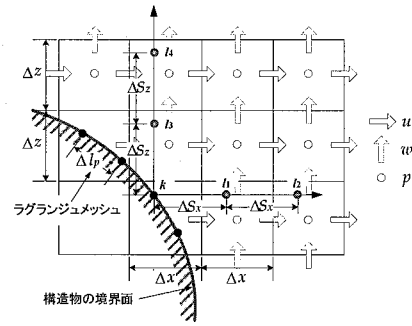


図-2 ラグランジュメッシュでの物理量の近似

$$\Psi_m(l)_i = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^n \frac{x_i(l) - x_i(n)}{x_i(m) - x_i(n)} \quad (7)$$

ここに, l : 計算領域における任意座標, $\Phi_i: l$ における i 方向の速度や圧力などの物理量, m : 補間で用いられる節点, n : 補間多項式の次数である. 例えば, 図-2 に示すように, ラグランジュメッシュ上における x 方向の Φ はラグランジュメッシュの節点 k と l_1, l_2 を用い, 2次までの補間を考慮すると, 次式のように表される.

$$\Phi_l = \frac{(x_l - x_{l_1})(x_l - x_{l_2})}{D_k} \Phi_k + \frac{(x_l - x_k)(x_l - x_{l_2})}{D_1} \Phi_{l_1} + \frac{(x_l - x_k)(x_l - x_{l_1})}{D_2} \Phi_{l_2} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} D_k &= (x_k - x_{l_1})(x_k - x_{l_2}) \\ D_1 &= (x_{l_1} - x_k)(x_{l_1} - x_{l_2}) \\ D_2 &= (x_{l_2} - x_k)(x_{l_2} - x_{l_1}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

これより, 式 (5) の空間微分は次のように計算される.

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial x} = \left(\frac{(x_l - x_{l_1}) + (x_l - x_{l_2})}{D_k} \right) \Phi_k + \frac{(2x_l - x_k - x_{l_2})}{D_1} \Phi_{l_1} + \frac{(2x_l - x_k - x_{l_1})}{D_2} \Phi_{l_2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x^2} = \frac{2\Phi_k}{D_k} + \frac{2\Phi_{l_1}}{D_1} + \frac{2\Phi_{l_2}}{D_2} \quad (11)$$

なお, ラグランジュ力を算定するため用いられた境界面の外側点 (図-2 の l_1, l_2, l_3, l_4 など) での物理量は周辺の計算格子から補間した. 以上より, 境界面に分布した各々のラグランジュメッシュでの力が求められる. また, ラグランジュ力 $\tilde{L}_{ki}$ を式 (4) に代入することにより計算領域内の構造物による外力項 L_i を算定できる. この際, 式 (4) の Dirac のデルタ関数はラグランジュ力を計算格子 (オイラーメッシュ) 上に分布させるため, 以下のように分布関数 D_i で近似される.

$$D_i(x_k) = \prod_i \left[\frac{f[(x_k - x_i)/\Delta x_i]}{\Delta x_i} \right] \quad (12)$$

ここに, f_i : 分布関数であり, 次式で定義する.

$$f(r) = \begin{cases} \tilde{f}(r) & \text{for } |r| \leq 1 \\ 0.5 - \tilde{f}(2-r) & \text{for } 1 < |r| \leq 2 \\ 0 & \text{for } |r| > 2 \end{cases} \quad (13)$$

$$\tilde{f}(r) = (3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4|r|^2})/8 \quad (14)$$

(3) 数値計算手法

基礎方程式をデカルト座標のスタッガード格子に基づいて離散化した。それらの差分近似式を以下に示すように Two-step projection 法により解析した。

• Prediction step :

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[-u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left\{ 2\nu \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} \right) - \frac{2\nu}{3} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_i} - g_i - \gamma u_j \delta_{j2} + \frac{L_i}{\rho} \right\} \right]^n \quad (15)$$

• Correction step :

$$u_i^{n+1} = \Delta t \left(\tilde{u}_i^{n+1} - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

ここに、 $\tilde{u}_i$ は i 方向の仮流速成分である。この際、移流項には 3 次精度の K-K (Kawamura-Kuwahara) スキーム (Kawamura・Kuwahara, 1984) を、他の空間微分に関しては 2 次精度の中心差分を用いた。また、圧力は Correction step の式 (16) と連続式を結合することによって得られるポアソン方程式から補正する。但し、このポアソン方程式を解く時には、一般座標系 (ξ, ζ) に座標変換し、計算領域の格子長を $\Delta\xi = \Delta\zeta = 1$ の均一な矩形格子を用いることにより、自由表面に沿う格子を生成することができる。一般座標系 (ξ, ζ) に座標変換したポアソン方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\gamma \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \zeta} \right) = S_p \quad (17)$$

ここに、 J : ヤコビアン、 α, γ : 形状係数、 S_p : ポアソン方程式におけるソース項であり、各々は次式で定義できる。

$$\alpha = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2} \right) \quad (18)$$

$$\gamma = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \quad (19)$$

$$S_p = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{u}_i^{n+1}) - \bar{q} \right) \quad (20)$$

これらによって、自由表面付近での複雑な圧力近似が要らず、自由表面セルにおける圧力を直接求めることができる。式 (17) のポアソン方程式から構成された連立 1 次方程式を MICCG 法より解く。これらの詳細は李・水谷 (2006) の波浪モデルとほぼ同様である。なお、計算領域内の構造物による外力項である式 (4) は式 (12) を用いて以下のように離散化される。

$$L_i = \sum_k \tilde{L}_{ki,k} D_i \Delta l_p^2 \quad (21)$$

ここに、 Δl_p はラグランジュメッシュの長さである。本数値計算手法のフローチャートを図-3 に示す。

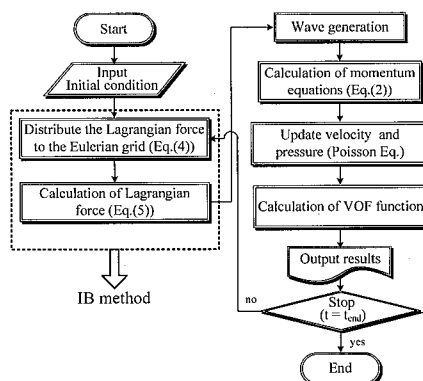


図-3 計算手法のフローチャート

3. PV モデルによる IB 法の特徴

(1) ラグランジュ力

上述したように、本研究で採用した PV モデルは、構造物境界面のラグランジュメッシュでの力のつり合いを考えることで境界面でのノンスリップを満足するものである。すなわち、ラグランジュメッシュでの力は局所加速力、対流慣性力、粘性力及び圧力項で構成される。ここでは、まず、PV モデルにより求めたラグランジュ力の特性を考察するため、水平円柱表面の任意点におけるラグランジュ力の検討を行う。計算は全長 5.0 m (付加減衰領域を除く)、高さ 0.95 m の 2 次元数値波動水槽で行った。計算条件は静水深 $h=0.78$ m、水平円柱の直径 $D=0.1$ m、水面からの水平円柱の中心深さ $e=0.095$ m、入射波高 $H_i=0.038$ m、周期 $T=1.0$ s である。また、計算に用いた格子幅はオイラーメッシュ幅 Δx_i を 0.01 m、ラグランジュメッシュ幅 Δl_p を $0.4\Delta x_i$ 以下とし、時間ステップ間隔 $\Delta t=T/10^3$ とした。図-4 は、図中に示したラグランジュ点において、 x, z 方向のラグランジュ力 $\tilde{L}_{kx}, \tilde{L}_{kz}$ の各成分の時間変化を表したもので、同図より、ラグランジュ力の各項は、振幅は異なるが波の周期で振動していることが確認される。特に、局所加速力は振幅が大きいのみならず、位相もラグランジュ力とほぼ同様であり、ラグランジュ力を算定することにおいて重要な項である。なお、対流慣性力や粘性力はラグランジュ力に大きな影響をおよぼさないことが分かる。

(2) 分布関数によるオイラー力

ラグランジュメッシュで求めたラグランジュ力は構造物表面における不透過条件を満足させるため、運動方程

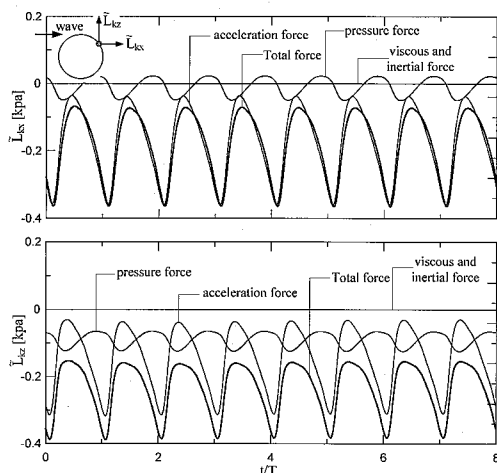


図-4 ラグランジュ力の各成分

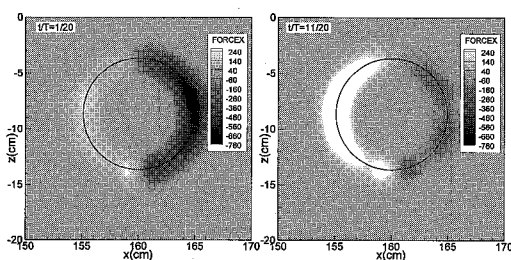
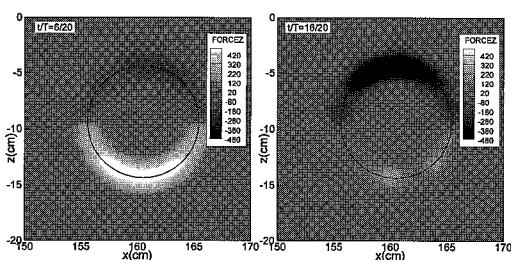
(a) x 方向のオイラー力(b) z 方向のオイラー力

図-5 デカルト格子上的オイラー力

式のソース項として作用させる。しかし、ラグランジュ力の定義位置は、スタッガード格子での物理量の位置と異なるため、次の時間ステップの流速や圧力の計算を行う前に、ラグランジュ力をデカルト格子に補間する必要がある。図-5に、図-4で求めたラグランジュ力を式(12)の分布関数を用いてデカルト格子に分布させたオイラー力の空間分布を示す。なお、これらの結果は1周期間で x 、 z 方向のオイラー力の最大・最小値が現れる位相の空間分布である。図から分かるように、デカルト格子上的ラグランジュ力は半周期ごとに各方向の最大・最小値が発生し、 $T/4$ 間隔で x 、 z 方向が転じて最

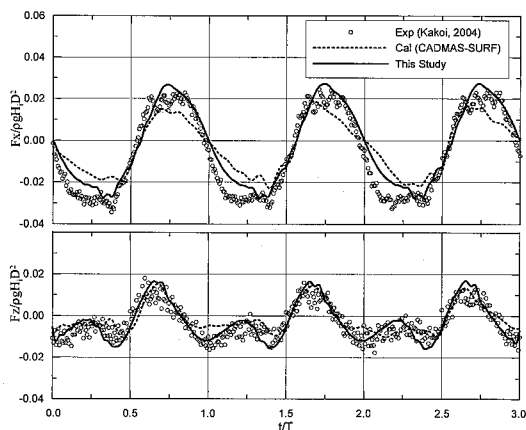


図-6 水平円柱に作用する波力の比較

大・最小を繰り返している。また、例えば、 $t/T=6/20$ の場合は右向き流速成分が、 $t/T=16/20$ は左向きの流速成分が卓越しているのが計算結果から確認されており、新井ら(1994)の水平円柱に作用する波力の特性を良く再現していることが明らかになった。

4. 計算手法の適用性の検証

(1) 水平円柱に作用する波力と流速場

IB法に基づき、新たに構築した数値波動水槽の妥当性を検証するため、波浪場におかれた水平円柱に作用する波力の時間変化に対して、計算結果を既往の実験結果(開, 2004)およびCADMAS-SURFによる計算結果と比較した。本モデルの計算条件は静水深 $h=0.52$ m, 水平円柱の直径 $D=0.1$ m, 水面からの水平円柱中心深さ $e=0.13$ m, 入射波高 $H_i=0.107$ m, 周期 $T=1.3$ sである。それ以外の条件は前章と同様である。また、CADMAS-SURFの計算では、本モデルで用いた格子幅と同様に Δx_i を0.01 mとし、それ以外の計算条件はCADMAS-SURFのデフォルトで設定した。図-6に波進行方向の波力 F_x と鉛直方向の波力 F_z の実験値と計算値の時系列変化を示す。図に示すように、CADMAS-SURFによる計算結果は実験値を全般的に若干過小していることが認められるが、本モデルによる計算値は波力の絶対値や位相がCADMAS-SURFより実験値を良く再現しているのが認められる。また、上北・山崎(1980)が実験で指摘した鉛直方向の波力 F_z の時間変化に含まれている倍周波数成分も精度よく計算できている。ついで、図-7は、水平円柱周辺の代表的な流速分布を示したものである。図より、時間経過に従って水平円柱の設置による水面変動の影響が確認される。特に、 $t/T=6/20$ から、一様流におかれた円柱と同様な円柱沖側 $z=-10$ cm付近で流れの分離が、 $t/T=16/20$ では、

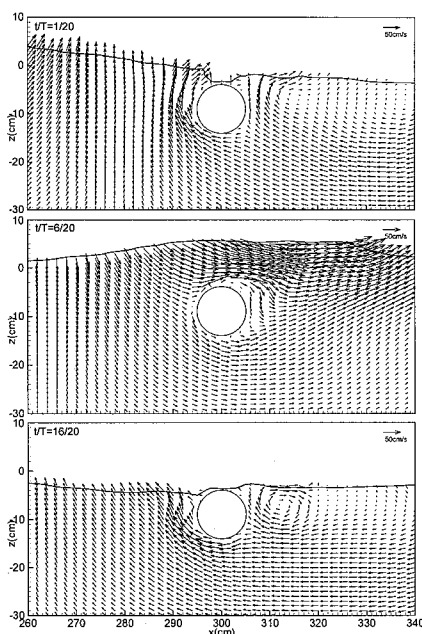


図-7 水平円柱周辺の流速ベクトル

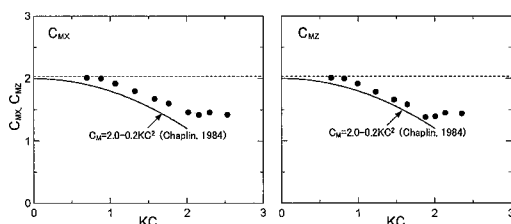


図-8 低 KC 数における質量力係数

円柱背後で時計まわりの渦が確認できる。

(2) 慣性力係数の比較

次に、低クーリーガン・カーペンター (KC) 数の条件下の水平円柱に作用する波力の計算結果に Morison 式を適用し、最小自乗法から慣性力係数を調べた。図-8 は、得られた慣性力係数 C_M を Chaplin (1984) の実験結果による近似式と同時に示したものである。また、図中の破線はポテンシャル理論による C_M の解析解を示している。なお、計算条件はレイノルズ (Re) 数と KC 数の比 $\beta=5280$, $e/D=0.256$, $D/L=0.037$ (L : 波長) である。図より、本数値モデルは Chaplin (1984) の結果に比べ、質量力係数は若干過大評価していることが認められるものの、Chaplin (1984) や新井ら (1994) が指摘したように、 C_M は KC 数が増加するにつれて減少し、次に増加に転じる特性が確認される。以上より、

IB 法を用いた数値波動水槽は波力を適切に算定していることが指摘できるとともに、工学的に有用な手法であると言える。

5. おわりに

本研究ではデカルト格子上の計算領域内の任意形状物体の周りの波動場の解析が可能な IB 法を VOF 法とリンクさせた新たな数値解析手法を構築した。そして本手法を、水平円柱周りの波動場の解析へ適用した。その結果、本手法は曲面を持つ構造物周りの波動場を効率的にデカルト格子上で計算でき、構造物周りの波動場や作用波力を良好に再現可能であることを明らかにした。しかし、本論では停止状態の構造物に限られており、今後は、本モデルを 3 次元へ拡張するとともに、移動構造物を対象として検討を行う予定である。

参考文献

- 新井信一・大嶋伸治・近藤圭央(1994): 規則波中水平柱状部材の低 KC 数領域での質量力減少と循環流, 海工論文集, 第 41 巻, pp. 861-865.
- 李 光浩・水谷法美(2006): 矩形潜堤周辺に生じる局所洗掘とその時間領域数値解析手法の開発, 海工論文集, 第 53 巻, pp. 501-505.
- 石井卓也・橋本 敦・中村佳朗(2006): Immersed Boundary 法を用いたパラシュートの開傘シミュレーション, 第 20 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, B4-3.
- 磯部雅彦・高橋重雄・余錫平・榊山 勉・藤間功司・蔣勤・秋山 実・大山洋志(2006): 数値波動水路耐波設計への適用に関する研究 - VOF 法基本プログラムの作成 -, 海洋開発論文集, 第 15 巻, pp. 321-326.
- 上北征男・山崎秀勝(1980): 水平円柱に作用する質量力に関する研究, 第 27 回海工論文集, pp. 358-362.
- (財)沿岸開発技術研究センター(2001): 数値波動水路の研究・開発, 沿岸開発技術ライブラリー, No. 12, 296p.
- 西 康隆(2004): 三次元構造物に作用する波力の直接計算とその特性に関する研究, 名古屋大学大学院, 修士論文, 27p.
- Chaplin, J.R. (1984): Nonlinear force on a horizontal cylinder beneath waves, J. Fluid Mech., Vol. 147, pp. 449-464.
- Choi, J.-L, R. C. Oberoi, J. R. Edwards and J. A. Rosati (2007): An immersed boundary method for complex incompressible flows, J. Comp. Phys. Vol. 224, pp. 757-784.
- Kawamura, T., and K. Kuwahara (1984): Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness, AIAA paper, pp. 84-340.
- Lima e Silva, A. L. F., A. Silveira-Neto and J. J. R. Damasceno (2003): Numerical simulation of two dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, J. Comp. Phys., Vol. 351, pp. 351-370.
- Peskin, C. S (1977): Numerical analysis of blood flow in the heart, J. Comp. Phys., Vol. 25, pp. 220-252.